НАРОДНАЯ УКРАИНСКАЯ АКАДЕМИЯ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ 1

Пособие
для слушателей факультета довузовской подготовки

Харьков
Издательство НУА
2012

УДК 51(076.1)
ББК 22.1я 727 - 4
С 23

*Утверждено на заседании
кафедры информационных технологий и математики
Народной украинской академии.
Протокол № 2 от 07.09.2009*

Составители: *С. В. Михайленко, Е. В. Свищева*
Рецензент д-р физ.-мат. наук *А. А. Янцевич*

Мета видання – допомогти слухачам ФДП підготуватися до тестування з математики під час вступу до ВНЗ і до успішного вивчення цього предмета в Харківському гуманітарному університеті «Народна українська академія». Посібник охоплює такі розділи елементарної математики: дійсні числа, ступінь з дійсним показником, тотожні перетворення алгебраїчних виразів, лінійні і квадратні рівняння, системи рівнянь.

По кожній темі наведено розв'язання типових задач, а також задачі для розв'язання на заняттях і вдома.

С 23 **Сборник** задач по математике : пособие для слушателей фак. довуз. подгот. / Нар. укр. акад., [каф. информ. технологий и математики ; сост.: С. В. Михайленко, Е. В. Свищева]. – 3-е изд., испр. и доп. – Х. : Изд-во НУА, 2012 – Ч. 1. – 32 с.

Цель издания – помочь слушателям ФДП подготовиться к тестированию по математике при поступлении в вуз и к успешному изучению данного предмета в Харьковском гуманитарном университете «Народная украинская академия». Пособие охватывает следующие разделы элементарной математики: действительные числа, степень с действительным показателем, тождественные преобразования алгебраических выражений, линейные и квадратные уравнения, системы уравнений.

По каждой теме приводятся решения типовых задач, а также задачи для решения на занятиях и дома.

УДК 51(076.1)
ББК 22.1я 727- 4

Содержание

1. Действительные числа

1.1. Натуральные и целые числа

Натуральными называются числа 1, 2, 3, 4, …, используемые для счета предметов. Множество всех натуральных чисел принято обозначать буквой $\boldsymbol{N}$. Натуральное число называется *простым*, если оно имеет только два делителя (само число и единицу). Если же число имеет более двух делителей, то оно называется *составным*. Любое составное натуральное число можно разложить на множители, причем только одним способом. Эти представления используются для нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.

Справедливы следующие правила:

Чтобы найти наибольший общий делитель или наименьшее общее кратное нескольких чисел, необходимо каждое из них разложить на простые множители.

1. Для нахождения наибольшего общего делителя надо составить произведение общих простых множителей, взяв каждый из них в наименьшей степени. Если общих множителей нет, то наибольший общий делитель равен единице, и числа называются взаимно простыми.
2. Для нахождения наименьшего общего кратного надо составить произведение множителей рассматриваемых чисел, взяв каждый из них в наибольшей степени. Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел. При разложении чисел на множители и при делении чисел используют признаки делимости. Натуральное число тогда и только тогда делится:

1) на 2, если его последняя цифра четная;
2) на 3 (на 9), если сумма его цифр делится на 3 (на 9);
3) на 4, если число из двух последних цифр делится на 4;
4) на 5, если его последняя цифра 0 или 5;
5) на 10, если его последняя цифра 0.

Обозначим через $\boldsymbol{N}'$ множество всех чисел противоположных натуральным: $\boldsymbol{N}' = \{-1;\ -2;\ -3;\ ...\}$.

Если объединить множество $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{N}'$ в одно множество и добавить 0, то получим множество целых чисел, которое обозначается буквой $\boldsymbol{Z}$.

$$\boldsymbol{Z} = \{\ldots;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ldots\}.$$

1. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 300 и 630.

Решение. При разложении заданных чисел на простые множители применяем запись столбиком, при которой делитель располагается справа от вертикальной черты, а частное записывается под делимым.

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Следовательно, $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$; $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Наибольший общий делитель этих чисел равен $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$; наименьшее общее кратное этих чисел равно $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 6300$.

2. Какое одноцифровое число необходимо добавить к числу 312, чтобы полученное число делилось на 45?

Решение. Так как $45 = 5 \cdot 9$, то полученное число должно делиться на 5 и 9 одновременно. Число делится на 5, если его последняя цифра 0 или 5. Так как к числу 312 добавляем одноцифровое число, можем получить два числа, которые делятся на 5. Это числа 315 и 320. Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9. Их этих двух чисел делится на 9 только число 315 (3+1+5=9). Чтобы получить число 315 из числа 312, необходимо добавить число 3.

3. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел

   1) 882 и 120; 2) 140 и 150;

   3) 600; 90 и 15; 4) 180; 210 и 135.

4. Какое одноцифровое число необходимо добавить к числу 671, чтобы полученное число делилось на 15?

5. Какое одноцифровое число необходимо добавить к числу 491, чтобы полученное число делилось на 45?

1.2. Рациональные и иррациональные числа

Рациональным называется число, которое можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m и n – целые числа, причем $n \neq 0$. Любое целое число является рациональным числом, так как его можно представить в виде дроби со знаменателем $n = 1$.

При вычислениях часто используется основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится дробь, равная данной.

Арифметические операции над обыкновенными дробями выполняются следующим образом:

1. Если дроби имеют одинаковые знаменатели, то сложение и вычитание дробей проводим по формулам: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$.

Например, $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$.

2. Чтобы выполнить сложение и вычитание дробей, имеющих разные знаменатели, приводим их к общему знаменателю. Наименьшим общим знаменателем является наименьшее общее кратное знаменателей заданных дробей. Например, необходимо сложить $\frac{5}{18}$ и $\frac{2}{15}$.

$$18 = 2 \cdot 3^2; \qquad 15 = 3 \cdot 5.$$

Наименьшее общее кратное чисел 18 и 15 равно 90: $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$.

$$\frac{5}{18} + \frac{2}{15} = \frac{5 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{90} = \frac{37}{90}.$$

3. Умножение обыкновенных дробей определяется следующим образом:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Например, $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$.

4. Деление обыкновенных дробей выполняем так:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c},$$

т. е. деление на дробь $\frac{c}{d}$ равносильно умножению на обратную величину $\frac{d}{c}$.

Например, $\frac{2}{7} : \frac{3}{5} = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{21}$.

