НАРОДНАЯ УКРАИНСКАЯ АКАДЕМИЯ

В. Г. Михайленко, Е. В. Свищева, А. Ю. Петрова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Издательство НУА

НАРОДНАЯ УКРАИНСКАЯ АКАДЕМИЯ

Серия «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ»

В. Г. Михайленко, Е. В. Свищева, А. Ю. Петрова

В Ы С Ш А Я   М А Т Е М А Т И К А

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й   А Н А Л И З

Учебное пособие
Для студентов экономических специальностей

Издание второе, исправленное и дополненное

Харьков
Издательство НУА
2017

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
М69

Утверждено на заседании
кафедры информационных технологий и математики.
Протокол № 4 от 3.04.2017

Р е ц е н з е н т *канд. физ.-мат. наук, доц. С. Б. Данилевич*

Посібник охоплює важливі розділи програми курсу вищої матема-тики для економістів: вступ до аналізу, диференційне числення функцій однієї і декількох змінних, інтегральне числення, диференційні рівняння та ряди. Видання призначено для студентів економічних спеціальностей, що вивчають математику як на денному, так і на заочному відділеннях. Це враховувалося під час викладення матеріалу: з цією метою розглянуто багато прикладів, що ілюструють викладений теоретичний матеріал і дають зразки розв'язання задач.

М69 **Михайленко, Виталий Григорьевич**
Высшая математика. Математический анализ : учеб. пособие для студентов экон. специальностей / В. Г. Михайленко, Е. В. Свищева, А. Ю. Петрова ; Нар. укр. акад., [каф. информ. технологий и математики]. – 2-е изд., испр. и доп. – Харьков : Изд-во НУА, 2017. – 156 с. – (Математика для экономистов).

Пособие охватывает важные разделы программы курса высшей математики для экономистов: введение в анализ, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных, интегральное исчисление, дифференциальные уравнения и ряды. Издание предназначено для студентов экономических специальностей, изучающих математику как на дневном, так и на заочном отделениях. Это учитывалось при изложении материала: с этой целью рассмотрено много примеров, иллюстрирующих изложенный теоретический материал и дающих образцы решения задач.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства.

Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одну из математических наук, и в том, что не имеет связи с математикой.

Леонардо да Винчи

Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит.

М. В. Ломоносов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика – самая древняя и в то же время самая современная из наук. Она стала складываться во втором тысячелетии до нашей эры, когда потребности землемерия, торговли и мореплавания заставили упорядочить приемы счета и измерения, начало которых уходит в еще более глубокую древность. Уже строители египетских пирамид владели математическими знаниями. Как наука математика оформилась в III в. до н. э. в бессмертных «Началах» Эвклида. По этой книге или по более доступным ее изложениям изучали геометрию более двух тысяч лет.

Значительный поворот в истории математики произошел в XVII в., когда Декарт создал аналитическую геометрию, а Ньютон и Лейбниц дифференциальное и интегральное исчисления. Бурное развитие математики, последовавшее за этими открытиями, привело на рубеже XIX–XX вв. к научной революции.

Математика неустанно развивается: создаются новые методы, появляются новые разделы. С появлением ЭВМ произошел большой качественный сдвиг с использованием математических методов. Они стали применяться не только там, где математика использовалась издавна (в механике, физике, астрономии и т. д.), но и в тех областях человеческого знания, где математика применялась либо совсем недавно и мало, либо ее применение не представлялось возможным (экономика, социология, лингвистика, медицина и т. п.). Пожалуй, наиболее значительным научным достижением было внедрение математических методов в экономическую науку и в управление экономическими процессами.

Следует отметить, что в математике справедливость рассматриваемого факта доказывается не проверкой его на ряде примеров, не проведением ряда экспериментов, что не имеет для математики доказательной силы, а чисто логическим путем, по законам формальной логики. Конечно, и эксперименты и примеры играют в математических исследованиях большую роль: они могут или дать иллюстрацию утверждения, или опровергнуть его, или натолкнуть на какую-либо идею.

Чтобы применять математику как метод исследования, важно осознать и хорошо усвоить сущность и взаимосвязь ее основных идей и понятий, овладеть процессом творческого, а не формального мышления.

Косвенная польза от изучения математики состоит в том, что оно (изучение) совершенствует культуру мышления, дисциплинирует его, приучает человека логически рассуждать, воспитывает точность и обстоятельность аргументации.

Умение логически мыслить, владение математическим аппаратом, правильное использование математики – все это дает в руки человеку мощный метод исследования.

Овладеть в достаточной мере математическим методом, культурой математического мышления – задача далеко не простая. Но для того, кто сумеет этого достичь, труд не пропадет зря. Важно отметить, что все это доступно каждому, кто хочет овладеть математикой, кто серьезно и последовательно займется ее изучением.

1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1.1. Вещественные числа и их основные свойства

Понятие вещественного (действительного) числа вводится в курсе элементарной (школьной) математики. Напомним некоторые основные сведения из области вещественных чисел.

Множество вещественных чисел состоит из рациональных и иррациональных. ***Рациональным*** называется число, которое можно представить в виде $\frac{p}{q}$, где p и q – целые числа, причем $q \neq 0$. ***Иррациональным*** называется всякое вещественное число, которое не является рациональным. Всякое рациональное число является либо целым, либо конечной или периодической бесконечной дробью. Иррациональное число представляется непериодической бесконечной десятичной дробью. Так, например, рациональные числа $\frac{2}{5}$ и $\frac{2}{3}$ можно представить в виде следующих десятичных дробей: $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots = 0{,}(6)$; иррациональные числа $\sqrt{2}$ и π – в виде непериодических бесконечных дробей:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots, \qquad \pi = 3{,}1415925\ldots$$

Для любой пары вещественных чисел a и b определяются, и притом единственным образом, два вещественных числа $a + b$ и $a \cdot b$, называемые соответственно их суммой и произведением. При этом, каковы бы ни были числа a, b и c, имеет место:

1) $a + b = b + a$;
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3) $a \cdot b = b \cdot a$;
4) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
5) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
6) существует единственное число 0, такое, что $a + 0 = a,\ a \cdot 0 = 0$;
7) для любого числа a существует такое число $(-a)$, называемое противоположным, что $a + (-a) = 0$; $(-(-a) = a)$;
8) существует единственное число 1 такое, что $1 \cdot a = a$, $(-1 \cdot a = -a)$;
9) для любого числа $a \neq 0$ существует такое число a^{-1}, называемое обратным, что $a \cdot a^{-1} = 1$ (число a^{-1} обозначается также символом $\frac{1}{a}$).

Число $a + (-b)$ называется разностью чисел a и b и обозначается $a - b$, в частности $(a - a = 0)$.

Число $a \cdot b^{-1}$ называется частным чисел a и b и обозначается $\frac{a}{b}$ или $a : b$. Если $a \neq 0$, то $\frac{a}{a} = 1$ и $\frac{0}{a} = 0$.

Для любых двух вещественных чисел a и b установлено одно из следующих отношений: $a = b,\ a > b$ или $b > a$. Каковы бы ни были числа a, b и c:

10) если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$;

11) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;

12) если $a > b$, то $a + c > b + c$.

Вместо $b > a$ пишут также $a < b$. Запись $a \geq b$ (или что то же самое, $b \leq a$) означает, что либо $a = b$, либо $a > b$. Соотношения $a < b,\ a \leq b,\ a > b$, $a \geq b$ называются неравенствами. Неравенства $a < b$ и $a > b$ называются строгими неравенствами;

13) если $a < b$, то $-a > -b$;

14) если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;

15) если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$;

16) если $a > 0$ и $b > 0$, или $a < 0$ и $b < 0$, то $a \cdot b > 0,\ \frac{a}{b} > 0$ и $\frac{b}{a} > 0$;

17) если $a > 0$ и $b < 0$, то $a \cdot b < 0,\ \frac{a}{b} < 0$ и $\frac{b}{a} < 0$;

18) если $a > 0$, то $a^{-1} > 0$ и $-a < 0$.

Абсолютной величиной (или ***модулем***) числа a называется само число a, если $a \geq 0$, и число $-a$, если $a < 0$. Абсолютная величина числа a обозначается символом $|a|$. Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}.$$

Абсолютная величина числа обладает следующими свойствами:

19) $|a| \geq 0$; 20) $|a| = |-a|$; 21) $-|a| \leq a \leq |a|$;

22) $|a \pm b| \leq |a| + |b|$; 23) $|a \pm b| \geq |a| - |b|$;

24) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; 25) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, если $b \neq 0$;

26) если ε – положительное число, то неравенства $|x| \leq \varepsilon$ и $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ равносильны;

27) решением уравнения $a + x = b$ является число $x = b - a$,

28) решением уравнения $a \cdot x = b$ $(a \neq 0)$ является число $x = \frac{b}{a}$.

Пусть даны два числа a и b, причем $a < b$. Множество всех чисел x, заключенных между числами a и b, т.е. удовлетворяющих неравенствам

$a < x < b$, называется ***интервалом*** (открытым интервалом) и обозначается (a,b), а сами числа a и b называются концами интервала (соответственно левым и правым концами интервала (a,b)). Если множество чисел, расположенных между a и b включает в себя и сами эти числа, т. е. $a \le x \le b$, то это множество называется отрезком (замкнутым интервалом) и обозначается $[a,b]$. Множества чисел, удовлетворяющих условиям $a \le x < b$ или $a < x \le b$, называются ***полуинтервалами*** и обозначаются соответственно $[a,b)$ и $(a,b]$. Множество чисел, удовлетворяющих неравенствам $x > a$ или $x \ge a$, обозначают соответственно $(a,\ +\infty)$ и $[a,\ +\infty)$. Обозначения $(-\infty,\ b)$ и $(-\infty,\ b]$ используются для множеств чисел, удовлетворяющих условиям $x < b$ и $x \le b$ соответственно. Множество всех вещественных чисел обозначается так : $-\infty < x < +\infty$ или $(-\infty, \infty)$.

Все эти множества называются также ***промежутками***. Промежутки $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b) называются конечными, остальные – бесконечными. Каждому вещественному числу x соответствует некоторая точка на числовой оси (координата прямой). Каждой точке числовой оси соответствует некоторое вещественное число x – ее координата.

Числовым промежуткам соответствуют промежутки на координатной прямой. Изображением множества $(-\infty, \infty)$ всех чисел служит вся координатная прямая. (Поэтому множество $(-\infty, \infty)$ называется также числовой прямой, а любое число – точкой этой прямой).

Пусть a – произвольная точка числовой оси, а ε – любое положительное число. Интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ называется ***ε-окрестностью точки*** a. Этот интервал может быть записан следующим образом: $|x-a| < \varepsilon$.

1.2. Функциональная зависимость

Переменной величиной называется величина, которая принимает различные численные значения. Величина, численные значения которой не меняются, называется ***постоянной величиной*** (или ***константой***).

Если каждому значению переменной x, принадлежащему некоторому интервалу, соответствует одно определенное значение другой переменной y, то говорят, что y ***есть функция от*** x, и символически это записывают так:

$$y = f(x) \text{ (или } y = y(x),\ y = \varphi(x), \ldots),$$

при этом переменная x называется ***независимой переменной*** или ***аргументом***. Соотношение между переменными x и y называется ***функциональной зависимостью***. Буква f в символической записи функциональной зависимости $y = f(x)$ указывает, что над значением x нужно произвести какие-то операции, чтобы получить значение y. Запись $y = C$, где C – постоянная (C = *const*), обозначает функцию, значение которой при любом значении x одно и то же и равно C.

Множество значений x, для которых определяются значения функции y в силу правила $f(x)$, называется ***областью определения функции***. Так, например, функция $y = 2x + 6$ определена при всех значениях x, т. е. ее областью определения будет интервал $(-\infty, \infty)$; функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ определена только для тех x, для которых $1 - x^2 \geq 0$, т. е. областью определения этой функции будет интервал $[-1, 1]$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек плоскости $x0y$, координаты которых удовлетворяют условию $y = f(x)$, то есть множество точек плоскости с координатами $(x, f(x))$.

Если функция $y = f(x)$ такова, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то такая функция называется ***возрастающей***. Если же большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то функция $y = f(x)$ называется ***убывающей***.

Функция $f(x)$ называется ***четной***, если $f(-x) = f(x)$, ***нечетной***, если $f(-x) = -f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат (оси $0y$), график нечетной функции – относительно начала координат.

Функция $f(x)$ называется ***периодической***, если существует положительное число T, такое, что в области определения функции выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$. Наименьшее положительное число τ, обладающее указанным свойством, называется ***основным периодом функции***.

Задать функцию $f(x)$ – значит указать, как по каждому значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции $f(x)$.

Функция может быть задана таблично, графически или аналитически.

При ***табличном*** способе задания функции выписываются в определенном порядке значения аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и соответствующие им значения функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Таковы, например, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и т. д.

При ***графическом*** способе задания функций в прямоугольной (или какой-либо другой) системе координат на плоскости, функциональная зависимость изображается линией, т. е. множеством точек плоскости, абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты – соответствующими значениями функции. (Эта линия называется ***графиком функции***).

При ***аналитическом*** способе задания функции функциональная зависимость записывается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Так, например, $y = 2x - 3$; $y = \sin x$; $y = sign\ x = \begin{cases} -1, & \text{при} \quad x < 0 \\ 0, & \text{при} \quad x = 0 \\ 1, & \text{при} \quad x > 0 \end{cases}$.

Если переменная величина y зависит от переменной величины u, которая сама является функцией от x, то y называется ***сложной функцией*** от x, или ***суперпозицией*** функций. Сложную функцию обозначают так: $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, или $y = f[\varphi(x)]$.

При этом u называется ***промежуточным аргументом***, а x- ***конечным***. Так, например, функция $y = \log_3^2(x+2)$ является сложной. Ее можно записать так: $y = u^2$, где $u = \log_3(x+2)$.

Постоянная функция $f(x) = C$ $(C = const)$, степенная функция x^α (α - любое число), показательная функция $a^x (0 < a \neq 1)$, логарифмическая функция $\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$, тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$, $ctg\, x$ и обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctg\, x$, $arcctg\, x$ называются ***основными*** (***простейшими***) ***элементарными функциями***.

Функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий над основными элементарными функциями, а также суперпозиций этих функций, называются ***элементарными***.

Так, например, функции $f(x) = x^2 - 3x + 4$; $f(x) = \sin 2x + 3^x \cos x$; $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$; $f(x) = \log_a tgx$ и т. д. являются элементарными.

Элементарная функция вида $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - постоянные числа, а n - целое неотрицательное число, называется ***целой рациональной функцией***, или ***многочленом степени*** n. Многочлен первой степени называется также линейной функцией.

Пусть $y = f(x)$ – некоторая функция. Здесь x – аргумент, а y – функция. Если в этой зависимости между x и y считать y – независимой переменной, а x – зависимой переменной, т. е. $x = \varphi(y)$, то эта функция называется ***обратной*** к функции $y = f(x)$. При этом, очевидно, имеет место $y = f(x) = f\big(\varphi(y)\big)$. Функцию, обратную к функции $y = f(x)$, часто обозначают так: $x = f^{-1}(y)$.

Если функция задана уравнением вида $y = f(x)$, то она называется ***явной***. Функция, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, неразрешенным относительно y, называется ***неявной***.

Так, например, $y = 2x$, $y = tg\, x$, $y = \lg x$ – явные функции, а $2x + 5y - 1 = 0$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy + x\sin y - 5 = 0$ – неявные.

Пусть даны два уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Тогда каждому значению t соответствуют определенные значения x и y. В этом случае говорят, что функция задана ***параметрически***, а t называют ***параметром***. Чтобы получить непосредственную зависимость y от x, необходимо из уравнений исключить параметр t. Если предположить, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \phi(x)$, то очевидно, что $y = \psi[\phi(x)]$.

Некоторые функциональные зависимости, используемые в экономике:

1) функция спроса – зависимость спроса y на некоторый товар от его цены x;

2) функция предложения – зависимость предложения y некоторого товара от его цены x;

3) функция полезности – субъективная числовая оценка индивидом полезности y количества x товара для него;

4) однофакторная производственная функция – зависимость объема y выпускаемой продукции от объема перерабатываемого ресурса x;

5) функция издержек – зависимость издержек y на производство x единиц продукции;

6) налоговая ставка – зависимость налога y в процентах от величины дохода x.

Все эти функции, кроме последней, весьма трудно выразить аналитически (их находят путем кропотливого анализа). Последняя же функция обычно довольно хорошо известна всему обществу и утверждается законодательно.

1.3. Понятие предела

Пусть дана переменная величина x_n, которая принимает бесконечную последовательность значений

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, \qquad (1)$$

т. е. задан ***закон изменения переменной*** x_n. Это означает, что для любого натурального числа n можно указать соответствующее значение x_n, т. е. x_n задана как функция от n.

Число a называется ***пределом последовательности*** (1), или ***пределом переменной*** x_n, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что все значения переменной x_n, начиная с x_N, отличаются от a по абсолютной величине меньше, чем на ε.

Тот факт, что число a является пределом последовательности (1), или пределом переменной x_n, кратко записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{или } x_n \to a \text{ при } n \to \infty \qquad (2)$$

и читается: *предел* x_n *при* n*, стремящемся к бесконечности, равен* a*, или* x_n *стремится к* a. Здесь запись $n \to \infty$ означает, что n неограниченно возрастает. Таким образом, (2) означает, что для любого, наперед заданного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, зависящее от ε, т. е. $N = N(\varepsilon)$, что

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ для всех } n \geq N. \qquad (3)$$

Пример. Переменная величина x_n принимает значения

$$x_1 = 2,\ \ x_2 = \frac{3}{2},\ \ x_3 = \frac{4}{3},\ \dots,\ \ x_n = \frac{n+1}{n},\ \ \dots,$$

т. е. закон изменения переменной величины x_n такой: $x_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Покажем, что эта переменная величина x_n имеет предел, равный единице. Для этого выберем произвольное сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $|x_n - 1|$. Так как $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$, то для всех $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ будем иметь: $|x_n - 1| = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$, но это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Если переменная величина x_n стремится к своему пределу a, оставаясь меньше его, то условно пишут $x_n \to a - 0$, или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a - 0$. Если же переменная величина x_n стремится к своему пределу a, оставаясь больше его, тогда условно пишут $x_n \to a + 0$, или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a + 0$.

Так, в рассмотренном выше примере $x_n \to 1 + 0$. Нетрудно проверить, что для переменной $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 - 0$. Переменная $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ стремится к нулю, принимая поочередно значения то больше, то меньше нуля.

Не следует думать, что каждая переменная величина имеет предел. Рассмотрим, например, переменную величину x_n, заданную следующим законом изменения: $x_n = (-1)^n$. Очевидно, что переменная величина x_n принимает следующие значения:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = 1, \ldots,\ x_n = (-1)^n,\ \ldots .$$

Не трудно показать, что данная переменная величина предела не имеет.

Т е о р е м а 1. Переменная величина x_n может иметь только один предел.

Доказательство. Предположим, что переменная x_n имеет два различных предела, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $(a \neq b)$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства:

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{для всех } n \geq N_1(\varepsilon),$$

$$|x_n - b| < \varepsilon \quad \text{для всех } n \geq N_2(\varepsilon).$$

Возьмем в качестве ε какое-либо число, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \cdot |a - b|$, и из чисел $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$ выберем большее, которое обозначим через $N(\varepsilon)$. Тогда $|x_n - a| < \varepsilon$ и $|x_n - b| < \varepsilon$ для всех $n \geq N(\varepsilon)$. Из этих неравенств и свойств абсолютной величины числа получаем, что для всех $n \geq N(\varepsilon)$

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |a - x_n| + |x_n - b| = |x_n - a| + |x_n - b| < 2\varepsilon .$$

Так как $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \cdot |a - b|$, то последнее неравенство лишено смысла, так как оно означает, что $|a - b| < |a - b|$.

Значит, мы пришли к противоречию, предположив, что $a \neq b$. Следовательно, $a = b$ и, тем самым, теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Предел постоянной C равен самой постоянной

$$\lim_{n\to\infty} C = C .$$

Рассмотрим *г е о м е т р и ч е с к у ю и н т е р п р е т а ц и ю* предела переменной.

Пусть задана переменная величина x_n такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Значит, согласно (3), для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N(\varepsilon)$, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N(\varepsilon)$. Это означает, что для всех $n \geq N$ имеет место $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, т. е. все значения величины x_n, начиная с x_N, находятся внутри интервала (a-ε, a+ε). Таким образом, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то геометрически это означает, что при любом $\varepsilon > 0$ все значения x_n, начиная с x_N, находятся внутри ε-окрестности точки a, т. е. вне любой ε-окрестности точки a находится лишь конечное число значений переменной x_n. В частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a - 0$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a + 0$), то, начиная с $n \geq N(\varepsilon)$, все значения переменной находятся на интервале (a-ε, a) ((a, $a+\varepsilon$)).

Переменную величину x_n называют ***бесконечно малой***, если ее предел равен нулю, т. е., если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ $(x_n \to 0)$. Так, например, величины $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ при $n \to \infty$ являются бесконечно малыми величинами, ибо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, согласно (3) означает, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $N(\varepsilon)$, что

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \text{ для всех } n \geq N(\varepsilon), \tag{4}$$

т. е. бесконечно малая величина неограниченно приближается к нулю.

Нетрудно видеть, что если величина x_n имеет пределом число a, то величина $\alpha_n = x_n - a$ будет бесконечно малой.

Действительно, согласно (3), для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N(\varepsilon)$, а это и означает, что $x_n - a$ – бесконечно малая.

Значит, величина x_n, имеющая пределом число a, представима в виде

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{5}$$

где α_n - бесконечно малая. Очевидно и обратное, если переменная величина x_n представима в виде (5), то она имеет предел, равный a.

Таким образом, доказана следующая

<u>**Теорема 2.**</u> Чтобы переменная x_n имела предел, равный a, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (5), где α_n - бесконечно малая.

В дальнейшем бесконечно малые величины будем обозначать так: α_n, β_n, γ_n.

<u>**Теорема 3.**</u> Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

<u>Доказательство.</u> Для удобства рассмотрим сумму двух бесконечно малых α_n и β_n. Обозначим $\alpha_n + \beta_n = \gamma_n$. Согласно (4), для любого $\varepsilon > 0$,

найдутся такие $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$, что $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n \geq N_1(\varepsilon)$ и $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n \geq N_2(\varepsilon)$. Из чисел $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$ выберем большее, которое обозначим через $N(\varepsilon)$. Тогда $|\gamma_n| = |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ для всех $n \geq N(\varepsilon)$. Но, в силу (4), это означает, что $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ есть величина бесконечно малая. Таким образом, теорема 3 доказана для суммы двух бесконечно малых величин.