Любая обыкновенная дробь может быть записана в виде десятичной дроби. Если знаменатель n несократимой дроби $\frac{m}{n}$ не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, то эта дробь записывается в виде конечной десятичной дроби. В остальных случаях получается бесконечная периодическая десятичная дробь.

Так, например, $\frac{3}{20} = 0{,}15$; $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0,(3)$; $\frac{17}{99} = 0{,}1717\ldots = 0,(17)$.

Числа π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ не могут быть представлены в виде отношения двух целых чисел $\frac{m}{n}$. Такие числа называются *<u>иррациональными</u>*. Иррациональное число может быть представлено в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Например, $\pi = 3{,}1415925\ldots$

1.3. Действительные числа

Рациональные и иррациональные числа составляют вместе множество R действительных чисел. Каждому действительному числу x соответствует некоторая точка на числовой прямой (координатной оси) и обратно. На множестве действительных чисел определены операции сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на 0), причем для любых действительных чисел a, b и c справедливы следующие равенства:

1) $a + b = b + a$; 2) $a + (b + c) = (a + b) + c$; 3) $a + 0 = a$;

4) $a \cdot b = b \cdot a$; 5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$; 6) $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$;

7) $a \cdot 1 = a$.

Модулем, или (*абсолютной величиной*) действительного числа x называется само число x, если x неотрицательное, и $-x$, если x отрицательное число,

т. е. $$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Геометрически модуль числа x означает расстояние на числовой прямой от начала координат до точки, соответствующей числу x.

Свойства модуля:

1) $|x| \geq 0$; 2) $|x| = |-x|$; 3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

4) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$; 5) $|x + y| \leq |x| + |y|$; 6) $|x - y| \geq |x| - |y|$;

7) Неравенство $|x| \leq a$, где $a > 0$, задает то же множество точек числовой прямой, что и двойное неравенство $-a \leq x \leq a$, т. е. $x \in [-a, a]$;

8) Неравенство $|x| \geq a$, где $a > 0$, задает множество точек числовой прямой $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$.

6. Вычислить:

1) $a + b + c$, $7a - 2b + 2c$, $a : b \cdot c$, $c : b + 6a$, $\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{b}$, если $a = 1\dfrac{2}{3}$, $b = 1\dfrac{5}{6}$, $c = 5{,}5$;

2) $a + 3b + 2c$, $14a - 6b - 7c$, $a \cdot b + 14c$, $c : a + b$, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}$, если $a = 2\dfrac{1}{7}$, $b = 2\dfrac{1}{3}$, $c = 1\dfrac{3}{7}$;

3) $\left(1\dfrac{2}{7} - (1{,}2 - 1\dfrac{2}{3}) \cdot 1\dfrac{1}{14}\right) \cdot 1{,}4$; 4) $\left(2\dfrac{2}{3} \cdot 0{,}3 : \dfrac{4}{7} - 3\dfrac{2}{7} \cdot 1\dfrac{2}{23} \cdot \dfrac{7}{125}\right) \cdot 5$;

5) $\left(2\dfrac{3}{5} + \dfrac{7}{25} - 3\dfrac{1}{3}\right) \cdot \dfrac{5}{34} : \dfrac{1}{45}$; 6) $\left(\dfrac{3}{7} - \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{14}\right) : 0{,}1 + \left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{3} + 1\dfrac{1}{4}\right) \cdot 1\dfrac{1}{3}$;

7) $\left(1\frac{3}{7}:\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{5}-0{,}15:0{,}1:\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{8}$;

8) $15\cdot\left(3\frac{2}{5}-1\frac{1}{4}\right)-\left(3\frac{2}{3}+1{,}2\right):\frac{4}{15}$;

9) $\dfrac{\left(152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8}\right)}{0{,}2}\cdot\frac{2}{35}\cdot 0{,}3$;

10) $\dfrac{\left(5\frac{7}{30}-3\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{0{,}04\cdot\frac{55}{3}}$;

11) $\dfrac{\left(2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}\right)\cdot 1\frac{4}{59}}{\left(3\frac{1}{12}+4{,}375\right):19\frac{8}{9}}$;

12) $1\frac{7}{20}:2{,}7+2{,}7:1{,}35+0{,}4:2\frac{1}{2}\cdot\left(4{,}2-1\frac{3}{40}\right)$;

13) $\left(7\frac{1}{9}-2\frac{14}{15}\right):\left(2\frac{2}{3}+1\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{20}\right)\cdot\left(\frac{5}{7}-\frac{5}{14}\right)+\frac{13}{48}$;

14) $\left(\dfrac{3\frac{1}{3}+2{,}5}{2{,}5-1\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{4{,}6-2\frac{1}{3}}{4{,}6+2\frac{1}{3}}\cdot 5{,}2\right):\left(\dfrac{0{,}05}{\frac{1}{7}-0{,}125}+5{,}7\right)$;

15) $\dfrac{12\frac{5}{6}-10\frac{1}{4}+3\frac{5}{12}}{0{,}8\cdot 0{,}25}$;

16) $\dfrac{\left(15\frac{7}{30}-13\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{0{,}04}\cdot\frac{3}{11}$;

17) $\dfrac{\left(5\frac{7}{30}-3\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{0{,}003:\frac{3}{2}}$;

18) $\dfrac{\left(2\frac{7}{30}-\frac{5}{12}\right):10{,}9+\left(1\frac{7}{8}-1\frac{7}{30}\right)\cdot 1\frac{9}{11}}{0{,}008:4{,}2}$.

7. Заданы три числа. Расположите их в порядке убывания:

1) 2,3; $\sqrt{10}$; $2\frac{1}{3}$; 2) $7/6$; $9/7$; $\sqrt{0{,}98}$

3) $22/7$; 3,4; $29/9$.

1.4. Пропорции. Проценты

Связь между четырьмя алгебраическими выражениями a, b, c, d, имеющая вид $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, называется <u>*пропорцией*</u>; a и d – крайние члены, b и c – средние члены пропорции. Основное свойство пропорции: $a \cdot d = b \cdot c$.

В хозяйственных и статистических расчетах части величин принято выражать в процентах. <u>*Процентом*</u> называется одна сотая рассматриваемой величины. Так, например, 1% от числа 150 равен 1,5.

8. 1) Найти 8% от числа 75.

<u>Решение</u>. Один процент от числа 75 равен 75:100. Тогда 8% от числа 75 равны $\frac{75 \cdot 8}{100} = 75 \cdot 0{,}08 = 6$.

2) Найти число, если 16% этого числа равны 36.