Аналогично она доказывается и в случае алгебраической суммы любого конечного числа бесконечно малых. Из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие. Если $x_n \to a$ и $y_n \to a$, то $x_n - y_n$ есть величина бесконечно малая.

Действительно, согласно теореме 2, $x_n = a + \alpha_n$ и $y_n = a + \beta_n$, где α_n и β_n - бесконечно малые. Поэтому $x_n - y_n = \alpha_n - \beta_n$. Согласно теореме 3, величина $\alpha_n - \beta_n$ – бесконечно малая.

Говорят, что переменная x_n ***стремится к бесконечности*** и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $x_n \to \infty$, если для любого наперед заданного сколь угодно большого положительного числа А можно указать такое число N (А), что для всех $n > N$ (А), значения x_n будут удовлетворять неравенству $|x_n| > A$. Такую переменную величину называют ***бесконечно большой***. Так, например, величины n, n^3, 2^n, $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ при $n \to \infty$ являются бесконечно большими.

Говорят, что переменная x_n стремится к плюс (минус) бесконечности и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $x_n \to +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ или $x_n \to -\infty$), если для любого наперед заданного сколь угодно большого положительного числа A можно указать такое число N (A), что для всех $n \geq N(A)$, значения x_n будут удовлетворять неравенству $x_n > A$ ($x_n < -A$).

Заметим, что величина $\frac{1}{x_n}$, обратная бесконечно большой x_n является бесконечно малой; а величина $\frac{1}{\alpha_n}$, обратная бесконечно малой α_n, является бесконечно большой.

Переменная величина x_n называется ***ограниченной***, если существует число $A > 0$ такое, что $|x_n| \leq A$, т. е. если все значения переменной x_n находятся на некотором конечном интервале [$-A$, A].

Если же все значения переменной x_n больше (меньше) некоторого числа A_1, то о такой переменной величине говорят, что она ***ограничена снизу (сверху)***.

Теорема 4. Переменная величина, имеющая конечный предел, является ограниченной.

Теорема 5. Если значения переменной x_n не равны нулю, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$, то $\dfrac{1}{x_n}$ есть величина ограниченная.

Приводить доказательства этих теорем не будем.

Таким образом, переменная величина x_n может быть одного из следующих видов:

1) ограниченная и имеющая предел (в частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то x_n – бесконечно малая);

2) ограниченная, но не имеющая предела (например, $x_n = (-1)^n$);

3) неограниченная и притом бесконечно большая ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$);

4) неограниченная, но не бесконечно большая. Примером такой величины может служить величина $x_n = n^{(-1)^n}$ ($x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = \frac{1}{3},\ x_4 = 4,\ x_5 = \frac{1}{5}, \ldots$). Предел этой величины не существует.

Теорема 6. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную величину есть величина бесконечно малая.

Доказательство. Пусть α_n – бесконечно малая, а x_n – ограниченная величина, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и $|x_n| < A$, где A – некоторое положительное число. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно (4), найдется такое $N(\varepsilon)$, что $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{A}$ для всех $n \geq N(\varepsilon)$. Поэтому $|x_n \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \dfrac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$ для всех $n \geq N(\varepsilon)$, т. е. $x_n \alpha_n$ есть величина бесконечно малая. Теорема 6 доказана.

Из этой теоремы вытекает, что:

1) произведение двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая;

2) произведение постоянной на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

Из теорем 3 и 6 следует, что ***сумма, разность и произведение двух бесконечно малых величин есть величины бесконечно малые***. Если же рассмотреть отношение бесконечно малых величин, то в общем случае о нем ничего определенного сказать нельзя. Как будет показано ниже, отношение двух бесконечно малых величин может быть и ограниченной, и бесконечно малой, и бесконечно большой величиной.

Бесконечно малые величины α_n и β_n называют ***бесконечно малыми одного порядка***, если предел их отношения равен конечному числу $A \neq 0$. В частном случае, когда $A = 1$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$, бесконечно малые величины α_n и β_n называют ***эквивалентными***.

Говорят, что бесконечно малая величина α_n ***более высокого порядка***, чем бесконечно малая β_n, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} = \infty$.

Например, бесконечно малые $\dfrac{1}{n^2}$ и $\dfrac{1}{3n^2}$ одного порядка, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n^2}{1/3n^2} = 3$; бесконечно малые $\dfrac{1}{n}$ и $\dfrac{1}{n+1}$ эквивалентные, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n}{1/n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right) = 1$; бесконечно малая $\dfrac{1}{n^2}$ более высокого порядка, чем бесконечно малая $\dfrac{1}{n}$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n^2}{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

1.4. Основные теоремы о пределах

Теорема 7. Предел алгебраической суммы конечного числа переменных равен алгебраической сумме их пределов, если пределы этих переменных существуют и конечны.

Теорема 8. Предел произведения двух переменных равен произведению пределов сомножителей (если пределы существуют и конечны).

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} (C \cdot x_n) = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где C – постоянная.

Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} (C\, x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = C \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Рассмотрим еще некоторые теоремы, доказательство которых приводить не будем.

Теорема 9. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ и y_n не принимает нулевых значений, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Теорема 10. Если переменная x_n заключена между двумя переменными y_n и z_n, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу.

Теорема 11. Если значения переменной величины, по крайней мере начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$ $(x_n \leq b)$, то и ее предел (если он существует) удовлетворяет неравенству $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geq b$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \leq b)$.

Говорят, что переменная x_n *возрастает и ограничена сверху* (*убывает и ограничена снизу*), если

а) $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$ $\quad (x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots)$;

б) существует такое число A, что $x_n < A$ $(x_n > A)$ для всех n.

Теорема 12 (достаточное условие существования предела). Если переменная x_n возрастает и ограничена сверху (убывает и ограничена снизу), то она имеет предел.

1.5. Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a (т. е. на некотором интервале, содержащем точку a); а $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ – произвольная бесконечная последовательность значений аргумента x, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad (x_n \neq a). \tag{6}$$

Последовательности (6) соответствует последовательность $y_n = f(x_n)$ значений функции

$$f(x_1),\ f(x_2), \ldots,\ f(x_n),\ \ldots . \tag{7}$$

Число b называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to a$ и обозначается $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, если для любой числовой последовательности $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$ значений аргумента x соответствующая последовательность (7) значений функции имеет пределом число b (предел функции по Гейне).

Из данного определения предела функции следует, что функция $f(x)$ в точке a может иметь только один предел. (Это вытекает из единственности предела последовательности $f(x_n)$).

Можно показать, что данное выше определение предела функции равносильно следующему (предел функции по Коши).

Число b называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to a$, если для любого наперед заданного как угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$, т. е. если существует такая δ – окрестность точки a, что все значения $f(x)$, соответствующие значениям аргумента x из этой окрестности (кроме, быть может, значения $f(a)$, отличаются от числа b менее, чем на заданное ε.

Число b, равное $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ ($\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$), называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** a ***слева (справа)*** или ***левым (правым) пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** a.

Левый и правый пределы называются ***односторонними пределами***. Для обозначения односторонних пределов используется следующая символика:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0), \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 13. Чтобы существовал предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали односторонние пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$ и эти пределы были равны: $f(a-0) = f(a+0)$.

Доказательство этой теоремы приводить не будем. (Желающим рекомендуется доказать теорему самостоятельно.)

Примеры.

1. Функция $f(x) = C$ имеет предел, равный С в каждой точке числовой прямой.

2. Функция $f(x) = x$ в любой точке x = a числовой прямой имеет предел, равный a.

3. Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ не имеет предела в точке x = 0. Действительно, так как $\operatorname{sign} x = -1$ для x < 0, то $f(-0) = -1$. Аналогично, из условия $\operatorname{sign} x = 1$ для x > 0, следует, что $f(+0) = 1$. Таким образом, у функции $\operatorname{sign} x$ в точке x = 0 не выполняется условие теоремы 13 ($f(-0) \neq f(+0)$). Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sign} x$ не существует.

В том случае, когда для любой последовательности $x_n \to a$ последовательность $|f(x_n)|$ стремится к бесконечности, говорят, что

пределом функции $y = f(x)$ ***при*** $x \to a$ ***является бесконечность*** и пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Так, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2}{x-1} = \infty$. Причем, $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{2}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{2}{x-1} = +\infty$.

Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, если для любого наперед заданного как угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число $A(\varepsilon)$, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $|x| > A(\varepsilon)$.

Так, например, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+2}{x} \right) = 1$.

Действительно, какое бы мы ни взяли $\varepsilon > 0$, неравенство $\left| \dfrac{x+2}{x} - 1 \right| < \varepsilon$, или равносильное ему неравенство $\left| \dfrac{2}{x} \right| < \varepsilon$, будет выполняться для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x| > \dfrac{2}{\varepsilon}$ (т. е. в качестве $A(\varepsilon)$ можно взять $\dfrac{2}{\varepsilon}$ или любое число, большее чем $\dfrac{2}{\varepsilon}$). Следовательно, согласно определению, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+2}{x} \right) = 1$.

Число b называется ***пределом (по Коши) функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A = A(\varepsilon) > 0$, что для всех $x > A$ ($x < -A$) справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение предела функции $f(x)$ при $x \to \infty$ $(x \to \pm\infty)$ по Гейне рекомендуется дать самостоятельно.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой при*** $x \to a$ ($x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ ($\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$).

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой при*** $x \to a$ ($x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$).

Бесконечно малые (бесконечно большие) при $x \to a$ или $x \to \infty$ функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ***эквивалентными*** при $x \to a$ или при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ или, соответственно, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Как будет показано ниже, эквивалентные функции широко используются при вычислении пределов.

Для предела функции имеют место теоремы, аналогичные теоремам о пределах переменных. В частности, имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 14. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке a пределы, соответственно равные b и c, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, а если $c \neq 0$, то и функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ имеют в точке a пределы, соответственно равные $b \pm c$, $b \cdot c$, $\dfrac{b}{c}$, т. е.

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a} f(x) g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \qquad (\lim_{x \to a} g(x) \neq 0).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательствам теорем 7-9.

Из теоремы 14 непосредственно вытекают следующие утверждения:

1) если существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, а C – любое число, то $\lim\limits_{x \to a} C \cdot f(x) = C \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

2) если k - любое целое число, то $\lim\limits_{x \to a} x^k = a^k$;

3) если $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, то

$$\lim_{x \to a} P_n(x) = a_0 + a_1 a + \ldots + a_n a^n = P_n(a);$$

4) если $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$ и $P_m(a) \neq 0$, то

$$\lim_{x \to a} R(x) = \lim_{x \to a} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \frac{P_n(a)}{P_m(a)} = R(a).$$

Т е о р е м а 15. Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и $g(x)$ в некоторой ε-окрестности точки a удовлетворяют условиям $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$, тогда, если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы в точке a и эти пределы равны, то функция $\varphi(x)$ в точке a тоже имеет предел и при этом

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

П р и м е р ы.

1. Найти $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+3}{3x-2}$.

<u>Решение</u>. Согласно теореме 14, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+3}{3x-2} = \dfrac{5}{1} = 5$.

2. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

<u>Решение</u>. Воспользоваться теоремой 14 нельзя, так как при $x = 2$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. В этом случае говорят, что при $x \to 2$ функция $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ представляет собой неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, а нахождение предела функции в этом случае называют ***раскрытием неопределенности вида*** $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители: $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}$.

Принимая во внимание, что при $x \to 2$ переменная x не принимает значений, равных 2, (т. е. $x \neq 2$), то $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \dfrac{x+2}{x-1}$.

Поэтому $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x-1} = 4$.

3. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+x}{2x^2+1}$.

<u>Решение</u>. В данном случае воспользоваться теоремой 14 тоже нельзя, так как при $x \to \infty$ и числитель и знаменатель неограниченно растут. В этом случае говорят, что при $x \to \infty$ функция представляет собой неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для нахождения предела (раскрытия

неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\frac{x^2+x}{2x^2+1} = \frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x^2}}.$$

Теперь $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{2x^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}.$

1.6. Замечательные пределы

Рассмотрим два часто встречающихся предела, которые в высшей математике принято называть «замечательными пределами».

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Из первого замечательного предела следует, что при $x \to 0$ бесконечно малые функции $\sin x$ и x - эквивалентные. Более того, если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1 \quad (y = \alpha(x)).$$

Таким образом, если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, то функции $\sin\alpha(x)$ и $\alpha(x)$ – эквивалентные.

Эквивалентные бесконечно малые функции широко используются на практике при раскрытии неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Пусть, например, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ - бесконечно малые функции при $x \to a$, причем $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные, т. е. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}$ и эти пределы равны:

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}.$$

Действительно, так как по условию существуют пределы $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}\cdot\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. При этом, с одной стороны $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}\cdot\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$; с другой стороны, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}\cdot\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\beta(x)}$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$. Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ бесконечно малые величины можно заменять эквивалентными им бесконечно малыми.

П р и м е р ы .

1. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

<u>Решение</u>. Так как $3x\to 0$ и $\sin 3x\to 0$ при $x\to 0$ и функции $\sin 3x$ и $3x$ при $x\to 0$ эквивалентные, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}=3$.

2. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^3-1)}{x^2-1}$.

<u>Решение</u>. При $x\to 1$ функции $\sin(x^3-1)$ и (x^3-1) являются эквивалентными бесконечно малыми. Поэтому

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^3-1)}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3}{2}.$$

3. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

<u>Решение</u>. Обозначим $\arcsin x=y$. Тогда $x=\sin y$. Из условия $x\to 0$ следует, что $y=\arcsin x\to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

Из этого примера следует, что при $x\to 0$ функции $\arcsin x$ и x - эквивалентные.

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$

где $e=2{,}7182818...$ - иррациональное число.

Второй замечательный предел может быть записан и в виде

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Отметим ряд важных фактов, связанных с этим пределом.

Показательную функцию e^x называют ***экспоненциальной***. Как будет видно в дальнейшем, эта функция играет в высшей математике очень важную роль.

Наиболее часто в высшей математике используются ***натуральные логарифмы*** – логарифмы по основанию e. Для натуральных логарифмов введено специальное обозначение – $\ln N$ $(\ln N=\log_e N)$.

Второй замечательный предел применяется для вычислений пределов функций вида $[U(x)]^{V(x)}$ в случае, когда $\lim\limits_{x\to a}U(X)=1$, а $\lim\limits_{x\to a}V(x)=\infty$. Вычисление таких пределов называют раскрытием неопределенностей вида (1^{∞}).

Примеры.

1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+48}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+48}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{48}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{48}=e\cdot 1=e.$$

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Очевидно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{1-x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+x-1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}\cdot\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right]^{\frac{2}{1-x}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1-x}}.$$

Принимая во внимание, что

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e \qquad \left(y=\frac{2x}{1-x}\right),$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1-x} = 2$, получаем : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^2.$

3. Определить величину A_n денежных накоплений через *n* лет от начального вклада A_0 при *p* процентах годовых и непрерывном начислении процентов.

Решение. Не трудно видеть, что величина A_n при начислении сложных процентов (один раз) в конце года составит $A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

$$\left(A_1 = A_0 + A_0\frac{p}{100} = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right),\right.$$

$$\left.A_2 = A_1 + A_1\frac{p}{100} = A_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,\ldots\right)$$

Если проценты начисляются равномерно *k* раз в году, то очевидно, $A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100к}\right)^{пк}$. Если же проценты начисляются непрерывно, т. е. если $к\to\infty$, то $A_n = \lim\limits_{k\to\infty} A_0\left(1+\frac{p}{100k}\right)^{nk} = A_0\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{p}{100k}\right)^{\frac{100k}{p}\cdot\frac{np}{100}} =$

$$= A_0\left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{p}{100k}\right)^{\frac{100k}{p}}\right]^{\frac{np}{100}} = A_0 e^{\frac{np}{100}}.$$

1.7. Непрерывность функции

Пусть точка a принадлежит области определения функции $f(x)$. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** a, если она имеет предел в этой точке и этот предел равен $f(a)$. Используя определение предела функции в точке a по Коши, непрерывность функции в точке a можно определить следующим образом.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Аналогично, используя определение предела функции в точке a по Гейне, можно дать определение непрерывности функции в точке a по Гейне.

Условие непрерывности функции $f(x)$ в точке a можно выразить следующим равенством: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, которому можно придать (учитывая, что $a = \lim\limits_{x \to a} x$) следующую форму: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x)$.

Условие непрерывности функции $f(x)$ в точке a может быть записано и следующим образом:

$$f(a - 0) = f(a + 0) = f(a)$$

(8)

Равенства (8) часто называют ***необходимым и достаточным условием непрерывности функции в точке*** a. Если учесть, что условие $x \to a$ равносильно условию $x - a \to 0$, то условие непрерывности функции в точке a можно записать так:

$$\lim_{x - a \to 0} \left[f(x) - f(a) \right] = 0.$$

Разность $x - a$ называется приращением аргумента и обозначается Δx, а разность $f(x) - f(a)$ – приращением функции, соответствующим приращению аргумента Δx, и обозначается Δy или Δf. Таким образом, $\Delta x = x - a$, $\Delta y = \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$.

В этих обозначениях условие непрерывности в точке a запишется в виде $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т. е. непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторого интервала, называется ***непрерывной на этом интервале***.

Примеры.

1. Покажем, что функция $y = x^2$ непрерывна в каждой точке $x = a$ числовой оси, т. е. на всей числовой оси. Для этого вычислим приращение этой функции $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = (a + \Delta x)^2 - a^2 = 2a\Delta x + (\Delta x)^2$. Очевидно, что при любом a $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, что и означает непрерывность функции $y = x^2$ в каждой точке числовой оси.

2. Покажем, что функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке $x = a$, $a \neq 0$. Действительно, $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = \frac{1}{a + \Delta x} - \frac{1}{a} = -\frac{\Delta x}{a(a + \Delta x)}$, поэтому при $a \neq 0$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** a ***справа*** (***слева***), если $f(a + 0) = f(a)$ ($f(a - 0) = f(a)$).

Используя определение правого (левого) предела функции в точке a по Гейне и по Коши, можно сформулировать определение непрерывности функции $f(x)$ в точке a справа (слева) по Гейне и по Коши. Рекомендуется это сделать самостоятельно.

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются ***точками разрыва этой функции***.

При этом подразумевается, что точка a либо принадлежит области определения функции, либо является предельной точкой этой области, т. е. любая ε-окрестность этой точки содержит отличные от a точки области определения функции.

Точки разрыва функции принято классифицировать следующим образом.

Устранимый разрыв. Точка a называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$, если предел функции в точке a существует, но в самой точке a функция $f(x)$ либо не определена, либо $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Другими словами, точка a называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$, если $f(a + 0) = f(a - 0) \neq f(a)$ или $f(a + 0) = f(a - 0)$, а $f(a)$ – не определено.

Так, например, функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{при } x \neq 1 \\ 1 & \text{при } x = 1 \end{cases}$

имеет в точке $x = 1$ устранимый разрыв.

Действительно, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2\neq f(1)=1$.

Если функция $f(x)$ имеет в точке a устранимый разрыв, то этот разрыв можно устранить, положив значение функции $f(x)$ в точке a равным ее предельному значению.

Разрыв первого рода. Точка a называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы: $f(a+0)\neq f(a-0)$. Часто разрыв первого рода называют скачком.

Примеры.

1. Функция $y=\operatorname{sign} x$ в точке $x=0$ имеет разрыв первого рода. Действительно, так как $\operatorname{sign} x=\begin{cases}1 & \text{при } x>0\\ 0 & \text{при } x=0\\ -1 & \text{при } x<0\end{cases}$, то $\operatorname{sign}(+0)=1$, $\operatorname{sign}(-0)=-1$ и, следовательно, $\operatorname{sign}(+0)\neq\operatorname{sign}(-0)$.

2. Функция $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$ определена всюду, кроме точки $x=0$. Покажем, что в этой точке у нее разрыв первого рода. Очевидно, что при $x\to+0$ функция $2^{1/x}$, а следовательно, и функция $1+2^{1/x}$ являются бесконечно большими. Поэтому $f(x)$ при $x\to+0$ – бесконечно малая, т. е. $f(+0)=0$. Если же $x\to-0$, то функция $2^{1/x}$ является бесконечно малой и поэтому $f(-0)=1$.

Разрыв второго рода. Точка a называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов, или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

Примеры.

1. Функция $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ в точке $x=1$ имеет разрыв второго рода, так как $f(1+0)=+\infty$, $f(1-0)=-\infty$.

2. Функция $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ в точке $x=0$ имеет разрыв второго рода, так как в точке $x=0$ у нее не существует ни правого, ни левого пределов. Покажите это самостоятельно.

Рассмотрим некоторые свойства непрерывных функций.

Теорема 16. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $Cf(x)$ (C – постоянная), $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, а если, кроме того $g(a) \neq 0$, то и функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывны в точке a.

Доказательство этой теоремы вытекает непосредственно из определения непрерывности и свойств пределов функций.

Следствие. Если функции $f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)$ непрерывны в точке a, то функции $f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_k(x)$ и $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot ... \cdot f_k(x)$ также непрерывны в точке a.

Теорема 17. Пусть функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = \varphi(x_0)$, тогда сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

При отыскании пределов теорему 17 удобно использовать в виде правила замены переменной для пределов непрерывных функций:

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y), \quad y_0 = \varphi(x_0).$$

Теорема 18. Каждая основная элементарная функция непрерывна в любой точке своей области определения.

Доказательства этих теорем приводить не будем.

Из теорем 17 и 18 следует, что если $f(x)$ – основная элементарная функция, или элементарная функция (т. е. функция, составленная из основных элементарных функций) и a – произвольная точка из области ее определения, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = f(\lim_{x \to a} x) \qquad (9)$$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x+2} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 2}(x+2)} = \sqrt{2+2} = 2$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = \cos\left[\lim\limits_{x \to 0}(2x + \frac{\pi}{2})\right] = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

3. $\lim\limits_{x \to 1} 2^{x^2-1} = 2^{\lim\limits_{x \to 1}(x^2-1)} = 2^0 = 1$.

4. $\lim\limits_{x \to -2} \lg(2 + 2x + x^2 - x^3) = \lg\left[\lim\limits_{x \to -2}(2 + 2x + x^2 - x^3)\right] = \lg 10 = 1$.

Перечислим, не доказывая, основные свойства функций, непрерывных на замкнутом интервале.

Теорема 19. Непрерывная на замкнутом интервале функция $y = f(x)$ ограничена на этом интервале, т. е. существует такое положительное число A, что для всех значений x на этом интервале $|f(x)| < A$.

<u>**Т е о р е м а 2 0 .**</u> Непрерывная на замкнутом интервале функция принимает, по крайней мере в одной его точке, наибольшее значение и, по крайней мере в одной его точке – наименьшее.

Заметим, что наибольшим (наименьшим) значением функции на интервале называется такое ее значение $f(x_0)$, что для всех точек x интервала выполняется неравенство

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)).$$

<u>**Т е о р е м а 2 1**</u>. Непрерывная на замкнутом интервале функция принимает на этом интервале все промежуточные значения между своими наибольшим и наименьшим значениями.