<u>Решение</u>. Один процент искомого числа равен 36 : 6. Все число составляет 100%, поэтому искомое число равно $\frac{36 \cdot 100}{16} = 225$.

Эту же задачу можно решить следующим образом. Обозначим искомое число через x. Тогда x – 100%
36 – 16%.

Составим пропорцию $\frac{x}{36}=\frac{100}{16}$. Отсюда $x=\frac{36 \cdot 100}{16}=225$.

9. Найти k% от числа a.

1) $k = 15$, $a = 310$; 2) $k = 70$, $a = 145$;

3) $k = 110$, $a = 76$; 4) $k = 130$, $a = 55$;

6) $k = 7$, $a = \left(\frac{1}{3} \cdot 0{,}69 + \frac{13}{35} \cdot 1{,}4\right) \cdot 40$;

7) $k = 90$, $a = \left(0{,}75 \cdot 2\frac{1}{3} + 2{,}25 \cdot \frac{1}{9}\right) : \frac{2}{25}$.

10. Найти число, если k% этого числа равны a.

1) $k = 15$, $a = 24$; 2) $k = 60$, $a = 165$;

3) $k = 120$, $a = 432$; 4) $k = 30$, $a = 13{,}5$;

5) $k = 25,\ a = \left(1{,}25 \cdot \frac{4}{7} \cdot 1{,}4 + 9{,}5 \cdot \frac{8}{19}\right)$; 6) $k = 8,\ a = \left(2{,}75 : \frac{11}{16} - 6{,}5 \cdot \frac{4}{13}\right)$.

11. Банк платит своим вкладчикам 8% годовых. Определите, сколько денег необходимо внести, чтобы через год получить 60 грн прибыли.
12. Вкладчик внес в банк 900 грн и через год получил проценты, которые составили 108 грн. Сколько процентов годовых выплачивает банк?
13. Цену товара снизили на 20%, потом полученную цену товара снизили еще на 10%. На сколько процентов всего снизили цену товара?
14. Вкладчик внес в банк 1000 грн под 10% годовых. Какую сумму денег он должен получить в конце третьего года?
15. Цену товара увеличили на 100%, а потом новую цену снизили на 50%. Как изменилась начальная цена товара?
16. Стоимость билета на футбол превышает стоимость билета на хоккей на 300%. Во сколько раз билет на хоккей дешевле билета на футбол?

2. Степень с действительным показателем

Пусть n, m – натуральные числа. По определению $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\ \text{раз}}$; $a^0 = 1$;

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}; \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

<u>*Свойства*</u> степени с действительным показателем:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; 2) $a^r : a^s = a^{r-s}$; 3) $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$;

4) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$; 6) $\sqrt{a^2} = |a|$.

17. Вычислить $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{3^2}$.

<u>Решение.</u> При решении воспользуемся равенством $\sqrt{a^2} = |a|$. Тогда $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{3^2} = |-5| + |3| = 5 + 3 = 8$.

18.Вычислить: $9^{1\frac{1}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{6}}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Решение. $9^{1\frac{1}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{6}}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{3}}=(3^2)^{\frac{4}{3}}\cdot\left(3^3\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^5\cdot\left(3^{-2}\right)^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}=$

$$=3^{\frac{8}{3}}\cdot 3^{\frac{3}{6}}\cdot 3^{\frac{5}{2}}\cdot 3^{-\frac{10}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}=3^{\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-\frac{10}{3}-\frac{1}{3}\right)}=3^2=9.$$

19. Вычислить: $8^{\frac{1}{3}}$; $81^{\frac{3}{4}}$; $4^{-\frac{1}{2}}$; $27^{\frac{2}{3}}$; $9^{\frac{3}{2}}$; $16^{-\frac{3}{4}}$; $9^{-\frac{1}{2}}$; $16^{\frac{5}{4}}$; $4^{-\frac{5}{2}}$;

$32^{\frac{3}{5}}$; $(0{,}01)^{-\frac{1}{2}}$; $(0{,}25)^{\frac{3}{2}}$; $(-2)^{-2}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}$; $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

20. Вычислить:

1) $\sqrt{2}:8^{-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{32}}$;

2) $\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{7}}\cdot\left(\sqrt[4]{7}\right)^6:\left(\sqrt{7}\right)^4$;

3) $\sqrt[4]{0{,}25}\cdot\sqrt{8}:\sqrt[8]{16^3}\cdot\sqrt{32}$;

4) $\sqrt{2\sqrt{8}}-\sqrt{4\sqrt{2}}$;

5) $\sqrt[4]{10^5}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt[8]{0{,}01}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$;

6) $\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{32}\cdot\sqrt[4]{4}}{(64)^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[6]{3}}$;

7) $(6{,}25)^{0,5}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{0,25}-(-4)^{-1}\cdot(0{,}343)^0$;

8) $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$;

9) $\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{7}-5)^2}$;

10) $\sqrt{(0{,}02)^3}\cdot(0{,}1)^{-0,25}\cdot\sqrt[4]{125}:\sqrt[8]{0{,}25}$;

11) $\sqrt{0{,}2}\cdot\sqrt{125^3}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2}}+81^{\frac{3}{4}}$;

12) $\sqrt[4]{8}:\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[8]{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{4^3}}+16^{\frac{1}{4}}$;

13) $\sqrt[3]{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\sqrt[6]{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

14) $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\cdot\sqrt[12]{3^5}\cdot\sqrt{3}$;

15) $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{9}}:\sqrt[6]{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

21. Упростить:

1) $\dfrac{\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{ab^2}}}{\sqrt[3]{b^4\sqrt[5]{a}}}$;

2) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3\sqrt{b}}\cdot(\sqrt[3]{ac^2})^2}{\sqrt[6]{c^2\sqrt{a^5}}\cdot\sqrt[8]{b^9}}$.