<u>**Т е о р е м а 2 2 .**</u> Непрерывная на замкнутом интервале функция, принимающая на концах этого интервала значения противоположных знаков, по крайней мере, в одной точке этого интервала обращается в нуль.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1. Производная

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a,b), x – фиксированная точка этого интервала, Δx – приращение аргумента такое, что точка $x + \Delta x$ принадлежит интервалу (a,b).

Считая, что $\Delta x \neq 0$, рассмотрим в данной фиксированной точке x отношение приращения Δy функции $y = f(x)$ в этой точке к приращению аргумента Δx:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Это отношение называют ***разностным отношением*** (в данной точке x). Очевидно, что разностное отношение представляет собой функцию от Δx.

Если существует предел разностного отношения при $\Delta x \to 0$, то этот предел называется ***производной функции*** $y = f(x)$ ***в данной точке*** x и обозначается символом $f'(x)$. Кроме обозначения $f'(x)$ для производной употребляются также следующие обозначения: y', $y'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$ (читается: де игрек по де икс).

Таким образом, по определению,

$$y' = y'(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (10)$$

Если функция $y = f(x)$ имеет производную во всех точках интервала (a,b), то эта производная представляет собой некоторую функцию аргумента x, определенную на интервале (a,b).

Значение производной в точке $x = x_0$ обозначают так: $f'(x_0)$ или $y'\big|_{x=x_0}$.

Нахождение производной функции называется ***дифференцированием*** этой ***функции***.

Если функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет производную, то $f(x)$ называется ***дифференцируемой функцией*** в точке x_0. Функция, дифференцируемая в каждой точке интервала (a,b), называется ***дифференцируемой на интервале*** (a,b).

Примеры. Найти производные функций (продифференцировать функции).

1. $f(x) = C = \text{const}$.

Очевидно, что $C' = 0$, так как приращение $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = 0$ для всех x и всех Δx.

2. $f(x) = x$.

Для этой функции разностное отношение равно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = 1.$$

Следовательно, $x' = 1$ в любой точке $x \in (-\infty, \infty)$.

3. $f(x) = \sin x$.

Так как для этой функции $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$, то при любом $\Delta x \neq 0$ разностное отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos(x+\frac{\Delta x}{2})$.

Поэтому $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right) \cdot \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right]$, откуда, учитывая непрерывность функции $\cos x$ в любой точке $x \in (-\infty, +\infty)$ и первый замечательный предел, получаем:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

4. $f(x) = \cos x$.

Аналогично предыдущему:

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x.$$

Таким образом, $(\cos x)' = -\sin x$.

5. $f(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$, $x > 0$.

В этом случае для любого достаточно малого $\Delta x \neq 0$ будем иметь:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) =$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Поэтому, учитывая непрерывность $\log_a x$, ($0<a\neq 1,\ x>0$) и второй замечательный предел, получаем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$

Следовательно, $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

В частности, если $a=e$, получаем $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ (для любого $x>0$).

В полной аналогии с понятием правого и левого пределов функции в данной точке вводятся понятия правой и левой производных функций $y=f(x)$ в точке.

Правой (левой) производной функции $y=f(x)$ в данной фиксированной точке x называется правый (левый) предел разностного отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (при условии, что этот предел существует).

Для обозначения *правой* производной функции в точке x используют символ $f'(x+0)$. Для обозначения *левой* производной функции в точке x используют символ $f'(x-0)$.

Правая и левая производные называются ***односторонними производными***.

Из свойств односторонних пределов вытекают следующие утверждения:

1) если функция $f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x)$, то эта функция имеет в точке x как правую, так и левую производные, причем $f'(x+0)=f'(x-0)=f'(x)$;

2) если функция $f(x)$ имеет в точке x как правую, так и левую производные, причем $f'(x+0)=f'(x-0)$, то функция $f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x)$, причем $f'(x)=f'(x+0)=f'(x-0)$.

В дополнение к утверждению 2 следует отметить, что если у функции $f(x)$ существуют правая и левая производные в точке x, но $f'(x+0)\neq f'(x-0)$, то у этой функции не существует производной в точке x. Простейшим примером такой функции может служить функция $f(x)=|x|$. Эта функция в точке $x=0$ имеет как левую, так и правую производные: $f'(-0)=-1$, $f'(+0)=1$, но не имеет производной в точке $x=0$.

Теорема 23. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство. Согласно определению производной, имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$. Тогда по свойству пределов имеет место равенство $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Из этого равенства следует, что $\Delta y = y'\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. Правая часть есть сумма двух бесконечных малых, поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$,

а это есть условие непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x.

Доказанная теорема является ***необходимым условием дифференцируемости функции***.

Утверждение, обратное утверждению теоремы 23, не справедливо, т. е. из непрерывности функции $y = f(x)$ в данной точке x, вообще говоря, не вытекает дифференцируемость функции $f(x)$ в этой точке. Для примера можно рассмотреть функцию $y = |x|$, которая непрерывна в точке $x = 0$, но, как показывалось выше, в этой точке не имеет производной.

2.2. Геометрический, механический и экономический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, определенной и непрерывной на интервале (a,b) (рис. 1). Возьмем произвольную точку $x \in (a,b)$ и приращение $\Delta x \neq 0$ такое, что точка $x + \Delta x \in (a,b)$. Пусть A и B – точки графика функции $y = f(x)$, абсциссы которых соответственно равны x и $x + \Delta x$. Очевидно, что координаты точек A и B будут следующие: $A(x, f(x))$, $B(x + \Delta x,\ f(x + \Delta x))$. Прямую, проходящую через точки A и B графика функции, называют секущей. Поскольку точка $x \in (a,b)$ произвольная, но фиксированная, то угол наклона секущей к оси $0x$ зависит от Δx. Обозначим его символом $\varphi(\Delta x)$.

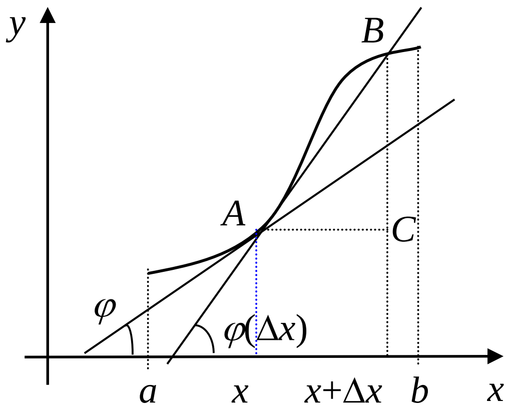

Рис. 1

Если существует предельное положение секущей AB при стремлении точки B графика функции к точке A (или, что то же самое, при стремлении Δx к нулю), то это предельное положение называется ***касательной*** к графику функции $y = f(x)$ в точке A.

Из этого определения следует, что для существования касательной к графику $y = f(x)$ в точке А достаточно, чтобы существовал предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi$, причем указанный предел φ будет равен углу наклона касательной к оси $0x$.

Нетрудно видеть, что если функция $y = f(x)$ имеет в данной точке x производную, то существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $A(x, f(x))$, причем угловой коэффициент этой касательной (т. е. тангенс угла наклона ее к оси $0x$) равен производной $f'(x)$. Действительно (из треугольника ABC),

$$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x) = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ откуда } \varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{и } \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \operatorname{arctg} f'(x);$$

но это и означает, что существует предельное положение секущей, т. е. существует касательная к графику функции в точке $A(x, f(x))$, причем угол наклона φ этой касательной к оси $0x$ равен $\varphi = \operatorname{arctg} f'(x)$. Значит, угловой коэффициент касательной ($\operatorname{tg}\varphi$) равен $f'(x)$.

Таким образом, если функция $y = f(x)$ в точке x_0 дифференцируема и $f(x_0) = y_0$, то угловым коэффициентом касательной будет $k_0 = f'(x_0)$, а уравнением касательной к кривой в точке (x_0, y_0) будет $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Пример. Написать уравнения касательной к кривой $y = \ln x$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Определяем угловой коэффициент касательной:

$$\kappa_0 = f'(x_0) = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = 1.$$

Так как $x_0 = 1$, то $y_0 = \ln x_0 = \ln 1 = 0$.

Уравнение касательной в точке (1; 0): $y = x - 1$.

Замечание. В точке $A(x_0, f(x_0))$ существует вертикальная касательная к графику функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда в точке x_0 функция имеет бесконечную производную, причем в этом случае уравнение касательной имеет вид $x = x_0$.

Рассмотрим ***механический*** смысл производной.

Пусть $S = S(t)$ – закон движения материальной точки, которая движется прямолинейно; S – длина пути, отсчитываемая от некоторой начальной точки A_0; t – время, за которое пройден путь S (рис. 2). Пусть А –

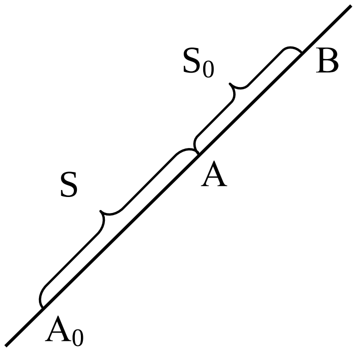

Рис. 2

положение точки в момент времени t; В – в момент времени $t+\Delta t$; ΔS – расстояние между точками А и В, т. е. $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$. Тогда $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ – то, что в механике называют величиной ***средней скорости*** движения на участке от А до В, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = V$ – величина скорости движения в точке или, как говорят в механике, величина мгновенной скорости в момент времени t, т. е. $V = S'(t)$.

Рассмотрим теперь ***экономический*** смысл производной.

Пусть функция $U = U(t)$ выражает количество произведенной продукции за время t. Тогда за период времени от t до $t+\Delta t$ количество произведенной продукции составит $\Delta U = U(t+\Delta t) - U(t)$, а средняя производительность труда за этот период определяется как $\dfrac{\Delta U}{\Delta t}$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta U}{\Delta t} = U'(t)$ представляет собой производительность труда в момент времени t.

Таким образом, производная $U'(t)$ объема произведенной продукции $U(t)$ есть производительность труда в момент времени t.

В экономических исследованиях широко используется понятие ***эластичности***, которое связано с тем, что в экономических задачах часто удобнее вычислять в процентах изменение зависимой переменной (функции), соответствующее изменению независимой переменной (аргумента) на один процент.

Эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительного приращения $\dfrac{\Delta y}{y}$ функции y к относительному приращению $\dfrac{\Delta x}{x}$ аргумента x при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{y} : \dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{x}{y} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Эластичность функции $y = f(x)$ символически обозначают так: $E_x(y)$. Таким образом, если $y = f(x)$ дифференцируемая функция, то

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Очевидно, эластичность – безразмерная величина, значения которой не зависят от того, в каких единицах измерялись величины x и y.

Эластичность функции используется при анализе спроса и предложения. Так, эластичность спроса y относительно цены x показывает приближенно на сколько процентов изменится спрос при изменении цены на один процент.

2.3. Основные свойства производной

Теорема 24. Если каждая из функций $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируема в точке x, то алгебраическая сумма этих функций $U(x) \pm V(x)$ также дифференцируема в этой точке, при этом

$$\left[U(x) \pm V(x)\right]' = U'(x) \pm V'(x).$$

Доказательство. Пусть $y(x) = U(x) \pm V(x)$. Дадим аргументу приращение Δx. Тогда функции $U(x)$ и $V(x)$ получат приращения соответственно $\Delta U = U(x+\Delta x) - U(x)$ и $\Delta V = V(x+\Delta x) - V(x)$. Из этих равенств получаем: $U(x+\Delta x) = U(x) + \Delta U$, $V(x+\Delta x) = V(x) + \Delta V$. Поэтому

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \left[U(x+\Delta x) \pm V(x+\Delta x)\right] - \left[U(x) \pm V(x)\right] =$$
$$= \left[U(x) + \Delta U\right] \pm \left[V(x) + \Delta V\right] - \left[U(x) \pm V(x)\right] = \Delta U \pm \Delta V.$$

Таким образом, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta U}{\Delta x} \pm \dfrac{\Delta V}{\Delta x}$. Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$. Учитывая, что

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta U}{\Delta x} \pm \frac{\Delta V}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x} = U'(x) \pm V'(x),$$

приходим к заключению, что существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$, и при этом $y'(x) = \left[U(x) \pm V(x)\right]' = U'(x) \pm V'(x)$. Теорема доказана.

Следствие (из теоремы 24). Теорема 24 справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций, дифференцируемых в данной точке x.

Пример. $y = x + \sin x + \ln x$, $y' = 1 + \cos x + \dfrac{1}{x}$.

Теорема 25. Если каждая из функций $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируема в данной точке x, то произведение этих функций $U(x) \cdot V(x)$ также дифференцируемо в этой точке и при этом

$$\left[U(x) \cdot V(x)\right]' = U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x).$$

Доказательство. Пусть $y(x)=U(x)\cdot V(x)$. Рассуждая, как и при доказательстве предыдущей теоремы, будем иметь:

$$\Delta y=\left[U(x)+\Delta U\right]\cdot\left[V(x)+\Delta V\right]-U(x)\cdot V(x)=V(x)\Delta U+U(x)\Delta V+\Delta U\Delta V.$$

Таким образом, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=V(x)\dfrac{\Delta U}{\Delta x}+U(x)\dfrac{\Delta V}{\Delta x}+\Delta U\dfrac{\Delta V}{\Delta x}$.

Из дифференцируемости функций $U(x)$ и $V(x)$ и свойств пределов следует, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[V(x)\frac{\Delta U}{\Delta x}+U(x)\frac{\Delta V}{\Delta x}+\Delta U\frac{\Delta V}{\Delta x}\right]=V(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x}+$$

$$+U(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta U\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=V(x)U'(x)+U(x)V'(x).$$

Следовательно, существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x)$, и при этом

$y'(x)=U'(x)\cdot V(x)+U(x)\cdot V'(x)$. Теорема доказана.

Следствие (из теоремы 25). Если функция $U(x)$ дифференцируема в точке x, а $C=\text{const}$, то $\left[CU(x)\right]'=CU'(x)$, т. е. постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Пример. $y=2x\ln x$

$$y'=2\left[(x)'\ln x+x(\ln x)'\right]=2\left[\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right]=2(\ln x+1).$$

Теорема 26. Если каждая из функций $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируема в данной точке x и $V(x)\neq 0$, то частное этих функций $\dfrac{U(x)}{V(x)}$ также дифференцируемо в этой точке, при этом

$$\left[\frac{U(x)}{V(x)}\right]'=\frac{U'(x)V(x)-U(x)V'(x)}{V^2(x)}.$$

Доказательство. Пусть $y=\dfrac{U(x)}{V(x)}$. Тогда, аналогично предыдущему, будем иметь:

$$\Delta y=\frac{U(x+\Delta x)}{V(x+\Delta x)}-\frac{U(x)}{V(x)}=\frac{U(x)+\Delta U}{V(x)+\Delta V}-\frac{U(x)}{V(x)}=\frac{V(x)\cdot\Delta U-U(x)\cdot\Delta V}{\left[V(x)+\Delta V\right]\cdot V(x)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{V(x)\dfrac{\Delta U}{\Delta x}-U(x)\dfrac{\Delta V}{\Delta x}}{\left[V(x)+\Delta V\right]\cdot V(x)},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V(x)\dfrac{\Delta U}{\Delta x}-U(x)\dfrac{\Delta V}{\Delta x}}{\left[V(x)+\Delta V\right]\cdot V(x)}=\frac{V(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta U}{\Delta x}-U(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta V}{\Delta x}}{V(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[V(x)+\Delta V\right]}=$$

$=\dfrac{U'(x)V(x)-U(x)V'(x)}{V^2(x)}$. Следовательно, существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x)$.

При этом $y'(x)=\dfrac{U'(x)\cdot V(x)-U(x)\cdot V'(x)}{V^2(x)}$. Теорема доказана.

Примеры.

1. Производная функции $y=\operatorname{tg}x$.

Так как $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, то по теореме 26 будем иметь:

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. Производная функции $y=\operatorname{ctg}x$. Аналогично предыдущему имеем:

$$(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

<u>**Теорема 27**</u>. Если функция $U = U(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $y=f(U)$ дифференцируема в соответствующей точке $U = U(x)$, то сложная функция $y=f(U(x))$ дифференцируема в точке x, причем $y'=f'_U(U)\cdot U'_x(x)$.

<u>Доказательство</u>. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда получим: $\Delta U=U(x+\Delta x)-U(x)$ и $\Delta y=f(U+\Delta U)-f(U)$. Поскольку функция $y=f(U)$ дифференцируема в точке $U = U(x)$, то в этой точке $\Delta y=f'_U\Delta U+\alpha(\Delta U)\Delta U$, где $\alpha(\Delta U)\to 0$ при $\Delta U\to 0$, и поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_U(U)\cdot\frac{\Delta U}{\Delta x}+\alpha(\Delta U)\frac{\Delta U}{\Delta x}.$$

Принимая во внимание то, что в силу дифференцируемости функции $U = U(x)$ в точке x из условия $\Delta x\to 0$ следует, что $\Delta U\to 0$ и $\dfrac{\Delta U}{\Delta x}\to U'_x(x)$, получаем:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f_U{}'(U)\cdot\frac{\Delta U}{\Delta x}+\alpha(\Delta U)\cdot\frac{\Delta U}{\Delta x}\right]=f_U{}'(U)\cdot U_x{}'(x).$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 27 переносится на сложную функцию, являющуюся суперпозицией трех и большего числа функций. Так, в частности, если $y = F\left[f(\varphi(x))\right]$ и $U = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x, $z = f(U)$ – в точке $U = \varphi(x)$, а функция $y = F(z)$ – в соответствующей точке $z = f(U) = f(\varphi(x))$, то

$$y'_x = F'_z(z) \cdot f'_U(U) \cdot \varphi'_x(x),$$

где $F'_z(z)$ – производная функции $y = F(z)$ по аргументу z;

$f'_U(U)$ – производная функции $z = f(U)$ по аргументу U;

$\varphi'_x(x)$ – производная функции $U = \varphi(x)$ по x.

Пример. Найти производную функции $y = \ln \sin x$.

Решение. Перепишем функцию $y = \ln \sin x$ в виде $y = \ln u$, где $u = \sin x$. Тогда, согласно теореме 27, имеем

$$y' = (\ln u)'_u \cdot (\sin x)'_x = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

Теорема 28. Если у дифференцируемой функции $y = f(x)$ существует дифференцируемая обратная функция $x = \varphi(y)$, то везде, где $x'_y = \varphi'(y) \neq 0$, имеет место равенство $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.

Доказательство. Представим функцию $x = \varphi(y)$ как сложную функцию от x, т. е. $x = \varphi(y) = \varphi(f(x))$. Продифференцируем обе части равенства по x. Получим $1 = \varphi'_y \cdot f'_x$. Откуда $f'_x = \dfrac{1}{\varphi'_y}$ или $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$. Что и требовалось доказать.

Примеры.

1. Найти производную функции: $y = \arcsin x$.

Решение. Обратной функцией к данной будет $x = \sin y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$. Поэтому $y' = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Берем значение корня со знаком плюс, потому что на интервале $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ $\cos y$ неотрицателен.

2. Найти производную функции: $y = \arccos x$.

Решение. Воспользуемся известным тождеством $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$. Откуда $y = \arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$. Дифференцируя, получим $y' = 0 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т. е. $y' = (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Найти производную функции: $y = \operatorname{arctg} x$.

Решение. Обратной функцией к данной будет $x = \operatorname{tg} y$, $\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$. Выразим $\cos^2 y$ через $\operatorname{tg} y$ и заменим $\operatorname{tg} y$ на x: $\cos^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$. Итак, $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4. Найти производную функции: $y = \operatorname{arcctg} x$.

Решение. Так как $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, то $y = \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, откуда $y' = (\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

5. Найти производную функции: $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$.

Решение. Обратной к функции $y = a^x$ будет $x = \log_a y$.

Значит, $y' = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a$. В частности, при $a = e$ имеем $y' = (e^x)' = e^x$.

6. Найти производную функции: $y = x^{\alpha}$

Решение. Представим данную функцию в виде

$$y = x^{\alpha} = e^{\ln x^{\alpha}} = e^{\alpha \ln x}$$

и продифференцируем как сложную функцию

$$y' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Замечание. Производные от частных случаев последней функции мы получили раньше, исходя непосредственно из определения производной. А именно, было показано, что а) при $\alpha = 1$ имеем $y = x,\ y' = 1 \cdot x^{1-x} = 1 \cdot x^0 = 1$;

б) при $\alpha = \frac{1}{2}$ имеем $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$, $y' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Отметим часто встречающийся вид этой функции: $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$. В этом случае $y' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

2.4. Основные формулы дифференцирования

В примере предыдущего параграфа были вычислены производные основных элементарных функций. Нетрудно обобщить эти формулы в случае сложных функций, т. е. если y есть функция не от x, а от u, причем $u = u(x)$.

Например: $y = u^\alpha$, тогда $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'_x$.

Приведем основные формулы дифференцирования, знание которых необходимо для практических приложений понятия производной:

1. $y = C$; $y' = 0$.
2. $y = u^\alpha$; $y' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$.
3. $y = a^u$; $y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$.
4. $y = e^u$; $y' = e^u \cdot u'$.
5. $y = \log_a u$; $y' = \frac{u'}{u \ln a}$.
6. $y = \ln u$; $y' = \frac{u'}{u}$.
7. $y = \sin u$; $y' = \cos u \cdot u'$.
8. $y = \cos u$; $y' = -\sin u \cdot u'$.
9. $y = \operatorname{tg} u$; $y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.
10. $y = \operatorname{ctg} u$; $y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.
11. $y = \arcsin u$; $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
12. $y = \arccos u$; $y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
13. $y = \operatorname{arctg} u$; $y' = \frac{u'}{1+u^2}$.
14. $y = \operatorname{arcctg} u$; $y' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

2.5. Дифференцирование неявной функции

Не всегда можно представить функцию, заданную в неявном виде $F(x, y) = 0$, в явном виде $y = f(x)$. Например, функцию y, заданную уравнением $y^2 - x - \cos xy = 0$, нельзя разрешить относительно y.

Будем рассматривать левую часть равенства $F(x, y) = 0$ как сложную функцию от x. Дифференцируя это равенство по x (считая y функцией от x), получим линейное уравнение относительно y'. Так, в приведенном выше примере будем иметь: $2y \cdot y' - 1 + \sin xy \cdot (1 \cdot y + x \cdot y') = 0$. Здесь производные от y^2 и от $\sin xy$ рассматривались как производные сложных функций от x с промежуточным аргументом y. Разрешая полученное уравнение относительно y', получим: $y' = \dfrac{1 - y\sin xy}{2y + x\sin xy}$.