3. Тождественные преобразования алгебраических выражений

При тождественных преобразованиях алгебраических выражений используются *формулы сокращенного умножения:*

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; $\quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$; $\quad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; $\quad (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

При преобразовании алгебраических выражений можно при необходимости использовать формулу разложения на множители квадратного трехчлена: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

22. Упростить выражение: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left((x-y)^2+xy\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left((x+y)^2-xy\right).$

Решение: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left((x-y)^2+xy\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left((x+y)^2-xy\right)=$

$$=\frac{y+x}{xy}\cdot\left(x^2-2xy+y^2+xy\right)+\frac{y-x}{xy}\cdot\left(x^2+2xy+y^2-xy\right)=$$

$$=\frac{(y+x)\left(x^2-xy+y^2\right)+(y-x)\left(x^2+xy+y^2\right)}{xy}=\frac{\left(y^3+x^3\right)+\left(y^3-x^3\right)}{xy}=\frac{2y^3}{xy}=\frac{2y^2}{x}.$$

23. Упростить выражение: $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right)\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{a}}.$

Решение. В примерах подобного типа удобно сделать замену переменных так, чтобы избавиться от входящих в выражение корней. В данном случае сделаем замену $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}=U$. Тогда $a = U^2$. В результате этой замены исходное выражение примет вид: $\left(\frac{(U+2)}{U^2+2U+1}-\frac{U-2}{U^2-1}\right)\cdot\frac{U+1}{U}.$

Преобразуем полученное выражение: $\left(\frac{(U+2)}{(U+1)^2}-\frac{U-2}{(U-1)(U+1)}\right)\cdot\frac{U+1}{U}=$

$$=\frac{(U+2)(U-1)-(U-2)(U+1)}{(U+1)^2(U-1)}\cdot\frac{U+1}{U}=\frac{2U}{(U+1)^2(U-1)}\cdot\frac{U+1}{U}=\frac{2}{(U+1)(U-1)}=\frac{2}{U^2-1}.$$

Подставляя в полученное выражение $U=\sqrt{a}$, получаем ответ $\frac{2}{a-1}$. Исходное выражение можно преобразовать, не делая замены переменных.

24. Вычислить:

1) $(\sqrt{8-\sqrt{15}}-\sqrt{8+\sqrt{15}})^2$;

2) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+3}$

Решение:

1) Используя формулу $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, получаем:

$$(\sqrt{8-\sqrt{15}}-\sqrt{8+\sqrt{15}})^2=8-\sqrt{15}-2\sqrt{(8-\sqrt{15})\cdot(8+\sqrt{15})}+8+\sqrt{15}=$$

$$=16-2\sqrt{64-15}=16-2\sqrt{49}=16-14=2.$$

2) Избавляемся от иррациональности в знаменателе. Для этого домножаем числитель и знаменатель первого слагаемого на $(1-\sqrt{3})$, второго на $(\sqrt{3}-\sqrt{5})$ и т.д. Для преобразования знаменателя каждого слагаемого воспользуемся формулой $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$.

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+3}=$$

$$=\frac{(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}+\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}+\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}+$$

$$+\frac{(\sqrt{7}-3)}{(\sqrt{7}+3)(\sqrt{7}-3)}=\frac{1-\sqrt{3}}{1-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7}+\frac{\sqrt{7}-3}{7-9}=$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{7}-3}{-2}=\frac{-2}{-2}=1.$$

25. Умножить многочлен на многочлен:

1) $\left(2a^2b+ab^3\right)\cdot\left(6a-3b^2\right)$; 2) $\left(\alpha\beta-\alpha^2\right)\cdot\left(\beta^2+\alpha\beta\right)$;

3) $\left(2a^3b^2-ab^3\right)\cdot\left(b+2a^2\right)$; 4) $(2a+b)\cdot\left(4a^2-2ab+b^2\right)$;

5) $(\alpha-3\beta)\cdot\left(\alpha^2+3\alpha\beta+9\beta^2\right)$; 6) $(2ab-3c)\cdot(3c+2ab)$;

7) $\left(3a^2b^2c+ab^2c^2\right)\cdot(c-3a)$.

26. Разложить на множители:

1) $4a^2-1$; 2) $81x^2-16$; 3) a^6+b^3;

4) $27a^3+8b^3$; 5) x^4-16; 6) a^3-8b^3;

7) $8a^6-27$; 8) $x^3y^3-z^6$; 9) x^4-16z^4.

27. Сократить:

1) $\dfrac{(a+2b)(a^2+b^2)}{a^2-4b^2}$; 2) $\dfrac{a^6+b^3}{a^2+b}$; 3) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$;

4) $\dfrac{a^6-b^3}{a^4-b^2}$; 5) $\dfrac{a^3b-ab^3}{a^2b-ab^2}$; 6) $\dfrac{4a^2-b^2}{4a^2+4ab+b^2}$.

28. Возвести в заданную степень:

1) $\left(\sqrt{x}-2\right)^2$; 2) $\left(b^2+a^3\right)^2$; 3) $(2a+3b)^2$;

4) $\left(a^3-2b\right)^2$; 5) $(a+2b)^3$; 6) $\left(2a-b^2\right)^3$.

29. Упростить:

1) $(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)$;

2) $(a-2b)\cdot(a+2b)\cdot\left(a^2+4b^2\right)-\left(a^4-b^4\right)$;

3) $\dfrac{(a+b)}{(a-b)}:\dfrac{(a+b)^2}{\left(a^2-b^2\right)}$; 4) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^3-\beta^3}:\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^3-\beta^3}$;

5) $\dfrac{1}{(x+a)^2\cdot(x-a)}+\dfrac{1}{\left(x^2-a^2\right)\cdot(x-a)}$; 6) $\dfrac{\left(x^3+1\right)\cdot\left(x^2-25\right)}{\left(x^2-4x-5\right)\cdot\left(x^2+5x\right)}$;

7) $\dfrac{\left(x^2-4\right)\cdot\left(x^2-2x-3\right)}{\left(x^2-x-6\right)\cdot(x+1)}$; 8) $\dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}:\dfrac{x^2+2x+4}{x^2-9}$;

9) $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}-\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$; 10) $\dfrac{2}{a^2+2a+4}+\dfrac{8}{a^3-8}+\dfrac{1}{2-a}$;

11) $\dfrac{6}{a^2-3a}+\dfrac{1}{a+3}+\dfrac{1}{3-a}-\dfrac{6}{a^2-9}$; 12) $\dfrac{1}{a-6}-\dfrac{\left(a^2+a+1\right)}{a+1}:\dfrac{a^4-a}{a^2-1}$;

13) $(a-b)\cdot\dfrac{b^3-\dfrac{b^3-a^3}{2}}{\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)}$;

14) $$\frac{\left(b+\dfrac{2b^3}{a^2-b^2}\right)}{\left(1-\dfrac{a^4}{a^4-b^4}\right)}\cdot\frac{b^4}{(a^4+2a^2b^2+b^4)}.$$

30. Упростить:

1) $$\frac{a^2}{xy}+\frac{(a+x)^2}{x^2-xy}-\frac{(a+y)^2}{yx-y^2};$$

2) $$\frac{2b+a-\dfrac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\frac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2};$$