2.6. Логарифмическая производная

Пусть функция $y = f(x)$ положительна и дифференцируема в точке x. Тогда и сложная функция $z = \ln y$, где $y = f(x)$ по теореме 27 будет также дифференцируема в указанной точке. При этом $\left[\ln f(x)\right]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ принято называть логарифмической производной функции $y = f(x)$ в точке x. Приведем пример использования логарифмической производной. Пусть $y = \left[u(x)\right]^{v(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)$ – функции, дифференцируемые в точке x, и $u(x) > 0$ – в точке x. Тогда функция $z = \ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$ будет дифференцируема в точке x. Поэтому $(\ln y)' = v'(x)\ln u(x) + \dfrac{v(x) \cdot u'(x)}{u(x)}$.

С другой стороны, $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$. Следовательно,

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x) \cdot u'(x)}{u(x)}.$$

Принимая во внимание, что $y = \left[u(x)\right]^{v(x)}$, окончательно будем иметь:

$$\left(\left[u(x)\right]^{v(x)}\right)' = \left[u(x)\right]^{v(x)}\left[v(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

Пример. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

Решение. Прологарифмировав данную функцию, получим $\ln y = \sin x \cdot \ln x$. Дифференцируем это равенство как неявную функцию $\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sin x$ и находим y':

$$(x^{\sin x})' = y' = y \cdot \cos x \cdot \ln x + \frac{y}{x} \cdot \sin x = x^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln x + x^{\sin x - 1} \cdot \sin x.$$

2.7. Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция y от x задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, причем существуют производные x'_t и y'_t, а функция $x = x(t)$ имеет дифференцируемую обратную функцию $t = t(x)$.

Тогда представим функцию $y = y(t)$ как сложную функцию от x с промежуточным аргументом $t = t(x)$, т. е. $y = y[t(x)]$. Дифференцируя эту сложную функцию по x, получим $y'_x = y'_t \cdot t'_x$. Согласно теореме о производной обратной функции, $t'_x = \frac{1}{x'_t}$. Окончательно будем иметь

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

П р и м е р. Найти производную y'_x функции $y = a(1-\cos t)$, $x = a(t - \sin t)$.

Решение. Находим производные y'_t и x'_t: $y'_t = a \sin t$, $x'_t = a \cdot (1 - \cos t)$,

а затем $$y'_x = \frac{a \sin t}{a \cdot (1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

2.8. Производные высших порядков

Как указывалось выше, производная функции $f(x)$ есть тоже функция от x, т. е. $y' = f'(x)$. Поэтому мы можем ставить вопрос о нахождении производной от функции $y' = f'(x)$. Функцию $f'(x)$ называют ***первой производной***, а производную от нее – ***второй производной***. Вторую производную $(y')' = [f'(x)]'$ обозначают одним из следующих символов: y'', $f''(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ (читается дэ два игрек по дэ икс дважды). Аналогично, производную от второй производной называют ***третьей производной*** и обозначают y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3 x}{dx^3}$ и т. д. И, наконец, ***n* – ой *производной*** (или ***производной n*-го *порядка***) называется ***производная* от *n* - 1** -ой производной. Она обозначается символами: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$. Таким образом, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$. Для практического нахождения производной n-го порядка мы должны найти последовательно все производные от первого до n-го порядка. Однако для некоторых функций можно написать общую формулу для производной любого порядка.

Пусть, например, $f(x) = e^{kx}$, тогда $f'(x) = ke^{kx}$, $f''(x) = k^2 e^{kx}$, $f'''(x) = k^3 e^{kx}$, …, $f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$.

Аналогично могут быть получены формулы n-ой производной для функций:

а) $f(x)=x^m$, $\quad f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$ $(n \le m)$;

б) $f(x)=\ln x$, $\quad f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$;

в) $f(x)=a^x$, $\quad f^{(n)}(x)=a^x(\ln a)^n$;

г) $f(x)=\sin x$, $\quad f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2})$;

д) $f(x)=\cos x$, $\quad f^{(n)}(x)=\cos(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2})$.

2.9. Дифференциал функции

Согласно определению производной, $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Воспользовавшись свойствами пределов, получим:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Перепишем это равенство в виде $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$. Линейная часть (относительно Δx) приращения функции называется ***дифференциалом функции*** и обозначается dy или $df(x)$.

В правой части последнего равенства первое слагаемое представляет собой произведение ограниченной функции $f'(x)$ на бесконечно малую Δx, и, следовательно, является линейным относительно Δx. Второе же слагаемое есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx. Действительно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Следовательно, линейная относительно Δx часть приращения Δy есть $f'(x)\cdot\Delta x$. Поэтому $dy=f'(x)\cdot\Delta x$. Приращение Δx аргумента называется ***дифференциалом независимой переменной*** и обозначается $dx=\Delta x$. В этих обозначениях дифференциал принимает вид $dy=f'(x)dx$. Отсюда $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$, т. е. производная функции равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

Поскольку дифференциал dy отличается от производной $f'(x)$ только множителем dx, то все основные правила и формулы для нахождения дифференциалов получаются из правил и формул нахождения производной. В частности, справедливы следующие соотношения для дифференциалов:

$$d(u\pm v)=du\pm dv, \qquad d(uv)=vdu+udv, \qquad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

Примеры.

1) $y = \arcsin x$, $\quad dy = y'dx = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) $y = x\ln x$, $\quad dy = \left(1\cdot\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x}\right)dx = (\ln x + 1)dx$.

Если функция $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, такова, что существуют производные, f'_u и φ'_x то мы можем ставить вопрос о нахождении дифференциала сложной функции $y = f[\varphi(x)]$. Так как $y'_x = f'_u \cdot \varphi'_x = y'_u \cdot u'_x$, то $dy = y'_x dx = y'_u \cdot u'_x dx$. Но $u'_x dx = du$. Следовательно, $dy = y'_u du$, т. е. форма дифференциала не изменяется при замене переменной x в функции $y = f(x)$ другой переменной $u = u(x)$. Это свойство называется ***инвариантностью формы дифференциала***.

Приращение и дифференциал функции являются эквивалентными бесконечно малыми. Поэтому в приближенных вычислениях часто пользуются приближенным равенством $\Delta y \approx dy$ или $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)dx$. Откуда

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx = f(x) + f'(x)\cdot\Delta x \qquad (11)$$

Это равенство верно с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Примеры.

1. Вычислить приближенное значение $\sin 29^\circ$.

Решение. Для функции $y = \sin x$ $dy = \cos x dx$. Положим $\Delta x = -1^\circ = -\dfrac{\pi}{180}$. Тогда $x = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$. По формуле (11) имеем

$$\sin 29^\circ \approx \sin 30^\circ - \frac{\pi}{180}\cos 30^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}5 - 0{,}0175\cdot 0{,}866 \approx 0{,}4848.$$

2. Пусть $y = f(x)$ – призводственная функция, выражающая объем производимой продукции за единицу времени в зависимости от числа работников (производственные функции, как правило, дифференцируемы). Пусть в настоящее время число работников фирмы равно $\boldsymbol{a}$, цена единицы изготовляемой продукции равна $\boldsymbol{c}$, а $\boldsymbol{p}$ – зарплата работника за единицу времени. Целесообразно ли фирме нанять еще одного работника?

Решение. Очевидно, что добавочная продукция, производимая новым сотрудником фирмы за единицу времени, будет равна $f(\boldsymbol{a}+1) - f(\boldsymbol{a}) \approx f'(\boldsymbol{a})$ (если число работников $\boldsymbol{a}$ достаточно велико, то это равенство будет довольно точным).

Тогда, если $\boldsymbol{c}f'(\boldsymbol{a}) > \boldsymbol{p}$, то следует нанять еще одного сотрудника, так как он приносит фирме больше дохода, чем она ему платит. Это правило имеет универсальный характер и называется ***золотым правилом экономики***.

2.10. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения

<u>**Теорема Ферма**</u>. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале $(a,\ b)$ и в точке $x_0 \in (a,b)$ принимает свое наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке x_0 функция $f(x)$ дифференцируема, то $f'(x_0) = 0$.

<u>Доказательство</u>. Пусть для определенности функция $f(x)$ в точке x_0 принимает наибольшее значение, т. е. $f(x) \le f(x_0)$ для всех $x \in (a,b)$. Тогда для любого Δx, такого, что

$$x_0 + \Delta x \in (a,b), \qquad \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0.$$

Поэтому в точке x_0 разностное отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \le 0$ для $\Delta x > 0$ и $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \ge 0$ для $\Delta x < 0$. Следовательно, если в точке x функция $f(x)$ дифференцируема, то

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0 + 0) = f'(x_0) \le 0; \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0 - 0) = f'(x_0) \ge 0.$$

Это возможно лишь в случае, когда $f'(x_0) = 0$. Доказательство теоремы в случае, когда в точке $x_0 \in (a,b)$ функция принимает наименьшее значение, аналогично. Теорема доказана.

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма состоит в том, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a,b)$ и принимает в этой точке свое наибольшее или наименьшее значение, то касательная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси $0x$ (рис. 3).

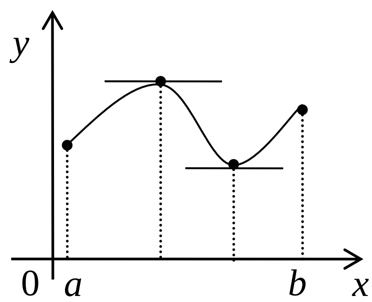

Рис. 3

Замечание. Если функция $f(x)$ рассматривается на замкнутом интервале $[a,b]$, то в случае, когда она принимает наибольшее или наименьшее значение на одном из концов этого интервала и когда на этом конце, т. е. в точке $x=a$ или $x=b$ существует производная (или только односторонняя производная), то она, вообще говоря, не равна нулю. Так, например, функция $y=x$ на замкнутом интервале [0, 1] принимает наименьшее значение в точке $x=0$, а наибольшее – в точке $x=1$. Однако ни в одной из этих точек производная не равна нулю (рис. 4).

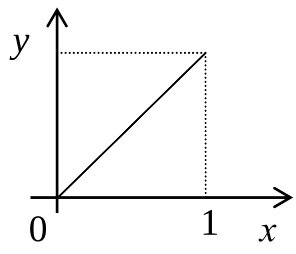

Рис. 4

Говорят, что функция $y=f(x)$, определенная на интервале (a, b), имеет в точке $x_0 \in (a,b)$ ***локальный максимум (локальный минимум)***, если найдется такая δ-окрестность этой точки, в пределах которой значение $f(x_0)$ является наибольшим (наименьшим) значением функции $f(x)$.

Говорят, что функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 ***локальный экстремум***, если эта функция имеет в указанной точке либо локальный минимум, либо локальный максимум.

Следствие теоремы Ферма. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и $x_0 \in (a,b)$ – точка ее локального экстремума. Тогда, если в точке x_0 функция дифференцируема, то $f'(x_0)=0$.

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого интервала. Пусть, кроме того, $f(a)=f(b)$. Тогда внутри этого интервала найдется точка x_0 такая, что $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$, то эта функция достигает на этом интервале своего наибольшего значения M и своего наименьшего значения m. Тогда для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $m \le f(x) \le M$.

Могут быть два случая:

1) $m=M$. Тогда $f(x)=m=M=\text{const}$, поэтому $f'(x)=0$ в любой внутренней точке интервала $[a, b]$;

2) $m<M$. Из условия $f(a)=f(b)$ следует, что хоть одно из значений M или m принимается функцией в некоторой внутренней точке x_0 интервала $[a, b]$. Но тогда, по следствию из теоремы Ферма, $f'(x_0)=0$. Теорема доказана.

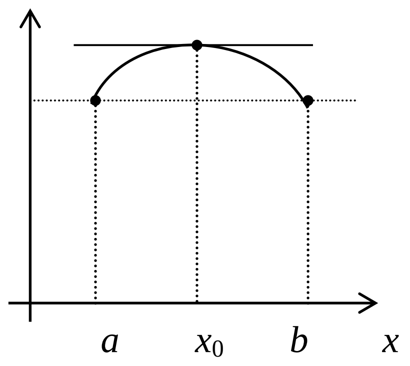

Рис. 5

Теорема Ролля имеет простой геометрический смысл: у графика непрерывной на отрезке и дифференцируемой внутри него функции, принимающей на концах этого отрезка одинаковые значения, существует точка, в которой касательная параллельна оси $0x$ (рис. 5).

Рассмотрим еще несколько теорем, доказательства которых приводить не будем.

<u>Теорема Лагранжа.</u> Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка. Тогда найдется такая точка $x_0 \in (a,b)$, что

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a). \qquad (12)$$

Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля.

Часто бывает удобно записывать равенство (12) в другом виде. Положим, $a = x$, $b - a = \Delta x$ и, значит, $b = x + \Delta x$. Тогда равенство (12) перепишется в виде

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x \cdot f'(x_0), \qquad (13)$$

где x_0 – некоторая точка, лежащая между x и $x+\Delta x$.

Приведем еще одну форму записи равенства (12). Пусть $\dfrac{x_0 - x}{\Delta x} = \Theta$ и $x < x_0 < x + \Delta x$, тогда $x_0 = x + \Theta \cdot \Delta x$, $0 < \Theta < 1$, и равенство (13), а значит, и равенство (12) примет вид:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x \cdot f'(x + \Theta \Delta x),\ 0 < \Theta < 1. \qquad (14)$$

Равенство (14) (а также равнозначные ему равенства (12) и (13) называются формулой конечных приращений в отличие от приближенного равенства $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, которое называют иногда формулой бесконечно малых приращений.

<u>Следствие</u> из теоремы Лагранжа. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a,\ b)$, и при этом для всех $x \in (a,b)$ $f'(x) = 0$, то $f(x)$ является постоянной на интервале $(a,\ b)$.

<u>Теорема Коши</u>. Если каждая из двух функций $f(x)$ и $g(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a,\ b]$, дифференцируема во всех внутренних точках этого интервала и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a,b)$, то найдется такая точка $x_0 \in (a,b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Написанное выше равенство называют обобщенной формулой конечных приращений или формулой Коши.

Говорят, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой при $x \to a$ неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Раскрыть эту неопределенность – это значит вычислить предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при условии, что он существует).

Аналогично определяются неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ при $x \to a+0$ $(x \to a-0)$, при $x \to \infty$, а также при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Следующая теорема дает правило раскрытия неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ для предела в точке *a*.

Теорема 29 (первое правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на некоторой проколотой δ-окрестности точки a и на этой же δ-окрестности $g'(x)\neq 0$. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, и при этом $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(Проколотой δ-окрестностью точки a называется интервал $(a-\delta,\ a+\delta)$, из которого выброшена точка *a*).

Замечание. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применить повторно, т. е. в этом случае:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$

$=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$.

Выше был рассмотрен вопрос о раскрытии неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ для случая предела в точке a. Совершенно аналогичные результаты справедливы и для случаев предела в точке a справа и слева, предела при $x\to\infty$, а также предела при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Отношение двух определенных в окрестности точки a функций $f(x)$ и $g(x)$ представляет собой при $x\to a$ неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$.

Для раскрытия этой неопределенности, т. е. для вычисления $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, справедливо второе правило Лопиталя.

Теорема 30 (второе правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на некоторой проколотой δ-окрестности точки a и на этой же δ-окрестности $g'(x)\neq 0$. Пусть далее $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, при этом $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Так же, как и первое, второе правило Лопиталя остается справедливым и для случая предела в точке справа и слева, предела при $x\to\infty$, а также предела при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Кроме рассмотренных выше неопределенностей видов $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ часто встречаются и неопределенности видов $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^{∞}), (∞^{0}), (0^{0}). Все эти неопределенности сводятся к рассмотренным выше двум неопределенностям путем алгебраических преобразований.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{e^{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{e^{x}}=0$.

2. $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^{2}}=-\lim\limits_{x\to+0}x=0$.

3. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}$. Обозначим $x^{\sin x}=y$ и прологарифмируем: $\ln y=\sin x\ln x$.

Отсюда $\lim\limits_{x\to+0}\ln y=\lim\limits_{x\to+0}\sin x\cdot\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/\sin x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-\frac{\cos x}{\sin^{2}x}}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^{2}x}{x\cos x}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^{2}}{x\cos x}=-\lim_{x\to+0}\frac{x}{\cos x}=0.$$

Таким образом, используя непрерывность логарифмической функции, получаем: $\lim\limits_{x\to+0}\ln y=\lim\limits_{x\to+0}\ln x^{\sin x}=\ln\left[\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}\right]=0$, откуда $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}=1$.

<u>**Формула Тейлора**</u>. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 n производных. Рассмотрим следующую задачу.

Построить многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, такой, что

$$P_n(x_0)=f(x_0),\ \ P_n'(x_0)=f'(x_0),\ \dots,\ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0).$$

Не трудно видеть, что искомым многочленом будет (проверьте это самостоятельно) следующий многочлен:

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^{2}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n}.$$

Обозначим $f(x)-P_n(x)=R_n(x)$. Тогда функция $f(x)$ может быть представлена так:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^{2}+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

Такое представление функции $f(x)$ называется формулой Тейлора; многочлен $P_n(x)$ – многочленом Тейлора, а функция $R_n(x)$ – остаточным членом формулы Тейлора. При $x \to x_0$ остаточный член $R_n(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка чем $(x-x_0)^n$.

Формула Тейлора используется для приближенного вычисления значений функции $f(x)$ вблизи точки x_0, т. е. когда $|x-x_0|$ мало.

В случае, когда $x_0=0$, формула Тейлора принимает вид

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+R_n(x)$$

и обычно называется ***формулой Маклорена***.

Приведем (без доказательств) одну из форм остаточного члена формулы Тейлора (остаточный член в форме Лагранжа), которая справедлива в предположении, что в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ имеет производную (n + 1)-го порядка: $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$; где $c \in (x_0, x)$, если $x > x_0$ или $c \in (x, x_0)$, если $x < x_0$.

Приведем в качестве примера представление по формуле Маклорена функции $f(x)=e^x$.

Поскольку для любого k $f^{(k)}(x)=e^x$ и $f^{(k)}(0)=1$, то формула Маклорена имеет вид

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$$

где остаточный член в форме Лагранжа $R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$; где $c \in (0, x)$, если $x>0$ или $c \in (x, 0)$, если $x<0$.

На любом интервале $[-r, r]$ из-за того, что $e^c<e^r$, получим следующую оценку для остаточного члена:

$$|R_n(x)|<\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r$$

Если, например, требуется приближенно вычислить $e^{0,1}$, то используя формулу Маклорена для функции e^x при x = 0, 1 будем иметь:

$$e^{0,1}=1+0,1+\frac{(0,1)^2}{2!}+\frac{(0,1)^3}{3!}+\ldots+\frac{(0,1)^n}{n!}+R_n(0,1) \quad \text{и}$$

$$|R_n(0,1)|<\frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{0,1}<\frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{1}<\frac{3\cdot(0,1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

поэтому, беря, например, $n = 2$, получим :

$$e^{0,1}\approx P_2(0,1)=1+0,1+\frac{(0,1)^2}{2}=1+0,1+0,005=1,105.$$

При этом оценка погрешности $\left|e^{0,1}-P_2(0,1)\right|$, т. е. $|R_2(0,1)|$ будет следующей: $|R_2(0,1)|<\dfrac{3\cdot(0,1)^3}{3!}=0,0005$.

При $n = 3$ получим:

$$e^{0,1}\approx P_3(0,1)=1+0,1+\frac{(0,1)^2}{2!}+\frac{(0,1)^3}{3!}\approx 1+0,1+0,005+0,00017=1,10517,$$

$$|R_3(0,1)|<\frac{3\cdot(0,1)^4}{4!}=\frac{0,0001}{8}=0,0000125.$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Напомним, что графиком функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек, каждая из которых удовлетворяет уравнению $y = f(x)$, и любая точка, не принадлежащая этому геометрическому месту, не удовлетворяет этому уравнению.

В аналитической геометрии мы познакомились с некоторыми геометрическими местами точек (прямая линия, окружность, эллипс, гипербола и др.).

Построение графика произвольной функции по его точкам, найденным по случайно выбранным значениям независимой переменной, может привести к линии, значительно отличающейся от истинного графика функции. Для более точного построения графика необходимо изучить поведение функции при изменении аргумента на отдельных интервалах из области определения функции.

3.1. Возрастание (убывание) функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Говорят, что функция $y = f(x)$ ***возрастает*** в точке x_0, если найдется такая δ-окрестность точки x_0, в пределах которой:

$f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$, $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$

Функция $y = f(x)$ ***убывает*** в точке x_0, если найдется такая δ-окрестность точки x_0, в пределах которой:

$f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$, $f(x) < f(x_0)$ при $x > x_0$.

Теорема 31 (достаточное условие возрастания или убывания функции в точке). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и ее производная в этой точке $f'(x_0)$ положительна (отрицательна), то функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0.

Доказательство. Для конкретности рассмотрим случай, когда $f'(x_0) > 0$. Так как, по определению производной,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то на основании определения предела функции (по Коши) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$ при $0 < |x - x_0| < \delta$.

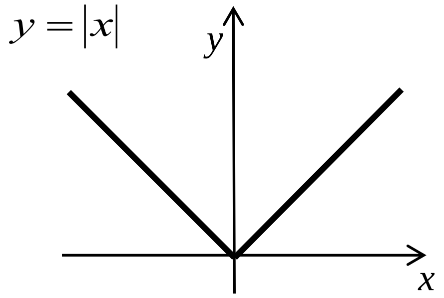

Рис. 6

Возьмем $\varepsilon = f'(x_0) > 0$. Тогда $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| < f'(x_0)$ при $0<|x-x_0|<\delta$, или, что то же самое, $0<\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<2f'(x_0)$ при $0<|x-x_0|<\delta$. Таким образом, повсюду в проколотой δ-окрестности точки x_0 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$, откуда и следует утверждение теоремы для случая $f'(x_0)>0$. Доказательство теоремы для случая $f'(x_0)<0$ аналогично.

Замечание. Положительность (отрицательность) производной $f'(x)$ в точке x_0 не является необходимым условием возрастания (убывания) функции $f(x)$ в этой точке.

Так, например, функция $y = x^3$ в точке $x=0$ возрастает, в то время как ее производная в этой точке равна нулю.

Следовательно,

1) для того чтобы дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f(x)$ не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ этой функции была неотрицательна (неположительна) всюду на этом интервале;

2) для того чтобы дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f(x)$ возрастала (убывала) на этом интервале, достаточно, чтобы производная $f'(x)$ этой функции была положительна (отрицательна) всюду на интервале (a,b).

3.2. Экстремум (локальный) функции

Как было показано ранее (следствие теоремы Ферма), если x_0 – точка локального экстремума функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0, то $f'(x_0)=0$. Точка x_0, в которой функция непрерывна, а ее производная в этой точке не определена, тоже может быть точкой (локального) экстремума.

Например, функция $y=|x|$ в точке $x=0$ непрерывна (как и всюду на числовой оси), но в этой точке не дифференцируема, тем не менее, точка $x=0$ является точкой минимума этой функции (рис. 6) .

Условимся в дальнейшем точки из области определения непрерывной функции $y = f(x)$, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует, называть ***критическими***, ***стационарными*** или ***точками, подозрительными на экстремум***. Каждая такая точка – это точка возможного экстремума, так как, если в точке x_0 производная $f'(x_0) = 0$ или не определена, то это еще не означает, что x_0 – точка экстремума. Достаточно рассмотреть функцию $y = x^3$, у которой точка $x = 0$ является критической, но не является точкой экстремума.

Ответить на вопрос, является ли критическая точка точкой экстремума, можно лишь на основании дополнительных исследований.

Теорема 32 (первое достаточное условие экстремума).

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой проколотой δ-окрестности своей критической точки x_0. Тогда,

1) если при переходе (слева направо) через данную точку производная меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум (минимум);

2) если же при переходе через данную критическую точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знак, то у функции $f(x)$ экстремума в точке x_0 нет.

Доказательство.

1. Пусть производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0. Возьмем произвольную точку x из той δ-окрестности точки x_0, где функция $f(x)$ дифференцируема. Тогда, по теореме Лагранжа, будем иметь: $f(x_0) - f(x) = f'(c) \cdot (x_0 - x)$, где c - некоторая точка интервала с концами x_0 и x. Поскольку левее точки x_0 $x_0 - x > 0$ и $f'(c) > 0$, а правее точки x_0 $x_0 - x < 0$ и $f'(c) < 0$, то в указанной δ-окрестности точки x_0 будет выполняться следующее условие $f(x_0) - f(x) > 0$. Это и означает, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум.

В случае, когда производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, аналогично доказывается, что в δ-окрестности точки x_0 выполняется условие $f(x_0) - f(x) < 0$, т. е., что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный минимум.

2. Пусть теперь производная $f'(x)$ не меняет знак при переходе через критическую точку x_0. Тогда $f(x_0) - f(x) = f'(c) \cdot (x - x_0)$ не сохраняет знак при переходе через точку x_0, что и доказывает отсутствие экстремума в точке x_0. Теорема доказана.

П р и м е р ы .

1. Найти точки экстремума функции $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$.

Решение. Поскольку $y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$, то критическими точками функции будут точки $x = 1$ и $x = 2$. При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x = 2$ – с минуса на плюс. Поэтому $x = 1$ – точка локального максимума, а $x = 2$ – точка локального минимума функции.

2. Найти точки экстремума функции $y = x^{2/3}$.

Решение. Рассматриваемая функция непрерывна на всей числовой оси и дифференцируема всюду, за исключением точки $x = 0$. При этом $y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ при $x \neq 0$. Следовательно, у рассматриваемой функции только одна точка, подозрительная на экстремум $x = 0$. Очевидно, что $y' < 0$ при $x < 0$ и $y' > 0$ при $x > 0$. Поэтому точка $x = 0$ является точкой минимума.

3. Найти точки экстремума функции $y = x^5$.

Решение. Поскольку $y' = 5x^4$, то критической точкой является $x = 0$. При переходе через эту точку производная не меняет знак. Следовательно, функция $y = x^5$ точек экстремума не имеет.

4. Площадь, занимаемая печатным текстом, составляет на странице книги 432 см^2. Ширина полей вверху и внизу страницы составляет 2 см, а ширина боковых полей 1,5 см. Каковы должны быть размеры страницы, чтобы количество расходуемой бумаги было наименьшим?

Решение. Обозначим ширину страницы через x, а высоту – через y. Тогда площадь страницы $S = xy$. Из условия задачи следует, что $(x-3)(y-4) = 432$. Откуда находим: $y = \frac{4(x+105)}{x-3}$ и, следовательно, $S = \frac{4x(x+105)}{(x-3)}$. Исследуем эту функцию на экстремум. Так как $S' = \frac{4(x^2 - 6x - 315)}{(x-3)^2} = \frac{4(x-21)(x+15)}{(x-3)^2}$, то получаем две критические точки, $x_1 = 21$ и $x_2 = -15$, вторая из которых, исходя из смысла рассматриваемой задачи, не представляет интереса. При переходе через критическую точку $x = 21$ производная S' меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, минимальной площадь страницы будет тогда, когда ее ширина равна 21 см. При этом высота страницы $y = 28$ см, а сама площадь - 588 см^2.

Т е о р е м а 33 (второе достаточное условие экстремума).

Пусть функция $f(x)$ имеет в критической точке x_0 конечную вторую производную. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум, если $f''(x_0)<0$, и локальный минимум, если $f''(x_0)>0$.

Доказательство. Пусть для конкретности $f''(x_0)<0$. Тогда согласно достаточному условию убывания функции в точке, функция $f'(x)$ убывает в точке x_0. Поэтому найдется такая окрестность точки x_0, в пределах которой выполняется условие $f'(x)>f'(x_0)$ для $x<x_0$ и $f'(x)<f'(x_0)$ для $x>x_0$. Принимая во внимание, что $f'(x_0)=0$, приходим к выводу, что при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус. Следовательно, согласно первому достаточному условию экстремума, функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум.

Доказательство теоремы для случая $f''(x_0)>0$ аналогично.

П р и м е р ы.

1. Найти точки экстремума функции $y=2x^3-9x^2+12x-6$.

Решение. Критическими точками этой функции, как уже показывалось, являются точки $x_1=1$ и $x_2=2$. Так как $y''=12x-18$, то $f''(1)=-6<0$, $f''(2)=6>0$. Поэтому, по теореме 33, рассматриваемая функция имеет локальный максимум в точке $x=1$ и локальный минимум в точке $x=2$.

2. Исследовать на экстремум функцию $y=x^{2/3}$ при помощи второго достаточного условия экстремума нельзя, так как в критической точке $x=0$ вторая производная $y''=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$ не определена.

3. Исследовать на экстремум функцию $y=x^4$ при помощи второго достаточного условия нельзя, так как в критической точке $x=0$ вторая производная $y''=12x^2$ обращается в нуль.

4. При производстве x единиц продукции фирма получает $y_n=-0{,}001x^3+0{,}6x^2+150x-1000$ ден. ед. прибыли. Сколько должна производить фирма, чтобы получать максимум прибыли?

Решение. Найдем точки подозрительные на экстремум функции прибыли. Так как $y_n'=-0{,}003x^2+1{,}2x+150$, то из условия $y_n'=0$ следует, что $-0{,}003x^2+1{,}2x+150=0 \;\Rightarrow\; x_1=500,\ x_2=-100$. По смыслу задачи $x>0$, поэтому у функции y_n единственная точка подозрительная на экстремум: $x_1=500$. Исследуем ее:

$$y_n''=-0{,}006x+1{,}2 \;\Rightarrow\; y_n''(500)=-0{,}006\cdot 500+1{,}2=-3+1{,}2=-1{,}8<0.$$

Значит, функция $y_п$ в точке $x_1 = 500$ достигает максимума, т. е. фирма будет получать максимум прибыли, если будет производить 500 ед. продукции. При этом, прибыль будет равна

$$y_п = -0{,}001 \cdot 500^3 + 0{,}6 \cdot 500^2 + 150 \cdot 500 - 1000 = 99000 \text{ ден. ед.}$$

5. Затраты фирмы при производстве x ед. продукции составляют $y_з = 0{,}02x^3 - 0{,}1x^2 + 21x + 800$ ден. ед. Рыночная цена за единицу продукции при объеме выпуска x ед. составляет $p = 117 - 0{,}1x$ ден. ед. Определить объем выпуска продукции, при котором фирма будет получать максимум прибыли. Какая при этом будет цена единицы продукции?

Решение. При объеме выпуска в x ед. доход фирмы будет составлять $y_д = p \cdot x = (117 - 0{,}1x) \cdot x = 117x - 0{,}1x^2$ ден. ед., а прибыль $y_п = y_д - y_з =$ $= 117x - 0{,}1x^2 - (0{,}02x^3 - 0{,}1x^2 + 21x + 800) = -0{,}02x^3 + 96x - 800$ ден. ед. Исследуем на экстремум функцию прибыли: $y_п' = -0{,}06x^2 + 96 = 0 \Rightarrow$ $x = \pm 40$. Так как по смыслу задачи $x > 0$, то получаем одну точку подозрительную на экстремум: $x_1 = 40$. Исследуем эту точку: $y_п'' = -0{,}12x$; $y_п''(40) = -0{,}12 \cdot 40 < 0 \Rightarrow x = 40$ – точка максимума.

Следовательно, максимум прибыли фирма будет получать производя 40 ед. продукции: $y_п(40) = -0{,}02 \cdot 40^3 + 96 \cdot 40 - 800 = 1760$ ден. ед.

Цена за единицу продукции при этом будет составлять $p(40) = 117 - 0{,}1 \cdot 40 = 113$ ден. ед.

Теорема 34 (третье достаточное условие экстремума).

Пусть функция $f(x)$ имеет производную порядка $2n-1$ в окрестности точки x_0 и производную порядка $2n$ в точке x_0. Тогда, если выполнены соотношения

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(2n)}(x_0) \neq 0$$

функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум, причем при $f^{(2n)}(x_0) < 0$ – локальный максимум, при $f^{(2n)}(x_0) > 0$ локальный минимум.

Доказательство этой теоремы приводить не будем.

Вернемся к отысканию экстремума функции $y = x^4$. Так как $y'(0) = y''(0) = y'''(0)$, а $y^{(4)}(0) = 24 > 0$, то, согласно приведенной выше теореме, у функции $y = x^4$ точка $x = 0$ является точкой минимума.

3.3. Глобальный максимум и минимум функции на замкнутом интервале

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на замкнутом интервале $[a, b]$, и поставим задачу об отыскании глобальных максимумов и минимумов, т. е. об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на замкнутом интервале $[a, b]$. Как известно (теорема 20), функция, непрерывная на замкнутом интервале, обязательно достигает на этом интервале своих наибольшего и наименьшего значений. Для определенности остановимся на отыскании наибольшего значения $f(x)$ на интервале $[a, b]$.

Наибольшее значение функции $f(x)$ может достигаться либо во внутренней точке интервала $[a, b]$ (тогда оно совпадает с одним из локальных максимумов), либо на одном из концов отрезка $[a, b]$. Поэтому для отыскания наибольшего значения функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$ нужно сравнить между собой значения $f(x)$ во всех точках локального максимума и в граничных точках a и b. Максимальное из этих значений и будет наибольшим значением $f(x)$ на замкнутом интервале $[a, b]$. Аналогично находится и наименьшее значение $f(x)$ на замкнутом интервале $[a, b]$.

Процесс нахождения наибольшего и наименьшего значений можно несколько упростить, т. е. просто сравнить между собой значения функции $f(x)$ во всех критических точках и в граничных точках a и b. Очевидно, максимальное (минимальное) из этих значений и будет наибольшим (наименьшим) значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Может оказаться, что функция $f(x)$ на замкнутом интервале $[a, b]$ не имеет стационарных точек. В этом случае функция $f(x)$ является монотонной на этом интервале, и ее наибольшее и наименьшее значения достигаются на концах интервала.

В качестве **п р и м е р а** рассмотрим задачу об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции $y=\sqrt[3]{x^2}(x+1)^3$ на замкнутом интервале [-1, 1]. Очевидно, что функция непрерывна на этом интервале, а $y'=\dfrac{(x+1)^2(11x+2)}{3\sqrt[3]{x}}$ не определена в точке $x=0$ и обращается в нуль в точках $x=-1$ и $x=-\dfrac{2}{11}$. Таким образом, критическими точками рассматриваемой функции будут точки $x=-\dfrac{2}{11}$ и $x=0$. Сравнивая значения функции в указанных точках и на концах интервала ($f(-1)=0$, $f\left(-\dfrac{2}{11}\right)\approx 0{,}17$, $f(0)=0$, $f(1)=8$), приходим к заключению, что наибольшего значения функция достигает в точке $x=1$ (конец интервала) $f(1)=8$, а наименьшего в точках $x=-1$ (конец интервала) и $x=0$ (точка локального минимума).

Рассмотрим еще один **пример**.

Фирма может получать прибыль двумя способами.

1. Сдавать в аренду помещения и оборудование. В этом случае она получает прибыль в размере 100 ден. единиц.

2. Производить продукцию. В этом случае величина прибыли y в зависимости от объема выпуска x единиц продукции составляет $y = x^2 - 10x + 100$ ден. единиц.

Требуется определить оптимальный объем выпуска продукции фирмой, т. е. такой объем, который обеспечивает фирме максимум прибыли.

Решение. Для ответа на поставленнный вопрос, очевидно, необходимо исследовать на экстремум функцию $y = x^2 - 10x + 100$. Найдем производную $y' = 2x - 10$ и приравняем ее нулю: $2x - 10 = 0$. Получаем точку подозрительную на экстремум: $x = 5$. Так как $y'' = 2 > 0$, то $x = 5$ является точкой минимума. Следовательно, при выпуске $x = 5$ единиц продукции фирма будет получать минимум прибыли.

Каким же должен быть оптимальный объем выпуска? Для ответа на этот вопрос необходимы дополнительные исследования производственных мощностей фирмы. Так как при $x > 5$ производная $y' = 2x - 10 > 0$, то величина прибыли $y = x^2 - 10x + 100$ монотонно растет с ростом объема выпуска x. При $x = 10$ прибыль составит 100 ден. единиц и совпадет с величиной прибыли, получаемой фирмой при сдаче помещений и оборудования в аренду. Следовательно, если фирма не может производить более 10 единиц продукции, то оптимальную прибыль фирма будет получать, сдавая в аренду помещения и оборудование. Если же фирма в состоянии производить более 10 единиц продукции, то оптимальным решением для фирмы будет выпуск продукции в максимальном объеме (используя до предела свои производственные мощности).

3.4. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в любой точке интервала (a, b). Тогда, как было установлено ранее, существует касательная к графику функции $y = f(x)$, проходящая через точку $\boldsymbol{M}(x, f(x))$ этого графика $(a < x < b)$, причем эта касательная не параллельна оси $0y$.

Говорят, что кривая в точке x_0 ***выпукла*** (выпукла вверх), если найдется такое $\Delta x > 0$, что все точки кривой, соответствующие значениям аргумента на интервале $(x_0 - \Delta x,\ x_0 + \Delta x)$, лежат под касательной, проведенной к кривой в точке с абсциссой x_0 (рис. 7, *а*).

Если кривая выпукла в каждой точке интервала (a, b), т. е. ордината касательной в каждой точке интервала больше ординаты кривой, то говорят, что она ***выпукла на*** этом ***интервале***.

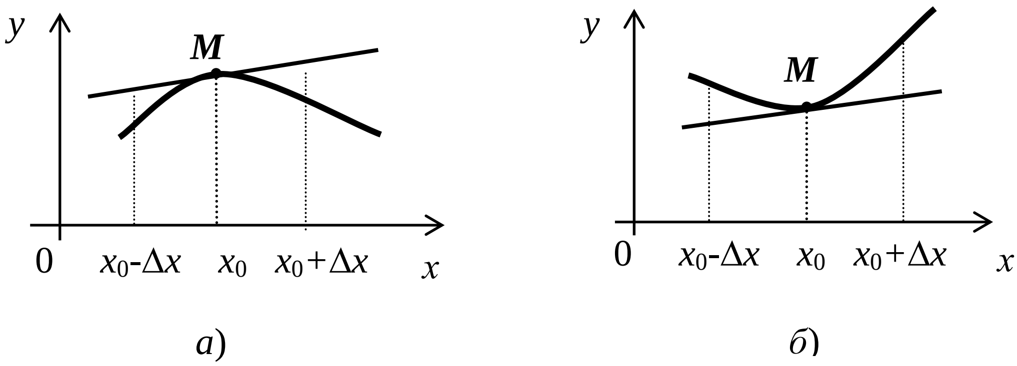

Рис. 7

Кривая в точке x_0 называется ***вогнутой*** (выпуклой вниз), если найдется такое $\Delta x > 0$, что все точки кривой, соответствующие интервалу $(x_0 - \Delta x,\ x_0 + \Delta x)$, находятся над касательной к кривой в точке с абсциссой x_0 (рис. 7, *б*).

Если кривая вогнута в каждой точке интервала (a, b), т. е. ордината касательной в каждой точке интервала меньше ординаты кривой, то говорят, что она ***вогнута на*** этом ***интервале***.

Для построения графика функции важно знать интервалы выпуклости и вогнутости.

Какая же связь между характером выпуклости графика функции и свойствами самой этой функции? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 35 (достаточное условие выпуклости). Если вторая производная функции $y = f(x)$ непрерывна и положительна (отрицательна) на интервале (a, b), то на этом интервале график функции вогнутый (выпуклый).

Доказательство теоремы приводить не будем

Точкой перегиба графика функции называется точка на графике непрерывной функции, отделяющая интервал выпуклости от интервала вогнутости.

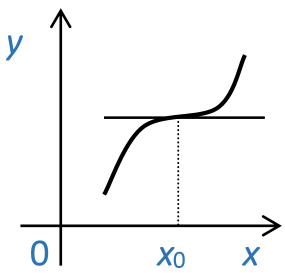

Рис. 8

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке, то в точке перегиба касательная пересекает график так, что в достаточно малой окрестности этой точки график расположен по обе стороны от касательной (рис. 8).

Выясним признаки существования точек перегиба у графика функции $y = f(x)$.

<u>**Теорема 36**</u> (необходимое и достаточное условие перегиба функции). График функции $y = f(x)$, имеющей непрерывную производную второго порядка, имеет при $x = x_0$ точку перегиба тогда и только тогда, когда $f''(x) = 0$ и при переходе через x_0 вторая производная меняет знак.

<u>Доказательство</u>. Пусть точка $x = x_0$ является точкой перегиба. Тогда при $x < x_0$ и при $x > x_0$ вторая производная имеет различные знаки. Следовательно, в силу непрерывности $f''(x)$, в точке $x = x_0$ она обращается в нуль, т. е. $f''(x_0) = 0$.

Пусть теперь $f''(x_0) = 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ в окрестности точки x_0 она либо сохраняет знак, либо при переходе через точку x_0 меняет его. В первом случае характер выпуклости графика не меняется и, следовательно, x_0 не является точкой перегиба. Во втором случае по разные стороны от точки с абсциссой x_0 график имеет различный характер выпуклости, и, следовательно, x_0 – точка перегиба. Что и требовалось доказать.

<u>Замечание</u>. Точка перегиба может быть и при $x = a$, если $f(x)$ в этой точке определена, а $f''(a)$ не существует, но $f''(x)$ при переходе через точку a меняет знак.

Таким образом, для определения точек перегиба графика функции $y = f(x)$ необходимо найти вторую производную функции, решить уравнение $f''(x)$ = 0, а также найти все точки разрыва функции $f''(x)$. Затем проверить, меняет ли знак $f''(x)$ при переходе через эти значения, и сделать соответствующий вывод.

Примеры. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости графика функций.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

<u>Решение</u>. Находим $f''(x)$: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$. Решаем уравнение $f''(x) = 0$: $6x - 12 = 0$, $x = 2$, $f(2) = 4$. Возьмем $\Delta x = 1$. Тогда $f''(2 - \Delta x) = f''(1) = -6 < 0$, $f''(2 + \Delta x) = f''(3) = 6 > 0$.

Следовательно, точка с координатами (2, 4) является точкой перегиба графика функции. На интервале $(-\infty, 2)$ $f''(x) < 0$, поэтому на этом интервале график функции выпуклый; на интервале $(2, +\infty)$ $f''(x) > 0$, поэтому на этом интервале график функции вогнутый.

2. $f(x) = x^4 - 4x + 5$.

Решение. $f'(x) = 4x^3 - 4$, $f''(x) = 12x^2$. Находим корни второй производной: $12x^2 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$, $f(0) = 5$. При переходе через точку $x = 0$ вторая производная не меняет знак. Следовательно, точка с координатами (0, 5) не является точкой перегиба. На интервале $(-\infty, +\infty)$ вторая производная положительна, поэтому график функции на этом интервале вогнутый.

3. $f(x) = 9 \cdot \sqrt[3]{x} + 5$.

Решение. $f'(x) = \dfrac{9}{3\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$, $f''(x) = -\dfrac{2 \cdot 3}{3\sqrt[3]{x^5}} = -\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^5}}$.

Вторая производная на интервале $(-\infty, +\infty)$ нигде в нуль не обращается, но при $x = 0$ не существует:

$$\lim_{x \to +0} f''(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -0} f''(x) = +\infty.$$

Так как $f''(x) > 0$ для $x < 0$, $f''(x) < 0$ для $x > 0$, $f(0) = 5$, то точка с координатами (0, 5) является точкой перегиба графика функции. На интервале $(-\infty, 0)$ график вогнутый, а на интервале $(0, +\infty)$ – выпуклый.

3.5. Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая линия, расстояние до которой от переменной точки графика стремится к нулю при неограниченном удалении точки по графику от начала координат.

Мы будем различать ***вертикальные*** и ***наклонные*** асимптоты. Легко убедиться, что прямая $x = a$ будет вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Пример. График функции $y = \dfrac{1}{x-2}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 2$, так как $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Для выяснения поведения графика функции при сколь угодно больших по модулю значениях аргумента важную роль играют наклонные асимптоты.

Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, если $f(x)$ представима в виде $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x)=0\right)$.

<u>**Теорема 37**</u>**.** Для того чтобы график функции $y=f(x)$ имел при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ наклонную асимптоту $y=kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$

$\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k \text{ и } \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right]=b\right)$.

<u>Доказательство</u>. ***Необходимость.*** Пусть график функции $y=f(x)$ имеет при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ асимптоту $y=kx+b$, т. е. $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x)=0\right)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{kx+b+\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(k+\dfrac{b}{x}+\dfrac{\alpha(x)}{x}\right)=k$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[b+\alpha(x)\right]=b$

$\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{kx+b+\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(k+\dfrac{b}{x}+\dfrac{\alpha(x)}{x}\right)=k\right.$,

$\left.\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[b+\alpha(x)\right]=b\right)$.

Достаточность. Пусть существуют пределы: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right]=b\right)$.

Тогда из второго предела следует, что $f(x)-kx-b=\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$. Теорема доказана.

Пример. Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{x^2}{2-2x}$.

<u>Решение</u>. Функция имеет разрыв при $x=1$, причем

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{2-2x}=+\infty,\qquad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{2-2x}=-\infty.$$

Поэтому, $x=1$ есть уравнение вертикальной асимптоты.

Найдем наклонные асимптоты. Определим параметры уравнения асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(2-2x)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2-2x} = -\frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{2-2x} + \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{2-2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2-2x} = -\frac{1}{2}.$$

Значит, уравнением наклонной асимптоты будет $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

3.6. Построение графиков функций

Изучение функции и построение ее графика целесообразно проводить в следующем порядке.