3) $$\left(\frac{a+3b}{(a-b)^2}+\frac{a-3b}{(a^2-b^2)}\right):\frac{a^2+3b^2}{(a-b)^2};$$

4) $$\left(\frac{a+b}{a^2-ab}-\frac{b}{ab-b^2}+\frac{1}{a+b}-\frac{b+a}{a^2-b^2}\right)\cdot(a+b);$$

5) $$\frac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x-\sqrt{x^2-4x}}-\frac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x+\sqrt{x^2-4x}};$$

6) $$\left(\left(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\right):\frac{(x-y)^2+4xy}{1+\dfrac{y}{x}};$$

7) $$\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{y^2}{4x^2-y^2};$$

8) $$\left(\left(\frac{x}{y-x}\right)^{-2}-\frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2\cdot\frac{x^4}{x^2y^2-y^4};$$

9) $$\left(\frac{2ab^2}{a^4-b^4}+\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{a+b}{b^2-a^2}\right):\frac{ab}{a^2-b^2}.$$

31. Упростить:

1) $$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}};$$

2) $\left(\dfrac{x}{y}+y^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\right):\left(x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-1}-y^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)$;

3) $\dfrac{x-y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{y}}-\left(\sqrt[3]{x}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

4) $\left(\dfrac{m^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-m^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{m^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{1}{2}}}{2m}$;

5) $\dfrac{\sqrt[4]{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}-\dfrac{\sqrt[4]{q}\cdot\left(\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q}\right)^2}{p-q}$;

6) $\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x+y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot xy^{-1}$;

7) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

8) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-y\right)}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}$;

9) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$;

10) $\dfrac{1-\sqrt{a}}{1-\sqrt[4]{a}}\cdot\dfrac{1-a}{1+\sqrt[4]{a}}:\left(1+\sqrt{a}\right)$.

32. Доказать тождества:

1) $\dfrac{2a}{a-2}-\dfrac{a+1}{a+2}+\dfrac{5a+6}{4-a^2}=\dfrac{a^4-a}{a^2-a}-a(a+1)$;

2) $\dfrac{(2a+1)^2-(a-1)^2}{a+2}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{(a+1)^3+(a-1)^3}{a^2+3}$;

3) $\left(\dfrac{a+b}{a^3-b^3}-\dfrac{1}{a^2-b^2}\right):\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^3-b^3}=\dfrac{1}{4(a+b)}$;

4) $\left(\dfrac{x-5}{x^2-3x+2}-\dfrac{x+1}{x^2+x-2}\right)\cdot\dfrac{(x^2-4)}{(x+4)}=\dfrac{2}{1-x}$;

5) $\dfrac{a-\sqrt{a}-2}{a-4}:\dfrac{1}{\sqrt{a}+2}=\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$.

33. Упростить:

1) $\sqrt{\dfrac{a+2}{(2-a)^2}}$ при $a>2$;

2) $\sqrt{(5-\sqrt{x})^2}$ при $x>25$;

3) $\dfrac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^2+1}}$ при $a<0$;

4) $\sqrt{4+x-4\sqrt{x}}-\dfrac{x-4}{2-\sqrt{x}}$ при $x\geq 4$;

5) $\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}+\sqrt{x+9-6\sqrt{x}}$ при $1\leq x\leq 9$.

34. Вычислить:

1) $(\sqrt[6]{27}+\sqrt[4]{64})\cdot(\sqrt[6]{27}-\sqrt[4]{64})$;

2) $(\sqrt{6-\sqrt{11}}-\sqrt{6+\sqrt{11}})^2$;

3) $(\sqrt{7-\sqrt{13}}-\sqrt{7+\sqrt{13}})^2$;

4) $\dfrac{53}{8-\sqrt{11}}+\dfrac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}-\dfrac{9}{\sqrt{13}+2}$

5) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

6) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}$;

7) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$.

4. Линейные уравнения и сводящиеся к ним

Корнем или решением уравнения $f(x)=\varphi(x)$ или $f(x)=0$ называется такое число, при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство.

Решить уравнение – значит найти все его решения или доказать, что оно не имеет решений. Два уравнения считаются *равносильными*, если любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения и наоборот. Для решения уравнения заменяем его более простым уравнением, равносильным данному.

<u>Преобразования, приводящие уравнение к равносильному:</u>

1. Прибавление одного и того же числа или выражения к обеим частям уравнения.

2. Перенос некоторого числа или выражения из одной части уравнения в другую с противоположным знаком.

3. Умножение или деление обеих частей уравнения на число или выражение, отличное от нуля.

4. Тождественные преобразования в одной или обеих частях уравнения.

<u>Линейным уравнением</u> называется уравнение вида $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$.

Линейное уравнение имеет единственный корень $x = -\dfrac{b}{a}$.

35. Решить уравнения:

1) $(2x - 1)(x + 2) + (x + 1)^2 = x\cdot(3x + 4) - 3$.

<u>Решение.</u> Выполняем тождественные преобразования в обеих частях уравнения:

$$2x^2 + 4x - x - 2 + x^2 + 2x + 1 = 3x^2 + 4x - 3;$$

$$3x^2 + 5x - 1 = 3x^2 + 4x - 3; \qquad 5x - 4x = -3 + 1; \qquad x = -2.$$

2) $3|x| + 7x - 5 = 0$.

<u>Решение</u>. При $x \geq 0$ $|x| = x$, поэтому уравнение принимает вид: $3x + 7x - 5=0$.

Решаем полученное уравнение: $10x = 5$; $x = \dfrac{1}{2}$.

Так как $\dfrac{1}{2} > 0$, полученное значение $x = \dfrac{1}{2}$ является корнем исходного уравнения. При $x < 0$ $|x| = -x$, поэтому исходное уравнение принимает вид:

$$-3x + 7x - 5 = 0 \qquad 4x = 5; \qquad x = \frac{5}{4}.$$

Так как $x = \dfrac{5}{4}$ не удовлетворяет условию $x < 0$, это значение не является корнем исходного уравнения. Следовательно, заданное уравнение имеет один корень $x = \dfrac{1}{2}$.