1. Исследование функции начинают с определения области задания функции.

2. Проверяют наличие специфических особенностей функции: четность, нечетность, периодичность. Если функция четная $(f(-x) = f(x))$ или нечетная $(f(-x) = -f(x))$, то исследование проводят только для положительных значений аргумента, так как в первом случае график функции будет симметричен относительно оси $0y$, а во втором – относительно начала координат. Если же функция периодическая $(f(x+T) = f(x))$, где T – ее период, то исследования проводят для одного периода.

3. Проверяют наличие асимптот (вертикальных и наклонных).

4. Находят точки пересечения графика функции с осями координат (нули функции и аргумента).

5. Вычисляют первую и вторую производные и находят точки, в которых эти производные обращаются в нуль или не существуют (критические точки и точки, подозрительные на перегиб).

6. Вся область определения функции разбивается на интервалы, на каждом из которых сохраняется знак одновременно у $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$. (Концами этих интервалов являются точки разрыва функций $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ и точки, в которых эти функции обращаются в нуль).

Заполняется таблица 1.

Таблица 1

x	$(-\infty;x_1)$	x_1	$(x_1;x_2)$	x_2	...	x_{n-1}	$(x_{n-1};x_n)$	x_n	$(x_n;\infty)$
$f(x)$									
$f'(x)$									
$f''(x)$									

В столбцах x_i записывают значения $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ в этих точках.

В столбцах (x_i,x_{i+1}) записывают знаки $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ на этих интервалах. Находят точки экстремума и точки перегиба.

7. Строят асимптоты и замечательные точки (точки пересечения графика функции с осями координат, экстремальные точки и точки перегиба), после чего строят эскиз графика.

Пример. Построить график функции $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

1. Областью определения функции является вся числовая ось, за исключением точки $x=1$.

2. График функции симметрией не обладает, так как

$$f(-x)=-\frac{x^4}{x^3+1}\neq\pm f(x).$$

3. Прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой, так как

$$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{x^4}{x^3-1}=+\infty;\quad \lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{x^4}{x^3-1}=-\infty.$$

Для нахождения наклонных асимптот вычислим следующие пределы:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{(x^3-1)x}=1;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^4}{x^3-1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^3-1}=0.$$

Значит, при $x\to\pm\infty$ график функции имеет наклонную асимптоту $y=x$.

4. Находим нули функции, т. е. точки пересечения графиком функции оси $0x$ (решаем уравнение $f(x)=0$). График функции пересекает ось $0x$ в единственной точке $x=0$. В этой же точке график функции пересекает и ось $0y$ $(f(0)=0)$.

5. Найдем первую производную функции: $f'(x)=\dfrac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}$. Решая уравнение $f'(x)=0$, получаем две критические точки $x=0$ и $x=\sqrt[3]{4}$. Производная $f'(x)$ не определена в точке $x=1$, но эта точка не является критической, так как не входит в область определения функции.

Найдем вторую производную функции: $f''(x)=\dfrac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}$. Решая уравнение $f''(x)=0$, находим точки возможного перегиба: $x=0$ и $x=-\sqrt[3]{2}$. Вторая производная $f''(x)$ не определена в точке $x=1$, но, как уже отмечалось выше, эта точка не принадлежит области определения функции.

6. Разбиваем область определения функции на интервалы и строим таблицу 2.

Таблица 2

x	$(-\infty,-\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2},0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4},\infty)$
$f(x)$	–	$-\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$	–	0	–	не сущест- вует	+	$\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$	+
$f'(x)$	+		+	0	–	не сущест- вует	–	0	+
$f''(x)$	+	0	–	0	–	не сущест- вует	+		+

Из таблицы видно, что функция $f(x)$ имеет:

1) максимум при $x=0$, причем $f(0)=0$;

2) минимум при $x=\sqrt[3]{4}$, причем $f(\sqrt[3]{4})=\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$ и что график функции имеет перегиб в точке $(-\sqrt[3]{2},\ -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2})$.

На интервале $(-\infty,-\sqrt[3]{2})$ функция отрицательна, возрастает и ее график – выпуклый вниз; на интервале $(-\sqrt[3]{2},0)$ – отрицательна, убывает и ее график – выпуклый вверх; на интервале $(0,1)$ – отрицательна, убывает и ее график – выпуклый вверх; на интервале $(1,\sqrt[3]{4})$ – положительна, убывает и ее график – выпуклый вниз; на интервале $(\sqrt[3]{4},\infty)$ – положительна, возрастает и ее график – выпуклый вниз.

7. Строим эскиз графика (рис. 9).

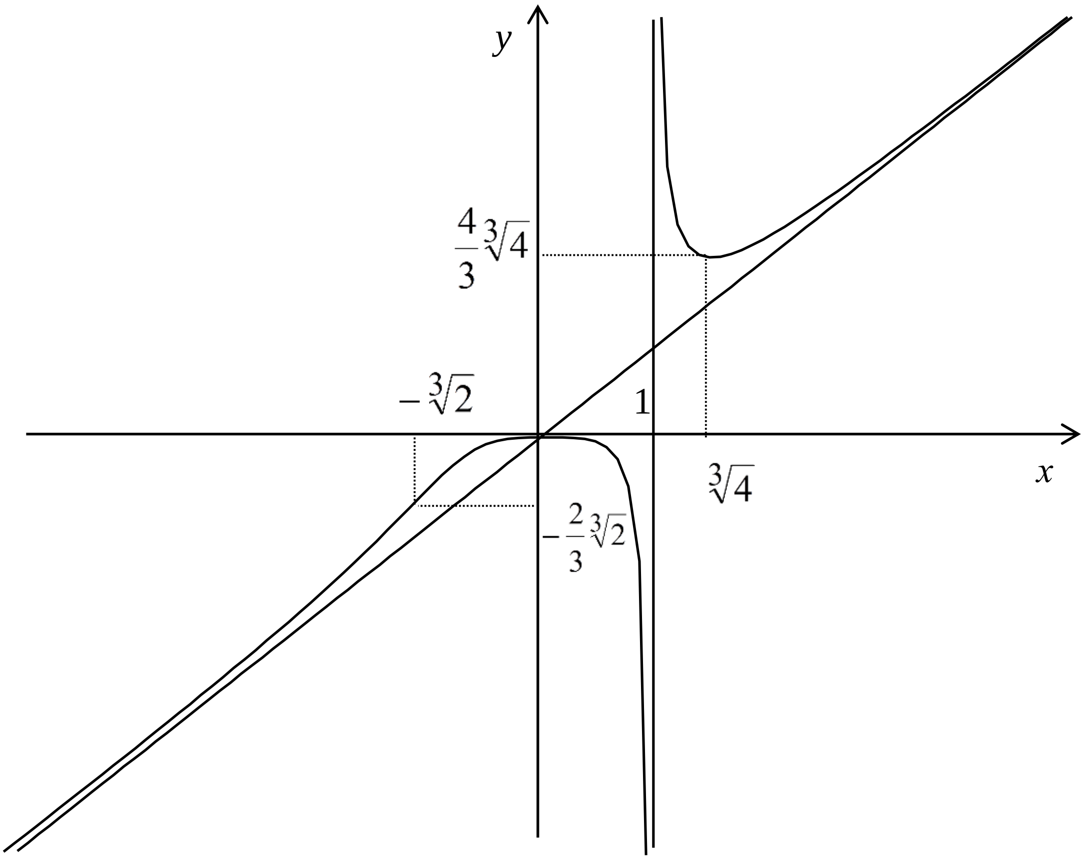

Рис. 9

4. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

4.1. Понятие функции нескольких переменных

Если каждой паре (x, y) значение двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторой области их изменения $D \in R^2$ по определенному правилу ставится в соответствие одно и только одно значение переменной величины z, то говорят, что в области D задана ***функция двух независимых переменных*** x и y. Эту функцию обозначают следующим образом: $z = f(x, y)$, $z = z(x, y)$ и т. п. Переменные x и y называются ***аргументами***, а область D – ***областью определения функции*** z. Область определения функции двух переменных наглядно иллюстрируется геометрически: если каждую пару значений x и y изображать точкой $M(x, y)$ на плоскости $x0y$, то область определения функции изобразится в виде некоторого множества точек плоскости.

Область определения функции $z = f(x, y)$ в простейших случаях представляет собой либо часть плоскости, ограниченную замкнутой кривой (причем точки этой кривой могут принадлежать или не принадлежать области определения), либо всю плоскость $x0y$. Линию, ограничивающую область D, называют ***границей области***, а точки этой линии – ***граничными точками области*** D. Точки области D, не являющиеся граничными, называют ***внутренними точками области*** D. Область, состоящую из одних внутренних точек, называют ***открытой***. Если же области принадлежат все точки границы, то область называют ***замкнутой***.

Множество, состоящее из всех чисел $f(x, y)$, где $(x, y) \in D$, называется ***множеством значений*** функции.

Так как каждой упорядоченной паре чисел (x, y) соответствует единственная точка плоскости $x0y$ и, наоборот, каждой точке M плоскости $x0y$ соответствует единственная пара упорядоченных чисел (x, y), то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки M и вместо $z = f(x, y)$ писать $z = f(M)$.

Способы задания функции двух переменных, как и в случае одной переменной, могут быть различными. В примерах будет использоваться аналитический способ задания, когда функция задается с помощью формулы. Областью определения функции в этом случае считается множество всех точек плоскости, для которых эта формула имеет смысл.

Рассмотрим примеры функций двух переменных.

1. $z = 1 - x^2 - y^2$. Область определения этой функции – вся плоскость $x0y$, а множество значений – интервал $(-\infty, 1]$.

2. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Область определения данной функции определяется условием $1-x^2-y^2 \ge 0$, или $x^2+y^2 \le 1$. Следовательно, областью определения будет круг с центром в начале координат и радиусом, равным единице. Множество значений функции представляет собой интервал $[0,1]$.

3. $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. Область определения этой функции определяется условием $1-x^2-y^2>0$, или $x^2+y^2<1$ и является множеством точек, лежащих внутри единичного круга с центром в начале координат. Множество значений представляет собой интервал $(1,+\infty)$.

Как известно, функция одной переменной изображается на плоскости в виде линии, определенной уравнением $y=f(x)$, т. е. графиком функции $y=f(x)$ является геометрическое место точек плоскости $x0y$, координаты которых удовлетворяют уравнению $y=f(x)$. Функции двух переменных изображаются в пространстве в виде поверхности, которая определяется уравнением $z=f(x,y)$, т. е. графиком функции $z=f(x,y)$ является геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z=f(x,y)$.

Построение графиков функции двух переменных сопряжено со значительными трудностями. Поэтому используется следующий способ изображения функции двух переменных, основанный на сечении поверхности $z=f(x,y)$ плоскостями $z=C$, где C – любое число, т. е. плоскостями, параллельными плоскости $x0y$. Множество точек $M(x,y)$ плоскости $x0y$, в которых функция принимает одно и то же значение C, т. е. тех точек $M(x,y)$, для которых $f(x,y)=C$, называется ***линией уровня*** функции $z=f(x,y)$. Очевидно, что при различных C получаются различные линии уровня данной функции.*

Понятие функции двух переменных легко обобщается на случай любого конечного числа переменных. Если каждой упорядоченной совокупности значений независимых переменных $(x_1,x_2,...,x_n)$ из некоторой области их изменения $D\in R^n$ по определенному правилу ставится в соответствие одно и только одно значение переменной величины u, то говорят, что в области D задана функция n независимых переменных

*Термин «линии уровня» заимствован из картографии, где линии уровня – это линии, на которых высота точек земной поверхности над уровнем моря постоянна. По ним можно судить не только о высоте над уровнем моря определенной точки местности, но и о характере рельефа, что особенно важно, если местность гористая.

$x_1, x_2, ..., x_n$ и используют следующую символическую запись: $u = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ или $u = f(M)$.

Областью определения функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ является некоторое множество точек пространства $0xyz$. Область определения функции четырех и большего числа переменных уже не допускает простого геометрического истолкования.

Пример. Функция $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ определена при значениях переменных, удовлетворяющих соотношению $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, или $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Следовательно, областью определения данной функции является множество точек единичного шара с центром в начале координат.

В экономике часто используются многофакторные производственные функции $u = f(x) = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$, выражающие зависимость объема или стоимости u выпускаемой продукции от объема $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ потребляемых ресурсов. Наиболее известной производственной функцией является функция Кобба-Дугласа: $Z = AX^{\alpha}Y^{\beta}$, где A, α и β – некоторые неотрицательные числа (чаще всего $\alpha + \beta \leq 1$), X – объем фондов, Y – объем трудовых ресурсов. Экономисты эту функцию Кобба-Дугласа часто записывают в виде $u = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где K – объем фондов (капитал), L – объъм трудовых ресурсов.

4.2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Введем вначале понятие δ-окрестности точек и понятие предела последовательности точек плоскости.

Множество $\{M(x, y)\}$ всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, называется ***$\delta$-окрестностью точки*** $M_0(x_0, y_0)$, т. е. δ-окрестность точки M_0 – это все точки, лежащие внутри круга с центром в точке M_0 радиуса δ.

Рассмотрим последовательность точек $M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ ...,$ $M_n(x_n, y_n), ...,$ которую кратко будем обозначать так: $\{M_n\}$.

Последовательность точек $\{M_n\}$ называется ***сходящейся*** к точке M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n \geq N$ выполняется условие $\rho(M_n,\ M_0) < \varepsilon$. При этом точка M_0 называется ***пределом последовательности*** $\{M_n\}$ и используется следующая символическая запись: $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = M_0$ или $M_n \to M_0$ при $n \to \infty$

. Заметим, что из условия $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Понятие предела функции двух переменных вводится аналогично понятию предела функции одной переменной.

Пусть функция $z = f(M)$ определена в некоторой области D, а M_0 – внутренняя или граничная точка этой области.

Число b называется ***пределом функции*** $z = f(M)$ ***в точке*** M_0, если для любой последовательности точек $\{M_n\}$ $(M_n \neq M_0,\ M_n \in D)$, сходящейся к точке M_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_n)\}$ сходится к b. При этом используется следующая символическая запись:

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = b \text{ или } \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = b, \text{ или } f(M)\to b \text{ при } M\to M_0.$$

Функция $z = f(M)$ называется ***бесконечно малой в точке*** M_0 (или при $M \to M_0$), если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = 0$.

Используя понятие предела функции двух переменных, можно перенести основные теоремы о пределах функции одной переменной на случай функции двух переменных. Сравнение бесконечно малых функций двух переменных производится точно так же, как и бесконечно малых функций одной переменной.

Функция $z = f(M)$ называется ***непрерывной в точке*** M_0, если в этой точке существует предел функции и этот предел равен значению функции в точке M_0, т. е. $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется ***непрерывной*** в этой ***области***.

Точки, в которых функция не является непрерывной, называются ***точками разрыва*** этой функции. Так, например, $M_0(x_0, y_0)$ будет точкой разрыва функции $z = f(x,y)$ в следующих случаях:

1) $z = f(x,y)$ определена во всех точках некоторой окрестности точки M_0, за исключением самой точки M_0;

2) функция $f(M)$ определена во всех точках некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, но не существует предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$.

3) $f(M)$ определена во всех точках окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, существует предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$, но $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) \neq f(M_0)$.

Часто условие непрерывности функции записывается в другом виде. Разность $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, где Δx и Δy – произвольные числа, называемые ***приращениями аргументов***, называют ***полным приращением функции*** $z = f(M)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0, y_0)$, если ее полное приращение Δz стремится к нулю, когда $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, т. е. если

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0)] = 0.$$

Очевидно, что это условие эквивалентно (равносильно) условию

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Пример. Функция $z = x^2 + y^3$ непрерывна в любой точке $M(x, y)$. Действительно, полное приращение данной функции в точке $M(x, y)$ равно

$$\Delta z = [f(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^3] - (x^2 + y^3) =$$
$$= 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 3y^2 \cdot \Delta y + 3y \cdot (\Delta y)^2 + (\Delta y)^3.$$

Так как $\Delta z \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, то функция непрерывна в точке $M(x, y)$.

Основные свойства непрерывных функций двух переменных аналогичны соответствующим свойствам непрерывных функций одной переменной.

Понятие предела и непрерывности функции n-переменных вводятся аналогично случаю функции двух переменных.

Так, δ – окрестностью точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in R^n$ называют множество точек $\{M(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, координаты которых удовлетворяют условию $\rho(M, M_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2} < \delta$. Последовательность точек $\{M_m(x_1^m, \ldots, x_n^m)\}$ называют сходящейся к точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $m \geq N$ выполняется условие: $\rho(M_m, M_0) < \varepsilon$.

Полным приращением функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется разность

$$f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \Delta f,$$

где $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ – некоторые числа, называемые приращениями аргументов, и т. д.

4.3. Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных

Пусть функция $z = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, т. е. в некоторой области, содержащей точку M. Выражение $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ $\left(\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\right)$ называется ***частным приращением функции*** по переменной x (по переменной y) в точке $M(x, y)$. При этом предполагается, что Δx (Δy) таково, что точка $M_1(x + \Delta x, y)$ ($M_2(x, y + \Delta y)$) лежит в указанной окрестности точки $M(x, y)$.

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ ($\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$), то он называется ***частной производной функции*** $z = f(M)$ в точке M по переменной x (по переменной y) и обозначается одним из следующих символов: $z'_x,\ f'_x,\ \dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\left(z'_y,\ f'_y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Из определения частных производных следует, что частная производная функции двух переменных по переменной x представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y; частная производная по переменной y – обыкновенную производную функции одной переменной y при фиксированном значении переменной x. Поэтому частные производные вычисляются по формулам и правилам вычисления производных функций одной переменной.

Примеры.

1. $z = x^2 + 2xy^2 + 3y^3$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4xy + 9y^2$.

2. $z = \sin xy^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos xy^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy \cos xy^2$.

Выясним экономический смысл частных производных на примере двухфакторной производственной функции $z = f(x, y)$, где z – выпуск продукции в стоимостном выражении, x – объем фондов (число станков), y – объем трудовых ресурсов (число рабочих).

Предварительно отметим следующее:

1) количество продукции (в стоимостном выражении), приходящееся на одну единицу фондов (на один станок), т. е. $\dfrac{f(x, y)}{x}$, называют *средней фондоотдачей*;

2) количество продукции (в стоимостном выражении) произведенное одним рабочим, т. е. $\dfrac{f(x,y)}{y}$, называют *средней производительностью труда*.

Если увеличить x (фонды) на единицу (т. е. приобрести еще один станок), то добавочная стоимость произведенной продукции (т. е. стоимость продукции, произведенной на этом станке) будет равна

$f(x+1,y)-f(x,y)=\Delta_x f=\Delta_x z$.

Принимая во внимание, что $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}\approx\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\Delta x=1$, получаем: $\Delta_x z\approx\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Следовательно, частная производная от производственной функции по объему фондов (производная выпуска по фондам) приближенно равна добавочной стоимости продукции, произведенной дополнительным станком. Поэтому эта частная производная называется ***предельной фондоотдачей***.

Если же увеличить y (число рабочих) на единицу, то добавочная стоимость произведенной продукции (т. е. стоимость продукции, произведенной этим рабочим) будет равна $f(x,y+1)-f(x,y)=\Delta_y f=\Delta_y z$.

Аналогично предыдущему получаем: $\Delta_y z\approx\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Значит, частная производная производственной функции по объему трудовых ресурсов (производная выпуска по труду) приближенно равна добавочной стоимости продукции, произведенной дополнительным рабочим. Поэтому эта частная производная нызывается ***предельной производительностью труда***.

Частные производные функции n переменных определяются аналогично. Пусть, например, $u=x^2+xy^2+xyz^2$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y^2+yz^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xy+xz^2,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2xyz.$$

Функция $z=f(M)$ называется ***дифференцируемой в точке*** $M(x,y)$, если ее полное приращение $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y, \qquad (15)$$

где A и B – некоторые не зависящие от Δx и Δy числа, а $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малые при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ функции.

Так же, как и в случае функции одной переменной, необходимым условием дифференцируемости функции в точке *M* является непрерывность ее в этой точке.

Действительно, если функция $z = f(M)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$, а это и означает, что функция непрерывна в точке M.

Теорема 38. Если функция $z = f(M)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то в этой точке она имеет частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, причем $\frac{\partial f}{\partial x} = A$, $\frac{\partial f}{\partial y} = B$.

Доказательство. Так как функция $z = f(M)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то имеет место соотношение (15). Полагая, $\Delta y = 0$, получим $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x; 0)\Delta x$, $\alpha(\Delta x; 0)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \{A + \alpha(\Delta x; 0)\} = A.$$

Следовательно, в точке M существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$, причем $\frac{\partial f}{\partial x} = A$.

Аналогично доказывается, что в точке M существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial y} = B$. Из теоремы 38 следует, что если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то ее полное приращение (15) представимо в виде

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x; \Delta y)\Delta y. \tag{16}$$

Замечание. Если функция $z = f(x, y)$ в точке M имеет частные производные, то из этого еще не следует, что она дифференцируема в этой точке.

Теорема 39 (достаточные условия дифференцируемости).

Если функция $z = f(M)$ имеет частные производные в некоторой δ – окрестности точки M и эти производные непрерывны в самой точке M, то функция дифференцируема в точке M.

Доказательство этой теоремы приводить не будем.

Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$, то выражение $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = dz$ называется ***полным дифференциалом*** этой функции, а $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$ – дифференциалами переменных x и y.

Сравнивая полное приращение (16) дифференцируемой функции с ее полным дифференциалом, приходим к заключению, что при малых Δx и Δy справедливо приближенное равенство $\Delta z \approx dz$, из которого следует, что $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + df$. Это равенство часто используется на практике для приближенного вычисления значений функций.

Пусть $z = f(x,y)$ функция двух переменных, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимой переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда функция $z = f(x(t), y(t))$ является сложной функцией независимой переменной t. Имеет место следующая

Теорема 40. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t, а функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x(t), y(t))$, то сложная функция $z = f(x(t), y(t))$ дифференцируема в точке t, причем,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{17}$$

Доказательство. Дадим переменной t произвольное приращение Δt. Тогда функции $x(t)$ и $y(t)$ получают приращения Δx и Δy соответственно, а функция $z = f(x,y)$, в свою очередь, полное приращение $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$. Так как функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке M, то Δz можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Разделив обе части последнего равенства на Δt, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}. \tag{18}$$

Из дифференцируемости функций $x(t)$ и $y(t)$ следует, что при $\Delta t \to 0$ имеет место: $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt}$,

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0, \quad \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0.$$

Поэтому из равенства (18) вытекает, что

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Равенство (17) часто называют ***формулой полной производной***. Если $z = f(x, y)$, где $y = \varphi(x)$, то $z = f(x, \varphi(x))$ – сложная функция от x. В этом случае формула (17) принимает вид

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \qquad (19)$$

Аналогичным образом вводится понятие дифференцируемости функции n переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ее полного дифференциала и доказываются теоремы 38 – 40. Формула (17) полной производной в этом случае принимает вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}, \qquad (20)$$

а полный дифференциал $du = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$.

4.4. Производная по направлению. Градиент

Введем понятие производной по направлению. Для удобства проведем рассмотрение этого вопроса на примере функции трех переменных.

Пусть функция $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0 пространства R^3 и дифференцируема в точке M_0, а M_1 – произвольная точка из этой окрестности. Проведем через точки M_0 и M_1 прямую. За положительное направление на этой прямой возьмем направление вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, т. е. направление от точки M_0 к точке M_1.

Обозначим через $\vec{l}$ направляющий вектор этой прямой, т. е. единичный вектор, коллинеарный вектору $\overrightarrow{M_0M_1}$, и имеющий одинаковое с ним направление. Для всякой точки M на этой прямой обозначим через $\overrightarrow{M_0M}$ ориентированную длину отрезка с началом в точке M_0 и концом в точке M, т. е. длину отрезка со знаком плюс, если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет то же направление, что и вектор $\vec{l}$, и со знаком минус – в противном случае. Пусть теперь точка M стремится к точке M_0, оставаясь на прямой.

Предел $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$, если он существует, называется ***производной функции*** $u = f(M)$ в точке M_0 ***по направлению*** вектора $\vec{l}$ и обозначается символом $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M_0)$ или $\dfrac{\partial f}{\partial l}(M_0)$ т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}.$$

Пусть (x_0, y_0, z_0) – координаты точки M_0, (x, y, z) – координаты точки M, а α, β, γ – углы, образованные вектором $\overrightarrow{M_0M}$ (а значит, и вектором $\vec{l}$) с осями координат (соответственно с $0x$, $0y$ и $0z$). Из курса линейной алгебры известно, что вектор $\vec{l}$ в координатной форме представим в виде $\vec{l} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, а координаты любой точки $M(x, y, z)$ принадлежащей прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\vec{l}$, представимы в виде

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\quad y = y_0 + t\cos\beta,\quad z = z_0 + t\cos\gamma. \qquad (21)$$

Поэтому на указанной прямой функция $u = f(x,y,z)$ представляет собой сложную функцию одной независимой переменной t, а именно:

$$f(x, y, z) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma).$$

Очевидно, что производная этой функции по t (если она существует) при $t = 0$ и является производной функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{l}$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}. \qquad (22)$$

Принимая во внимание, что согласно формуле полной производной,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

где в силу (21) $\quad \dfrac{dx}{dt} = \cos\alpha,\ \dfrac{dy}{dt} = \cos\beta,\ \dfrac{dz}{dt} = \cos\gamma$,

из (22) получим

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \qquad (23)$$

Эта формула и используется на практике для вычислений производной по направлению.

Примеры.

1. Найти производную функции $u = x^2y + yz$ в точке $M_0(1, 2, -1)$ в направлении вектора $\vec{l} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Решение. Так как длина вектора $\vec{l}$ равна единице, то $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ Частные производные $\frac{du}{dx} = 2xy$, $\frac{du}{dy} = x^2 + z$,

$\dfrac{du}{dz} = y$ в точке $M_0(1, 2, -1)$ соответственно равны $\dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 4$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}(M_0) = 2$.

Поэтому $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M_0) = 4 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} + 2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

2. Найти производную функции $u = x^2 y^3$ в точке $M_0(1, 2)$ в направлении вектора $\vec{a} = (1, 1)$.

<u>Решение</u>. Как известно, в случае функции двух переменных единичный вектор $\vec{l}$, определяющий направление вектора $\overrightarrow{M_0 M}$, имеет координаты $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, где α – угол, образованный вектором $\overrightarrow{M_0 M}$ с осью $0x$. Поэтому в данном случае формула (23) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\sin\alpha.$$

Так как единичный вектор $\vec{l}$ в направлении вектора $\vec{a}$ имеет вид $\vec{l} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, то $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Принимая во внимание, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 16,$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 12$, получим $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \dfrac{16}{\sqrt{2}} + \dfrac{12}{\sqrt{2}} = \dfrac{28}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}$.

Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется вектор, координаты которого соответственно равны $\dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0)$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}(M_0)$.

Для обозначения градиента функции u обычно используют символ $\operatorname{grad} u$.

Итак, по определению,

$$\operatorname{grad} \mathrm{u}(M_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(M_0),\ \frac{\partial u}{\partial y}(M_0),\ \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\right). \tag{24}$$

С помощью градиента формула (23) для производной функции $u = f(x, y, z)$ по направлению вектора $\vec{l} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ может быть записана в виде скалярного произведения векторов $\vec{l}$ и $\operatorname{grad} u$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\vec{l}, \operatorname{grad} u\right) \tag{25}$$

Отсюда, поскольку $\vec{l}$ – единичный вектор $(l = 1)$, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u| l \cos\varphi = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi,$$

где $|\mathrm{grad}\, u|$ – длина вектора $\mathrm{grad}\, u$, l – длина вектора $\vec{l}$, а φ – угол между векторами $\vec{l}$ и $\mathrm{grad}\, u$. Из последней формулы видно, что если в данной точке $|\mathrm{grad}\, u| \neq 0$, то производная $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ дифференцируемой функции по направлению $\vec{l}$ достигает наибольшего значения в ***единственном*** направлении, при котором $\cos\varphi = 1$, т. е. в направлении градиента. Таким образом, градиент указывает направление наибыстрейшего роста функции в точке M_0.

Аналогично определяется производная по направлению и градиент для дифференцируемой в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ функции n переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для такой функции производная $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ в данной точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ по направлению, определенному единичным вектором $\vec{l} = (\cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2, \ldots,\ \cos\alpha_n)$, вводится как обычная производная по переменной t сложной функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i = x_i^0 + t\cos\alpha_i$, $i = \overline{1, n}$, взятая в точке $t = 0$. Поэтому формула (23) для функции n переменных принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0)\cos\alpha_n. \qquad (26)$$

Градиентом функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется вектор, координаты которого $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(M_0)$, $i = \overline{1, n}$. Поэтому формула (24) для функции n переменных принимает вид

$$\mathrm{grad}\, u(M_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0),\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0),\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0) \right). \qquad (27)$$

Легко видеть, что формула (25) остается справедливой и в случае функции n переменных. Поэтому так же, как и в случае функции трех переменных, производная $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ функции n переменных по направлению $\vec{l}$ достигает наибольшего значения в направлении градиента.

4.5. Частные производные высших порядков

Предположим, что у функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенной в области D, в каждой точке этой области существует частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. Очевидно, что эта частная производная тоже представляет собой некоторую функцию n переменных. Если эта функция $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ в некоторой точке M области D имеет частную производную по аргументу x_j, то эту частную производную по x_j называют второй частной производной, или частной производной второго порядка функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке M сначала по аргументу x_i, а затем по аргументу x_j и обозначают одним из следующих символов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},\ u''_{x_i x_j},\ f''_{x_i x_j},\ u^{(2)}_{x_i x_j},\ u_{x_i x_j}.$$

При этом, если $i \neq j$, то частная производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ называется ***смешанной частной производной*** второго порядка.

Заметим (без доказательства), что в случае непрерывности смешанных производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

В случае функции двух переменных $z = f(x, y)$ частными производными второго порядка будут:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

После того, как введено понятие второй частной производной, можно последовательно ввести понятие третьей частной производной, затем – четвертой и т. д.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $u = x^y$.

<u>Решение</u>. $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^{y-1}(1 + y \ln x);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1 + y \ln x),\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x.$$

4.6. Необходимое условие локального экстремума функции нескольких переменных

Пусть функция $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$.

Говорят, что функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 ***локальный максимум (минимум)***, если найдется такая δ-окрестность точки M_0, в пределах которой значение $f(M_0)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех значений $f(M)$ этой функции.

Таким образом, точка M_0 локального максимума (минимума) характеризуется тем, что в некоторой окрестности этой точки

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) < 0 \quad (\Delta f = f(M) - f(M_0) > 0),$$

где M – любая точка из указанной окрестности, отличная от точки M_0.

Говорят, что функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 ***локальный экстремум***, если она имеет в этой точке либо локальный максимум, либо локальный минимум.

Теорема 41 (необходимое условие экстремума). Если функция $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ обладает в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ частными производными первого порядка по всем переменным x_i, $i = \overline{1, n}$ и имеет в этой точке локальный экстремум, то все частные производные первого порядка обращаются в точке M_0 в нуль, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Доказательство. Докажем справедливость утверждения теоремы для $i = 1$. Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ удовлетворяет условию теоремы. Рассмотрим функцию одной переменной

$$u_1 = u_1(x_1) = f(x_1, x_2^0, ..., x_n^0).$$

Очевидно, что функция $u_1(x_1)$ дифференцируема в точке x_1^0 и имеет в этой точке локальный экстремум.

Поэтому по теореме Ферма $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|_{x_1 = x_1^0} = 0$. Принимая во внимание, что $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|_{x_1 = x_1^0} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0)$, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы для $i = 1$.

Утверждение теоремы для $i = \overline{2, n}$ доказывают аналогично.

Пример. Найдем точки локального экстремума функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 1.$$

Решение. Очевидно, что в точке $M_0(0,0,0)$ все частные производные рассматриваемой функции равны нулю. В этой точке $u=1$, во всех же других точках $u>1$. Поэтому точка M_0 является точкой локального минимума.

Замечание. Обращение в нуль в некоторой точке M_0 всех частных производных первого порядка функции $f(M)$ является лишь необходимым условием локального экстремума этой функции в точке M_0.

Так, у функции $u=xyz$ в точке $M_0(0,0,0)$ все частные производные обращаются в нуль. В то же время в этой точке функция $u=xyz$ не имеет экстремума, так как в самой точке $M_0(0,0,0)$ функция равна нулю, а в как угодно малой окрестности этой точки она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Точки, в которых обращаются в нуль все частные производные первого порядка функции $u=f(M)$, называются ***стационарными*** (или критическими) точками этой функции.

В каждой стационарной точке у функции $u=f(M)$ возможен локальный экстремум, однако наличие этого экстремума можно установить лишь с помощью достаточных условий локального экстремума.

4.7. Достаточные условия локального экстремума функции двух переменных

Теорема 42. Если функция $u=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности стационарной точки $M_0(x_0,y_0)$, тогда, если в этой точке $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2>0$, то M_0 – точка локального экстремума функции $u=f(x,y)$ (максимум при $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}<0$ и минимум при $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0$).

Если же в этой точке $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2<0$, то функция $u=f(x,y)$ не имеет локального экстремума в точке M_0.

Доказательство этой теоремы приводить не будем.

Замечание. Значения вторых производных в стационарной точке $M_0(x_0,y_0)$ обычно обозначают так:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) = A$, $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0) = B$, $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) = C$, при этом выражение $AC - B^2$ называют дискриминантом.

П р и м е р ы.

1. Найти точки локального экстремума функции $u = x^3 + y^3 + 3xy$.

Решение. Стационарные точки функции находят из условия

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$, $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$, находим две стационарные точки $M_1(1,1)$ и $M_2(0,0)$.

Так как $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$, то в точке $M_1(1,1)$ будем иметь: $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$ и $AC - B^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$. Следовательно, в этой точке, согласно теореме 42, функция имеет локальный минимум $(u(M_1) = -1)$.

В точке $M_2(0,0)$ имеем $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$ и $AC - B^2 = 0 - (-3)^2 = -9 < 0$. Следовательно, согласно той же теореме 42, эта точка не является точкой экстремума .

2. Фирма производит два вида продукции, которые продает по цене 150 и 200 гривен за единицу соответственно. При производстве x единиц продукции первого вида и y единиц – второго, затраты фирмы составляют $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 50$ гривен в день. Требуется определить объемы дневного выпуска продукции, которые обеспечат фирме максимум прибыли.

Решение. При выпуске x единиц первого и y единиц второго вида продукции доход фирмы будет составлять $150x + 200y$ гривен в день, а прибыль (доход минус затраты):

$$150x + 200y - \left(x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 50\right) \text{ гривен.}$$

Следовательно, задача сводится к нахождению максимума функции

$$z = 150x + 200y - \left(x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 50\right).$$

Находим стационарные точки: $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 150 - 2x - 2y - 2 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 200 - 2x - 6y - 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 62, \\ y = 12. \end{cases}$

Функция имеет единственную стационарную точку $M(62,12)$. Так как в этой точке $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$, $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6$

и $AC - B^2 = (-2)\cdot(-3) - (-2)^2 = 12 - 4 = 8 > 0$, то это точка локального максимума.

Следовательно, фирма будет получать максимум прибыли, если за один день будет производить 65 ед. продукции первого вида и 12 ед. второго. Прибыль фирмы при этом будет составлять

$$z(M) = 150\cdot 62 + 200\cdot 12 - (62^2 + 2\cdot 62\cdot 12 + 3\cdot 12^2 + 2\cdot 62 + 4\cdot 12 + 50) =$$
$= 5714$ гривен в день.

4.8. Условный экстремум

При отыскании локальных экстремумов предполагалось, что аргументы $x_1, x_2, ..., x_n$ функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ не связаны никакими дополнительными условиями. Однако часто встречаются задачи о нахождении экстремумов функции, аргументы которой связаны некоторыми соотношениями (удовлетворяют дополнительным условиям связи). Такие экстремумы называют ***условными***.

Пусть, например, нужно найти экстремум функции $u = f(x, y)$ при условии, что ее аргументы связаны соотношением $\varphi(x, y) = 0$. Таким образом, нужно искать экстремумы функции $u = f(x, y)$ не во всей области ее определения, а лишь в тех точках области определения, координаты которых удовлетворяют уравнению $\varphi(x, y) = 0$, т. е. в точках области определения, принадлежащих кривой $\varphi(x, y) = 0$. Если из уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$ удается выразить y как функцию от x ($y = y(x)$) или x как функцию от y ($x = x(y)$), то задача сводится к отысканию безусловного экстремума функции $u = f_1(x) = f(x, y(x))$ или $u = f_2(y) = f(x(y), y)$.

Пример. Исследовать на условный экстремум функцию $u = f(x, y) = x^2 - 2y^2$, если $y = 2x$.

Решение. Очевидно, что $u = f_1(x) = f(x, 2x) = -7x^2$, т. е. при выполнении уравнения связи рассматриваемая функция является функцией одной переменной, которая, как легко видеть, достигает максимума при $x = 0$. Значению $x = 0$ из уравнения связи соответствует значение $y = 0$. Поэтому функция $u = x^2 - 2y^2$ при условии связи $y = 2x$ имеет в точке (0, 0) условный максимум.

Заметим, что сама функция $u = x^2 - 2y^2$ не имеет ни минимума, ни максимума ни в одной точке плоскости $0xy$. Таким образом, рассмотренный пример показывает, что функция может не иметь экстремума, но при определенных условиях связи иметь условный экстремум.

Заметим также, что в общем случае разрешить уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ относительно y (или x) не всегда возможно. Тем не менее, оказывается, что поставленную задачу можно решить, не разрешая уравнения $\varphi(x,y)=0$.

Действительно, при тех значениях x, при которых функция u может иметь экстремум, производная от u по x должна обращаться в нуль. Поэтому, помня, что y есть функция от x, и используя формулу полной производной (19), в точках экстремума будем иметь:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \qquad (28)$$

Аналогично, дифференцируя равенство $\varphi(x,y)=0$ по x, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \qquad (29)$$

Заметим, что это равенство выполняется при всех x и y, удовлетворяющих уравнению $\varphi(x,y)=0$. Умножим обе части равенства (29) на неопределенный пока коэффициент λ и прибавим их почленно к (28). Получим $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$,

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0. \qquad (30)$$

Это равенство выполняется при всех λ во всех точках условного экстремума. Выберем теперь λ так, чтобы $\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$. Тогда равенство (30) примет вид $\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0$. Таким образом, получается, что в точках экстремума будут выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \qquad (31)$$

Решая эту систему уравнений, находим координаты x, y критических точек. Из (31) видно, что для решения поставленной задачи нет необходимости разрешать уравнение $\varphi(x,y)=0$ относительно y.

Условия (31) являются необходимыми (но не достаточными) условиями условного экстремума.

В заключение отметим, что левые части уравнения (31) есть не что иное, как частные производные по x, y и λ функции

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \qquad (32)$$

которую называют ***функцией Лагранжа***.

Таким образом, чтобы найти возможные точки условного экстремума, необходимо:

1) составить вспомогательную функцию $L(x, y, \lambda)$;

2) приравнять нулю все ее частные производные;

3) решить полученную систему уравнений.

Этот метод (метод множителей Лагранжа) распространяется на исследование условного экстремума функции любого числа переменных.

Примеры.

1. Найти наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что $x + y - 1 = 0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$.

Приравняем нулю все ее частные производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений. Получим $x = y = \dfrac{1}{2}$ и, следовательно, $z = \dfrac{1}{2}$. Легко убедиться, что $z = \dfrac{1}{2}$ является наименьшим значением функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что $x + y - 1 = 0$.

2. Фирма производит два вида продукции, которые продает по цене 150 и 200 гривен за единицу соответственно. При производстве x единиц продукции первого вида и y единиц – второго, затраты фирмы составляют $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 50$ гривен в день. Фирме установлена квота дневного суммарного выпуска продукции в 50 единиц.

Требуется определить объемы дневного выпуска каждого вида продукции, которые обеспечат фирме максимум прибыли.

Решение. Рассматриваемая задача отличается от примера 2 из 4.7. тем, что теперь необходимо искать максимум функции

$z = 150x + 200y - \left(x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 50\right)$ при условии, что $x + y = 50$.

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 150x + 200y - \left(x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 50\right) + \lambda(x + y - 50)$$

и найдем точки возможного условного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 150 - 2x - 2y - 2 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 200 - 2x - 6y - 4 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 50 = 0. \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 38, \\ y = 12. \end{cases}$$

Не трудно убедиться, что точка M(38, 12) является точкой условного максимума.

Следовательно, фирма при установленной квоте будет получать максимум прибыли, если будет производить в день 38 ед. первого и 12 ед. второго вида продукции. При этом прибыль фирмы будет составлять

$$150 \cdot 38 + 200 \cdot 12 - (38^2 + 2 \cdot 38 \cdot 12 + 3 \cdot 12^2 + 2 \cdot 38 + 4 \cdot 12 + 50) =$$

$= 5138$ гривен в день.

4.9. Глобальный экстремум функции на ограниченном замкнутом множестве

Глобальным экстремумом функции $f(M)$ называется ее наибольшее и наименьшее значение. Известно, что функция, непрерывная в замкнутой ограниченной области, достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значения. Очевидно, что своего наибольшего (наименьшего) значения функция может достигать либо внутри области, тогда это будет наибольший (наименьший) из локальных максимумов (минимумов), либо на границе области, тогда это будет наибольший (наименьший) из условных максимумов (минимумов). Следовательно, нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции, непрерывной в ограниченной замкнутой области, может быть выполнено следующим образом. Вначале находятся точки возможного локального и условного экстремума. Затем во всех этих точках вычисляется значение функции. Наибольшее из вычисленных значений будет максимумом функции в данной области, наименьшее – минимумом.

Примеры.

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 + 1$ в области, определенной условием $(x-2)^2 + (y+1)^2 \le 20$.

Решение. Найдем точки возможного локального экстремума. Так как $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$, то единственной точкой возможного локального экстремума будет точка $M_0(0,0)$, которая , очевидно, принадлежит области.

Найдем точки возможного условного экстремума. Так как граница области определяется уравнением $(x-2)^2+(y+1)^2=20$, то функция Лагранжа будет следующей:

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+1+\lambda[(x-2)^2+(y+1)^2-20)],$$

а точки возможного условного экстремума будут решениями системы уравнений :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda(x-2)=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda(y+1)=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=(x-2)^2+(y+1)^2-20=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\lambda x-2\lambda=0, \\ y+\lambda y+\lambda=0, \\ (x-2)^2+(y+1)^2=20. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(1+\lambda)=2\lambda, \\ y(1+\lambda)=-\lambda, \\ (x-2)^2+(y+1)^2=20. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений (разделив первое на второе) получаем $\dfrac{x}{y}=-2$, или $x=-2y$. Подставляя полученное соотношение в третье уравнение, получим:

$$(2y+2)^2+(y+1)^2=20 \Rightarrow 4y^2+8y+4+y^2+2y+1=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y^2+10y-15=0 \Rightarrow y^2+2y-3=0 \Rightarrow y_1=1,\ y_2=-3.$$

Следовательно, точками возможного условного экстремума будут $M_1(-2,1)$ и $M_2(6,-3)$. Вычисляем значения функции в точках M_0, M_1 и M_2: $z(M_0)=1$, $z(M_1)=6$, $z(M_2)=46$. Значит, наибольшее значение функции достигается на границе области в точке $M_2(6,-3)$, а наименьшее – внутри области в точке $M_0(0,0)$.

2. Производственные мощности фирмы, производящей два вида продукции, позволяют за день производить в совокупности не более 90 единиц продукции. При производстве x единиц продукции первого вида и y единиц второго фирма несет затраты в $3xy+10x+10y+500$ гривен. При этом, рыночные цены на ее продукцию составляют $p_1=210-3x+y$ и $p_2=120+x-2y$ гривен соответственно.

Требуется определить оптимальный, приносящий максимум прибыли, план выпуска каждого вида продукции и цены, по которым будет продаваться продукция.

Решение. Прибыль, получаемая фирмой при производстве x ед. продукции первого вида и y ед. – второго будет равна

$$(210-3x+y)x+(120+x-2y)y-(3xy+10x+10y+500)=$$
$$=200x+110y-3x^2-2y^2-xy-500.$$

Следовательно, нужно искать наибольшее значение функции
$z=200x+110y-3x^2-2y^2-xy-500$, при условии, что $x+y\le 90$.

Найдем точки возможного локального экстремума:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=200-6x-y=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=110-4y-x=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=30,\\ y=20.\end{cases} \Rightarrow M_1(30,20).$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda)=200x+110y-3x^2-2y^2-xy-500+\lambda(x+y-90)$$

и найдем точки возможного условного экстремума:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=200-6x-y+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=110-4y-x+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y-90=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}90-5x+3y=0,\\ x+y-90=0.\end{cases} \Rightarrow x=y=45\ ;\ M_2(45,45).$$

Вычислим значения функции z в точках $M_1(30,20)$ и $M_2(45,45)$:

$$z(M_1)=200\cdot 30+110\cdot 20-3\cdot 30^2-2\cdot 20^2-30\cdot 20-500=3600,$$
$$z(M_2)=200\cdot 45+110\cdot 45-3\cdot 45^2-2\cdot 45^2-45\cdot 45-500=1300.$$

Следовательно, максимум прибыли (3600 грн) фирма получит, производя за день 30 ед. продукции первого вида и 20 ед. – второго. При этом цены за единицу продукции будут следующими:

$p_1=210-3\cdot 20+20=140$ гривен, $p_2=120+30-2\cdot 20=110$ гривен.