36. Решить уравнения:

1) $(3x - 1)(2x + 1) - (6x + 1)(x - 1) = 1 + 7x$;

2) $(3 - 2x)(x - 2) + (2x - 1)(x - 3) = 1 - x$;

3) $3(21 + 2x) - 5(3 - 2x) - 5x + 7 = 0$;

4) $3(7-8x)-7(3-4x)=1$;

5) $2\frac{1}{3}x-3\frac{1}{2}x=3\frac{1}{5}x-4\frac{2}{3}x-9$;

6) $(x+5)(x+2)-3(4x-3)=(5-x)^2$;

7) $\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{x(x+1)^2}=\frac{5}{2x(x+1)}$;

8) $\frac{2x+19}{5x^2-5}-\frac{17}{x^2-1}-\frac{3}{1-x}=0$;

9) $\frac{x+a}{a-x}+\frac{x-a}{a+x}=\frac{a}{a^2-x^2}$;

10) $\frac{x}{a}-1:\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)=1:\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$;

11) $\frac{a^2+x}{b^2-x}-\frac{a^2-x}{b^2+x}=\frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}$;

12) $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=2$.

37. Решить уравнения:

1) $3|x|+x-8=0$;

2) $3x-7|x|+8=0$;

3) $5x+3|x|-16=0$;

4) $3x+2|x|-10=0$;

5) $3x+4|x|-10=0$;

6) $6|x|-x-15=0$;

7) $2x+5|x|+9=0$;

8) $x+2|x|+6=0$;

9) $4x+|x|+12=0$;

10) $|2x-5|=5$;

11) $|x-1|+2x-5=0$;

12) $3|x-2|-x=2$;

13) $\sqrt{x^2}=3$;

14) $|x-1|+x=2x-1$.

38. Решить уравнения:

1) $4+2(x-2(x-2(x-2)))=-6$;

2) $\dfrac{8}{3+\dfrac{2}{4-\dfrac{2}{3-x}}}=2$.

39. Указать, при каких значениях параметра a уравнения не имеют решений:

1) $3\,(a-2x)=ax+5$;

2) $\dfrac{2+4x}{5-x}=a$.

5. Квадратные уравнения и сводящиеся к ним

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$.

Величина $D=b^2-4ac$ называется *дискриминантом* квадратного уравнения. При решении квадратного уравнения возможны три случая:

1. Если $D>0$, уравнение имеет два разных действительных корня, вычисляемых по формуле: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

2. Если $D=0$, уравнение имеет единственный корень $x=-\dfrac{b}{2a}$.

3. Если $D<0$, уравнение не имеет действительных корней.

При нахождении корней квадратного уравнения можно использовать *теорему Виета:*

Если x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, то $x_1+x_2=-p$; $x_1\cdot x_2=q$.

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c можно разложить на множители: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Биквадратным уравнением называется уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq 0)$.

Введем новую переменную $y=x^2$. Биквадратное уравнение после этой замены превращается в квадратное уравнение $ay^2+by+c=0$.

40. Решить уравнения:

1) $(2x-1)(x-2)+(x+1)^2=x+2$.

<u>Решение</u>. Преобразуем данное уравнение:

$$2x^2-4x-x+2+x^2+2x+1=x+2;$$

$3x^2-4x+1=0$. Решаем полученное квадратное уравнение:

$D=(-4)^2-4\cdot 3\cdot 1=4$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{4}}{6}$; $\quad x_1=1$; $\quad x_2=\dfrac{1}{3}$.

2) $\dfrac{5}{x^2-3x+1}-x^2+3x+3=0$.

<u>Решение</u>. ОДЗ: $x^2-3x+1\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Преобразуем полученное уравнение: $\dfrac{5}{x^2-3x+1}-(x^2-3x+1)+4=0$. Обозначим $y=x^2-3x+1$. Тогда исходное уравнение запишется в виде $\dfrac{5}{y}-y+4=0$ $(y\neq 0)$. Решаем полученное уравнение: $5-y^2+4y=0 \Rightarrow y^2-4y-5=0$; $y_{1,2}=\dfrac{4\pm 6}{2}$; $y_1=5$; $y_2=-1$.

Подставляя $y_1=5$ в равенство $y=x^2-3x+1$, получаем уравнение $x^2-3x+1=5 \;\Rightarrow\; x^2-3x-4=0$. Решая уравнение, получаем $x_1=4$; $x_2=-1$.

Подставляя $y_2=-1$ в равенство $y=x^2-3x+1$, получаем уравнение $x^2-3x+1=-1 \;\Rightarrow\; x^2-3x+2=0$. Решаем это уравнение: $x_1=1$; $x_2=2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет четыре корня:

$$x_1=4;\qquad x_2=-1;\qquad x_3=1;\qquad x_4=2.$$

41. Решить уравнения:

1) $x^2+x-2=0$;

2) $x^2-7x+12=0$;

3) $2x^2-5x+2=0$;

4) $6x^2-5x+1=0$;

5) $5x^2+4x-1=0$;

6) $4x^2+7x-2=0$;

7) $3x^2-10x+3=0$;

8) $x^2-4ax+3a^2=0$;

9) $x^2+2a^3x-35a^6=0$;

10) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$;

11) $3b^2x^2+10abx+3a^2=0$;

12) $ab(x^2+1)-(a^2+b^2)x=0$;

13) $abx^2 + (a^2 - b^2)x - ab = 0$;

14) $\frac{a}{x-a} - \frac{x}{x+a} = \frac{7}{5}$.

42. Решить уравнения:

1) $2x^2 + 7x = 7x^2 + 17x$;

2) $15x - 3x^2 = 4x^2 + x$;

3) $(3x-2)(x+5) = (2x+1)(x+5) - 15$;

4) $(2x-1)^2 + (3x+2)^2 = (x+4)^2 + 5$;

5) $\frac{5x^2+9}{6} - \frac{4x^2-9}{5} = 6$;

6) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = 3\frac{1}{3}$.

43. Найти корни уравнения по теореме Виета:

1) $x^2 - 9x + 14 = 0$;

2) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

3) $x^2 + 9x + 14 = 0$;

4) $x^2 + 9x + 20 = 0$;

5) $x^2 - x - 6 = 0$;

6) $x^2 - 4x - 5 = 0$;

7) $x^2 + 3x - 4 = 0$;

8) $x^2 + 4x - 5 = 0$;

9) $x^2 + 2x - 8 = 0$;

10) $x^2 - 2x - 15 = 0$.

44. Разложить трехчлен на множители:

1) $x^2 + 7x + 12$;

2) $x^2 + 3x - 10$;

3) $6x^2 + 5x + 1$;

4) $8x^2 - 6x + 1$;

5) $3x^2 - 7x + 2$;

6) $2x^2 + 5x - 3$;

7) $x^2 + ax - 2a^2$;

8) $x^2 + ax - 6a^2$;

9) $(a^2 + b^2)x^2 - 2b^2x + b^2 - a^2$;

10) $abx^2 - 2a\sqrt{ab} \cdot x + a^2 - b^2$.

45. Решить уравнения:

1) $x^2 - 7|x| + 12 = 0$;

2) $x^2 - 8|x| + 15 = 0$;

3) $x^2 - 7|x| + 6 = 0$;

4) $2x^2 - 5|x| + 2 = 0$;

5) $x^2 - 4|x| - 5 = 0$;

6) $x^2 - 2|x| - 8 = 0$;

7) $3x^2 + 2|x| - 1 = 0$;

8) $3x^2 - 5|x| - 2 = 0$;

9) $x^2 + 7|x| + 12 = 0$;

10) $x^2 + 4|x| + 3 = 0$.

46. Решить уравнения:

1) $x^2+6x-2-\dfrac{35}{x^2+6x}=0$;

2) $x^2-3x=2+\dfrac{8}{x^2-3x}$;

3) $\dfrac{2}{x^2-3x+1}+x^2-3x+4=0$;

4) $x^2-4x-1-\dfrac{16}{x^2-4x-1}=0$;

5) $\dfrac{2x+1}{x}+\dfrac{4x}{2x+1}=5$;

6) $\dfrac{3x}{x+1}+1=\dfrac{2(x+1)}{3x}$.

47. Решить биквадратные уравнения:

1) $x^4-5x^2+4=0$;

2) $x^4-10x^2+9=0$;

3) $x^4+3x^2-4=0$;

4) $x^4-8x^2-9=0$;

5) $x^4+12x^2+32=0$;

6) $x^4+5x^2+4=0$.

48. При каких значениях a уравнение $x^2-ax+4=0$ имеет:

1) действительные корни $x_1 \neq x_2$;
2) действительные корни $x_1 = x_2$;
3) не имеет действительных корней?

49. Не решая уравнение $x^2+px+q=0$, составить уравнение, корнями которого являются а) $\dfrac{1}{x_1}$, $\dfrac{1}{x_2}$; б) $-x_1$, $-x_2$; в) x_1^2, x_2^2; г) $\dfrac{1}{x_1^2}$, $\dfrac{1}{x_2^2}$.

Выполнить указанное для уравнений:

1) $x^2-5x+3=0$;

2) $x^2+4x+2=0$;

3) $x^2-2x-1=0$;

4) $2x^2-3x-4=0$.

50. Вычислить значение выражений:

1) $\dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}$, если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2-\sqrt{8}x+\sqrt{2}=0$.

2) $\dfrac{x_1\cdot x_2}{(x_1+x_2)^2}$, если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2-(\sqrt{3}+1)x-(2+\sqrt{3})=0$.

3) $\dfrac{x_1\cdot x_2}{x_1^2+x_2^2}$, если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2+2\sqrt{6}x+3=0$.

4) Определить, сколько действительных корней имеет уравнение $x^3-4|x|=0$

51. Доказать, что:
1) при каждом целом m число $m^3 + 3m^2 + 2m$ делится на 6;
2) при каждом целом n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120;
3) при каждом нечетном n число $(n^2 - 1)$ делится на 8.

52. Доказать, что:
1) при любых действительных x и y верно неравенство
$$x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10 > 0;$$
2) при любых $x > 0$ верно неравенство $x + \frac{1}{x} \geq 2$;
3) при любых $a > 0$, $b > 0$ верно неравенство $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \sqrt[4]{ab}$.

6. Решение систем рациональных уравнений

53. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 3x + 5y = -9 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 5x + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 3x + y = -3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 3x = 4 - 5y \\ 2x - 3y - 9 = 0 \end{cases}$;

6) $\begin{cases} 2x + 8y = 3 \\ 4(x - y) = 1 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 30 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 31 \end{cases}$;

8) $\begin{cases} \frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y} = \frac{5}{8} \\ \frac{1}{x - y} - \frac{1}{x + y} = \frac{3}{8} \end{cases}$;

9) $\begin{cases} \frac{10}{x - 5} + \frac{1}{y + 2} = 1 \\ \frac{25}{x - 5} + \frac{3}{y + 2} = 2 \end{cases}$;

10) $\begin{cases} \frac{1}{x + 1} + \frac{4}{y + 2} = \frac{5}{2} \\ \frac{6}{x + 1} + \frac{1}{y + 2} = \frac{7}{2} \end{cases}$;

11) $\begin{cases} x^2 + xy = 7 \\ y^2 + xy = 9 \end{cases}$;

12) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6 \end{cases}$;

13) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x+3y} + \dfrac{4}{5x-y} = -3 \\ \dfrac{6}{2x+3y} - \dfrac{1}{5x-y} = 3 \end{cases}$;

14) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 37 \\ x - y = 1 \end{cases}$;

15) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$;

16) $\begin{cases} x^2 - xy = 8 \\ xy - y^2 = 4 \end{cases}$.

Список рекомендованной литературы:

1. Кириченко Ю. В. Репетитор по математике для поступающих в вузы : справочник / Ю. В. Кириченко, С. Ю. Кириченко, В. И. Омельченко и др. – Х.: Фолио, 1997. – 463 с.
2. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала анализа : учебник / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др. – М.: Просвещение, 1997. – 320 с.
3. Сборник конкурсных задач по математике / под ред. М. И. Сканави. – М. : Высш. шк., 1980. – 541 с.
4. Литвиненко Г. Н. Сборник заданий для экзамена по математике на аттестат о среднем образовании. Алгебра и начала анализа / Г. Н. Литвиненко, Л. Я. Федченко, В. А. Швец. – Донецк, 2000. – 93 с.

Ответы

3. 1) 6; 17640; 2) 10; 2100
3) 15; 1800; 4) 15; 3780.

4. 4

5. 4

6. 1) 9, 19, 5, 13, $\frac{8}{11}$; 2) 12, 6, 25, 3, $1\frac{1}{6}$; 3) 2,5; 4) 6; 5) –3;
6) 2; 7) –1; 8) 14; 9) $\frac{3}{8}$; 10) 1; 11) 3; 12) 3;
13) 1; 14) 1; 15) 30; 16) 5; 17) 50; 18) 700.

7. 1) $\sqrt{10}$; $2\frac{1}{3}$; 2,3.
2) $9/7$; $7/6$; $\sqrt{0{,}98}$.
3) 3,4; $29/9$; $22/7$.

9. 1) 46,5 2) 101,5; 3) 83,6; 4) 71,5; 5) 2,1; 6) 22,5.

10. 1) 160; 2) 275; 3) 360; 4) 45; 5) 20; 6) 25.

11. 750 грн

12. 12%

13. 28%

14. 133 грн

15. не изменилась

16. в 4 раза

19. 2, 27, $1/2$, 9, 27, $1/8$, $1/3$, 32, $1/32$, 8, 10, $1/8$, $1/4$, $1/2$, 36, 2.

20. 1) 16; 2) 1; 3) 4; 4) 0; 5) 20; 6) $\frac{1}{4}$; 7) 1,5; 8)2; 9) 3;
10) $\frac{1}{50}$; 11) 32; 12) 6; 13) 10; 14) 3; 15) –6.

21. 1) $\frac{a}{b}$; 2) $\frac{ac}{b}$.

29. 1) a^8-b^8; 2) $-15b^4$; 3) 1; 4) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$; 5) $\dfrac{2x}{(x^2-a^2)^2}$;

6) $\dfrac{x^2-x+1}{x}$ 7) $x-2$; 8) $x+3$; 9) $\dfrac{ab}{a+b}$; 10) $-\dfrac{a^2}{a^3-8}$;

11) $-\dfrac{6}{a(a+3)}$; 12) $\dfrac{6}{a(a-6)}$; 13) $\dfrac{1}{2}$; 14) $-b$.

30. 1) 1; 2) $\dfrac{a-b}{a+b}$; 3) $\dfrac{2}{a+b}$; 4) $-\dfrac{b}{a}$;

5) $\sqrt{x^2-4x}$; 6) $\dfrac{1}{xy}$; 7) $\dfrac{24}{5y-2x}$; 8) $\dfrac{x-y}{x+y}$;

9) $-\dfrac{1}{a}$.

31. 1) $x-1$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; 3) $-\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{y}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{m}}$;

5) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}}$; 6) $\sqrt{y}-\sqrt{x}$; 7) 1; 8) $3\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{y}$;

9) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 10) $1-\sqrt{a}$.

33. 1) $\dfrac{\sqrt{a+2}}{a-2}$ 2) $\sqrt{x}-5$ 3) –2; 4) $2\sqrt{x}$;

5) 2.

34. 1) -5; 2) 2; 3) 2; 4) 10;

5) 4; 6) $-2\sqrt{2}$; 7) 1

36. 1) –1; 2) 4; 3) –5; 4) $1/4$; 5) –30;

6) $6/5$; 7) 1; 8) 3; 9) $1/4$; 10) $\dfrac{ab}{a+b}$;

11) $\dfrac{a+b}{a-b}$; 12) $a+b$.

37. 1) –4; 2 2) $-4/5$; 2; 3) 2; 4) 2; 5) –10; $10/7$;

6) $-15/7$; 3 7) ∅; 8) ∅; 9) –4; 10) 0;5;

11) 2; 12) 1; 4.

38. 1) 1; 2) 2.

39. 1) –6; 2) –4.

41. 1) –2; 1; 2) 3; 4; 3) $1/2$; 2; 4) $1/3$; $1/2$;

5) –1; $1/5$; 6) –2; $1/4$; 7) $1/3$; 3; 8) a; $3a$;

9) $-7a^3$; $5a^3$; 10) $a-b$; $a+b$; 11) $-\frac{a}{3b}$; $-\frac{3a}{b}$;

12) $\frac{a}{b}$; $\frac{b}{a}$; 13) $-\frac{a}{b}$; $\frac{b}{a}$; 14) $-\frac{2}{3}a$; $\frac{3}{2}a$.

42. 1) –2; 0; 2) 0; 2; 3) –2; 0; 4) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$;

5) ± 9; 6) ± 6.

43. 1) 2; 7; 2) 3; 4; 3) –2; –7; 4) –4; –5; 5) –2; 3;

6) –1; 5; 7) –4; 1; 8) –5; 1; 9) –4; 2; 10) –3; 5.

45. 1) ± 3; ± 4; 2) ± 3; ± 5; 3) ± 1; ± 6; 4) $\pm\frac{1}{2}$; ± 2;

5) ± 5; 6) ± 4; 7) $\pm\frac{1}{3}$; 8) ± 2; 9) ∅; 10) ∅.

46. 1) –7; –5; ± 1; 2) ± 1; 2; 4; 3) 1; 2;

4) ± 1; 3; 5; 5) –1; $\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{2}{5}$; $\frac{1}{2}$.

47. 1) ± 1; ± 2; 2) ± 1; ± 3; 3) ± 1; 4) ± 3; 5) ∅; 6) ∅.

48. 1) $|a| > 4$; 2) $|a| = 4$; 3) $|a| < 4$.

49. а) $qx^2 + px + 1 = 0$; б) $x^2 - px + q = 0$;

в) $x^2 + (2q - p^2)x + q^2 = 0$ г) $q^2x^2 + (2q - p^2)x + 1 = 0$

50. 1) 2; 2) $-1/2$; 3) $1/6$; 4) 2.

53. 1) $(2; -3)$; 2) $(2; -2)$; 3) $(1; 2)$; 4) $(-2; 3)$; 5) $(3; -1)$;

6) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$; 7) $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right)$; 8) $(5; 3)$; 9) $(10; -3)$; 10) $(1; 0)$;

11) $\left(\frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right)$; $\left(-\frac{7}{4}; -\frac{9}{4}\right)$; 12) $(3; 2)$; $(3; -3)$; $(-4; 2)$; $(-4; -3)$;

13) $(0; 1)$; 14) $(-3; -4)$; $(4; 3)$; 15) $(3; 1)$; 16) $(4; 2)$; $(-4; -2)$.

Навчальне видання

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ
ЧАСТИНА 1

Посібник
для слухачів факультету довузівської підготовки
(російською мовою)

Упорядники: Михайленко Світлана Василівна
Свіщова Євгенія Віталіївна

Комп’ютерна верстка *А. Ю. Петрова*

Підписано до друку 03.10.2012. Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Гарнітура «Таймс».
Ум. друк. арк. 1,86. Обл.-вид. арк. 2,07.
Тираж 100 пр.

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво № 1153 від 16.12.2002.

Надруковано у видавництві
Народної української академії

Україна, 61000, Харків, МСП, вул. Лермонтовська, 27.