4.10. Построение эмпирических формул по способу наименьших квадратов

На практике часто зависимость между переменными величинами выражается в виде таблицы, полученной опытным путем. Это могут быть результаты эксперимента, данные наблюдений или измерений и т. п. Требуется выразить эту зависимость аналитически, т. е. дать формулу, связывающую между собой соответствующие значения переменных.

Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, принято называть ***эмпирическими формулами*** (функциями).

Необходимо иметь в виду, что подбор эмпирических формул по данным результатов наблюдений не может ставить задачу разгадать истинный характер зависимости между имеющимися переменными. Даже в том случае, когда мы точно знаем значения аргумента и функции, восстановить функцию по конечному числу ее значений – задача в общем случае неразрешимая. Если при этом еще учесть, что опытные данные, как правило, приближенные и зачастую содержат случайные ошибки измерения, то понятно, что в общем случае не может быть и речи о нахождении истинного характера зависимости между рассматриваемыми переменными.

Характер зависимости между переменными величинами, т. е. вид функции $y = f(x)$, предполагается известным или из теоретических соображений, или на основании характера расположения на координатной плоскости точек, соответствующих опытным данным, и задача подбора эмпирических формул сводится к тому, чтобы формула в каком-то смысле наилучшим образом описывала рассматриваемый процесс.

Очень часто при выборе параметров (коэффициентов) эмпирических формул пользуются так называемым ***принципом наименьших квадратов***. Этот принцип основан на том, что из данного множества формул вида $y = f(x)$ наилучшей считается та, для которой сумма квадратов отклонений наблюдаемых (опытных) значений от вычисленных является наименьшей.

Подбор параметров функции $f(x)$, основанный на этом принципе, называют ***способом наименьших квадратов***. Необходимо помнить, что способ наименьших квадратов применяется для подбора параметров, после того как вид функции $y = f(x)$ определен.

Покажем, как применяется способ наименьших квадратов для построения простейших эмпирических формул.

1. Пусть дана таблица значений переменных (табл. 3)

Таблица 3

x_i	x_1	x_2	…	x_n
y_i	y_i	y_2	…	y_n

и соответствующие точки $A_1(x_1, y_1),\ A_2(x_2, y_2), \ldots, A_n(x_n, y_n)$ располагаются вблизи некоторой прямой (рис. 10).

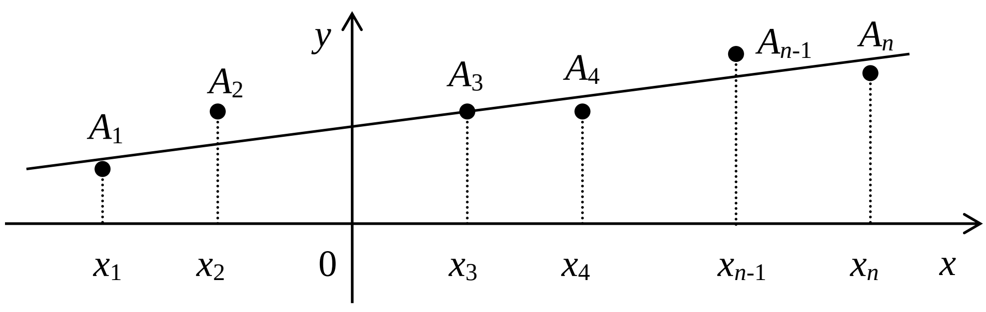

Рис. 10

В этом случае естественно искать эмпирическую формулу (функцию) в виде $y = ax + b$, где a и b – неизвестные параметры (коэффициенты). Эти параметры необходимо выбрать так, чтобы сумма квадратов отклонений вычисленных значений $ax_i + b$ от наблюдаемых значений y_i, т. е. величина

$$(ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2$$

принимала наименьшее значение. Таким образом, задача свелась к нахождению минимума функции $F(a,b)$ двух переменных a и b:

$$F(a,b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2,$$

которую, используя знак суммы $\sum$, кратко можно записать так:

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 . \qquad (33)$$

Согласно теореме 41, функция $F(a,b)$ принимает минимальное значение при тех значениях a и b, при которых обращаются в нуль частные производные этой функции по каждой переменной, т. е. когда

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 0 \text{ и } \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 0, \text{ или } \begin{cases} 2\sum\limits_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ 2\sum\limits_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Последние равенства удобно записать так:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x^2{}_i + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = 0, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n - \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 0. \end{cases} \qquad (34)$$

Таким образом, нахождение параметров a и b свелось к решению системы (34) двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Решив эту систему и определим параметры (коэффициенты) a и b.

2. Пусть таблица значений переменных (табл. 3) определяет точки, располагающиеся вблизи некоторой параболы (рис. 11).

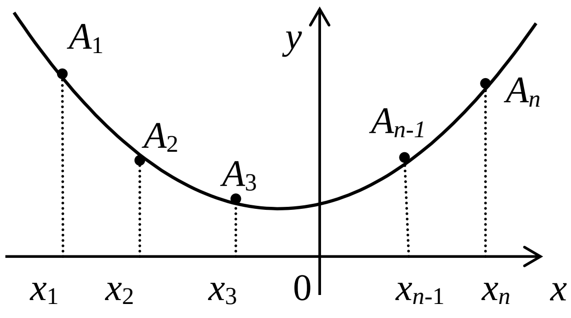

Рис. 11

В качестве эмпирической формулы (функции) возьмем трехчлен второй степени $y = ax^2 + bx + c$. В этом случае сумма квадратов отклонений, т. е. выражение, аналогичное (35), имеет вид:

$$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2.$$

Это функция трех переменных $a,\ b,\ c$.

Находя частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial a}, \dfrac{\partial F}{\partial b}, \dfrac{\partial F}{\partial c}$ и приравнивая их нулю,

получим систему уравнений: $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i^2 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) = 0. \end{cases}$

которую удобно записать так:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 y_i = 0, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i - \sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i = 0, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i + cn - \sum\limits_{i=1}^{n}y_i = 0. \end{cases} \qquad (35)$$

Решив эту систему уравнений, найдем значения коэффициентов $a,\ b$ и c эмпирической формулы (функции) $y = ax^2 + bx + c$.

Замечание. Раньше, чем использовать на практике полученную эмпирическую формулу, следует ее проанализировать. С этой целью вычисляют значения $y(x_i)$ полученной эмпирической формулы в точках x_i наблюдения и сравнивают их с соответствующими значениями y_i, полученными опытным путем (табл. 4).

Таблица 4

x_i	x_1	x_2	…	x_n
y_i	y_1	y_2	…	y_n
$y(x_i)$	$y(x_1)$	$y(x_2)$	…	$y(x_n)$
$y(x_i)-y_i$	$y(x_1)-y_1$	$y(x_2)-y_2$	…	$y(x_n)-y_n$

Если отклонения $y(x_i)-y_i$ допустимы, то полученную эмпирическую формулу принимают для использования на практике. Если же отклонения $y(x_i)-y_i$ не допустимы, то такая эмпирическая формула не используется, а ищется новая (другого вида) формула (функция).

Проиллюстрируем изложенное выше на примере.

Пример. Известна себестоимость y_i ден. ед. единицы готовой продукции, производимой фирмой при некоторых объемах x_i ед. выпуска (табл. 5).

Таблица 5

x_i	7	12	17	22	27	32	37
y_i	83,7	72,9	63,2	54,7	47,5	41,4	36,3

Требуется определить ориентировочную себестоимость единицы готовой продукции при объеме выпуска x = 50 ед.

Решение. Для ответа на поставленный вопрос, очевидно, вначале необходимо построить эмпирическую формулу.

Построим формулу $y=ax+b$. Для удобства составления системы (34), из которой находятся коэффициенты a и b, построим табл. 6.

Таблица 6

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
1	7	83,7	585,9	49
2	12	72,9	874,8	144
3	17	63,2	1074,4	289
4	22	54,7	1203,4	484
5	27	47,5	1282,5	729
6	32	41,4	1324,8	1024
7=n	37	36,3	1343,1	1369
$\sum$	154	399,7	7688,9	4088

В последней строке $(\sum)$ записаны суммы соответствующих столбцов. Следовательно, в нашем случае система (34) будет такой:

$$\begin{cases} 4088a + 154b - 7688{,}9 = 0 \\ 154a + \quad 7b - 399{,}7 = 0 \end{cases}.$$

Решение этой системы дает следующие значения коэфициентов (параметров): $a=-1{,}59$; $b=92{,}13$. Значит, искомой эмпирической формулой (функцией) будет $y=-1{,}59x+92{,}13$.

Проанализируем полученный результат, составив табл. 7.

Таблица 7

x_i	7	12	17	22	27	32	37
y_i	83,7	72,9	63,2	54,7	47,5	41,4	36,3
$y(x_i)$	81,00	73,05	65,10	57,15	49,20	41,25	33,3
$y(x_i)-y_i$	-2,70	0,15	1,90	2,45	1,70	-0,15	-3,00

Так как для целого ряда значений x_i отклонения $y(x_i)-y_i$ достаточно велики, то от полученной эмпирической формулы следует отказаться.

Построим формулу (функцию) $y = ax^2 + bx + c$.

Для удобства составления системы (35), из которой находятся параметры (коэффициенты) a, b и c, построим табл. 8.

Таблица 8

i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	7	49	343	2401	83,7	585,9	4101,3
2	12	144	1728	20736	72,9	874,8	10497,6
3	17	289	4913	83521	63,2	1074,4	18264,8
4	22	484	10648	234256	54,7	1203,4	26474,8
5	27	729	19683	531441	47,5	1282,5	34627,5
6	32	1024	32768	1048576	41,4	1324,8	42393,6
7=n	37	1369	50653	1874161	36,3	1343,1	49694,7
$\sum$	154	4088	120736	3795092	399,7	7688,9	186054,3

Для определения параметров a, b и c получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 4088a &+ 154b + 7c = 399{,}7 \\ 120736a &+ 4088b + 154c = 7688{,}9 \\ 3795092a &+ 120736b + 4088c = 186054{,}3. \end{aligned}$$

Решив эту систему, получим: $a = 0{,}0234$, $b = -2{,}61$, $c = 100{,}85$.

Следовательно, искомая эмпирическая формула запишется так:

$$y = 0{,}0234x^2 - 2{,}61x + 100{,}85.$$

Согласованность полученной эмпирической формулы с опытными данными показывает табл. 9.

Таблица 9

x_i	7	12	17	22	27	32	37
y_i	83,7	72,9	63,2	54,7	47,5	41,4	36,3
$y(x_i)$	83,73	72,90	63,24	54,76	47,44	41,29	36,31
$y(x_i)-y_i$	0,03	0	0,04	0,06	-0,06	-0,11	0,01

Следовательно, эмпирическая формула $y = 0{,}0234x^2 - 2{,}61x + 100{,}85$ пригодна для использования. Используя ее, ответим на поставленный в условиях задачи вопрос. Для этого найдем значение эмпирической формулы при $x = 50$: $y(50) = 0{,}0234 \cdot 50^2 - 2{,}61 \cdot 50 + 100{,}85 = 28{,}85$.

Значит, ориентировочная себестоимость единицы готовой продукции при объеме выпуска $x = 50$ ед. будет составлять $28{,}85$ ден. ед.

Заметим, что если бы мы использовали отвергнутую в результате анализа эмпирическую формулу $y = -1{,}59x + 92{,}13$, то имели бы $y(50) = 12{,}63$ ден. ед., что существенно отличается от полученного нами результата.

Эмпирические формулы не претендуют на роль законов природы, а являются всего лишь гипотезами, более или менее удовлетворительно согласующимися с полученными опытными данными. Однако значение их весьма велико. В истории науки известны многочисленные примеры того, как получение удачной эмпирической формулы приводило к большим научным открытиям.

5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Основной задачей дифференциального исчисления является задача об отыскании функции $f(x)$, являющейся производной некоторой функции $F(x)$, т. е. функции $f(x)=F'(x)$.

В интегральном исчислении решается обратная задача: функция $f(x)$ задана, а требуется найти в области определения $f(x)$ такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (a,b) (конечном или бесконечном).

Функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** (или просто ***первообразной***) функции $f(x)$ на интервале (a,b), если в любой точке $x\in(a,b)$ функция $F(x)$ дифференцируема и при этом $F'(x)=f(x)$.

Так, например, функция $F(x)=\sin x$ является первообразной функции $f(x)=\cos x$ на всей числовой прямой $(-\infty,\infty)$; функция $F(x)=\ln x$ – первообразной функции $f(x)=\frac{1}{x}$ для всех $x>0$; функция $F(x)=\arcsin x$ – первообразной функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1,1)$.

Однако, если отыскание производной данной функции – операция однозначная, то отыскание первообразной является не однозначной задачей. Действительно, например, для функции $f(x)=\sin x$ первообразными будут и функция $F_1(x)=-\cos x+2$, и функция $F_2(x)=-\cos x-15$, и функция $F_3(x)=-\cos x+\sqrt{2}$ и т. д., т. е., вообще говоря, функция вида $F(x)=-\cos x+C$, где C – произвольная постоянная, так как $(-\cos x+C)'=\sin x$.

Очевидно, что если $F(x)$ – первообразная функция $f(x)$ на интервале (a,b), то функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$ на интервале (a,b) ($[F(x)+C]'=F'(x)=f(x),\ x\in(a,b)$).

<u>**Теорема 43**</u>. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные одной и той же функции $f(x)$, то разность между ними равна постоянной, т. е. $F_1(x)-F_2(x)=C$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные от $f(x)$. Согласно определению первообразной, это означает, что в области определения функции $f(x)$ имеют место равенства: $F_1'(x)=f(x)$ и

$F_2'(x) = f(x)$. Обозначим через $\varphi(x)$ разность между $F_1(x)$ и $F_2(x)$, т. е. $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Тогда будем иметь

$$\varphi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Таким образом, $\varphi'(x) \equiv 0$. Из этого равенства и теоремы Лагранжа следует, что $\varphi(x)$ есть постоянная. Теорема доказана.

Таким образом, если $F_1(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$ на интервале (a,b), то любая другая первообразная $F_2(x)$ функции $f(x)$ на интервале (a,b) представима в виде $F_2(x) = F_1(x) + C$, где C – некоторая постоянная.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале (a,b) называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ (на этом интервале) и обозначается символом $\int f(x)dx$.

В этом обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, а сама функция $f(x)$ – подынтегральной функцией.

Таким образом, если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$ на интервале (a,b), то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – любая постоянная.

Равенство $\int f(x)dx = F(x) + C$ следует понимать как равенство множеств.

Согласно определению, в этом равенстве под знаком интеграла стоит дифференциал любой из первообразных $F(x)$ функции $f(x)$:

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Естественно возникает вопрос: у каждой ли функции $f(x)$ существует первообразная $F(x)$? Ответ на этот вопрос будет дан позже. Пока только отметим (без доказательства), что у всякой непрерывной на интервале (a,b) функции существует на этом интервале первообразная $F(x)$, т. е. неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$. Таким образом, если для дифференцируемости $f(x)$ на интервале (a,b) условие непрерывности функции $f(x)$ было необходимым, то для существования неопределенного интеграла $\int f(x)dx$ оно является достаточным.

5.2. Основные свойства неопределенного интеграла

Первые три свойства непосредственно вытекают из определения неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то и функции $f_1(x) \pm f_2(x)$ также имеют первообразные, причем

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x)\, dx.$$

Свойство 4 справедливо для алгебраической суммы любого конечного числа функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, имеющих первообразные.

5. Если функция $f(x)$ имеет первообразную, а k – постоянная, то справедливо равенство:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Справедливость этих свойств вытекает непосредственно из определения неопределенного интеграла и свойств производной.

5.3. Таблица основных интегралов

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции, называемая ***операцией интегрирования***, является обратной операции дифференцирования, т. е. операции нахождения по данной функции ее производной. Поэтому всякая формула для производных конкретных функций – формула вида $F'(x) = f(x)$ – приводит, в силу определения неопределенного интеграла, к соответствующей формуле интегрального исчисления

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Используя это соображение, приходим к таблице основных интегралов, получающейся непосредственно из соответствующей таблицы производных элементарных функций.

1. $\int 0dx = C$.
2. $\int 1dx = x + C$.
3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
5. $\int a^x dx = \dfrac{1}{\ln a} a^x + C$.
6. $\int e^x dx = e^x + C$.
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$.
12. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$.

К таблице основных интегралов относят также следующие формулы:

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1})+C \quad (|x|>1)$.

15. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C \quad (|x|\neq 1)$.

16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \quad (a\neq 0)$.

17. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \quad (a\neq 0)$.

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0,\ \ |x|<a)$.

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$.

20. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x|+C$.

21. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x|+C$.

Эти формулы не имеют аналогов среди формул таблицы производных. То, что производными функций, стоящих в правых частях этих формул, являются соответствующие подынтегральные функции, проверяется непосредственным дифференцированием.

С помощью интегралов 1-21, называемых обычно ***табличными интегралами***, и свойств неопределенного интеграла можно выразить интегралы и от более сложных элементарных функций также через элементарные функции. Вместе с тем интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными функциями. Примерами таких интегралов могут служить следующие: $\int e^{-x^2}dx$; $\int \sin(x^2)dx$; $\int \frac{\sin x}{x}dx$. Каждый из указанных интегралов представляет собой функцию, не являющуюся элементарной.

Если первообразная некоторой функции $f(x)$ является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)dx$ выражается через элементарные функции или что этот интеграл вычисляется.

5.4. Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование. Непосредственным интегрированием называют интегрирование, заключающееся в прямом применении свойств неопределенного интеграла и формул из таблицы основных интегралов.

Пример. Найти $\int(\sin x+2e^x-x^2)dx$.

Решение. $\int(\sin x+2e^x-x^2)dx=\int\sin xdx+2\int e^x dx-\int x^2 dx=$

$$=-\cos x+2e^x-\frac{x^3}{3}+C.$$

2. Интегрирование заменой переменных. Замена переменной – один из наиболее часто встречающихся приемов интегрирования.

Этот метод применяется тогда, когда искомый интеграл не является табличным, но путем введения новой переменной интегрирования он может быть сведен к табличному.

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, положив $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию $t=t(x)$. Получим:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (36)$$

Здесь подразумевается, что после интегрирования в правой части равенства вместо t будет подставлено его выражение через x: $t=t(x)$.

Функцию $x=\varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы после замены переменной можно было упростить нахождение неопределенного интеграла, стоящего в правой части равенства (36).

Формулу (36) часто используют в обратном порядке. Для этого запишем ее в следующем виде:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(t)dt. \qquad (37)$$

Здесь подразумевается, что после интегрирования в правой части вместо t будет подставлено $\varphi(x)$. Формулу (37) обычно называют формулой интегрирования подстановкой.

Примеры.

1. Вычислить $\int e^{5x}dx$.

Решение. Для вычисления этого интеграла естественно сделать следующую замену (подстановку): $t=5x$. Тогда $dt=5dx$ и $dx=\frac{1}{5}dt$. В результате получим $\int e^{5x}dx=\frac{1}{5}\int e^t dt=\frac{1}{5}e^t+C=\frac{1}{5}e^{5x}+C$.

2. Вычислить $\int e^x\sin e^x dx$.

Решение. Видно, что в данном случае удобно воспользоваться заменой $t=e^x$. Условимся в дальнейшем пользоваться следующей формой записи: $\int e^x\sin e^x dx=\left|\begin{matrix} t=e^x \\ dt=e^x dx\end{matrix}\right|=\int\sin tdt=-\cos t+C=-\cos e^x+C$.

3. Вычислить $\int \sin^5 x \cos x dx$.

Решение. Здесь удобна замена $t = \sin x$.

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

4. Вычислить $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx$.

Решение. $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \left| \begin{matrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C$.

При вычислении неопределенных интегралов бывает полезно помнить, что если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$,

$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$, $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$. Эти равенства являются следствием формулы (37).

3. Интегрирование по частям. Этот метод относится к числу весьма эффективных методов интегрирования и основан на следующей теореме.

Теорема 44. Если функции $U = U(x)$ и $V = V(x)$ дифференцируемы на некотором интервале и интеграл $\int VdU$ существует, то существует и интеграл $\int UdV$, при этом

$$\int UdV = UV - \int VdU. \qquad (38)$$

Доказательство. Запишем дифференциал произведения функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$: $d(UV) = VdU + UdV$. Отсюда $UdV = d(UV) - VdU$.

Принимая во внимание, что из равенства дифференциалов функций следует равенство их неопределенных интегралов, получим $\int UdV = \int d(UV) - \int VdU$. Так как по условию существует $\int VdU$ и $\int d(UV) = UV + C$ (свойство 3 неопределенного интеграла), то существует и $\int UdV$, при этом $\int UdV = UV - \int VdU$. Теорема доказана.

Формула (38) сводит вопрос о вычислении интеграла $\int UdV$ к вычислению интеграла $\int VdU$. Вычисление интеграла $\int UdV$ при помощи формулы (38) называют интегрированием по частям. Функция V, которую находим по дифференциалу dV (интегрированием), определяется неоднозначно. Обычно в качестве функции V выбирается функция, записывающаяся наиболее простой формулой.

Большая часть интегралов, которые находят посредством интегрирования по частям, может быть разбита на две группы.

1. Интегралы, подынтегральная функция которых представляет произведение многочлена $P_n(x)$ на одну из следующих функций: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, …. Интегрируя по частям, в этом случае в качестве функции $U(x)$ берут указанную выше функцию.

2. Интегралы, подынтегральная функция которых представляет произведение многочлена $P_n(x)$ на $\sin ax$, $\cos ax$ или e^{ax}, где a – некоторое число. Такие интегралы вычисляются путем n– кратного применения формулы интегрирования по частям. При этом каждый раз в качестве функции $U(x)$ берется многочлен, степень которого после каждого интегрирования понижается на единицу.

Примеры.

1. Вычислить $\int x^5 \ln x dx$.

Решение. Обозначим $U = \ln x,\ dV = x^5 dx$ и найдем $dU = \dfrac{dx}{x},\ V = \dfrac{x^6}{6}$.

Все наши обозначения и вычисления удобно записывать следующим образом:

$$\int x^5 \ln x dx = \begin{vmatrix} U = \ln x & dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = x^5 dx & V = \dfrac{x^6}{6} \end{vmatrix} = \frac{x^6}{6}\ln x - \int \frac{x^6}{6}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{1}{6}\int x^5 dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{1}{36}x^6 + C.$$

2. Вычислить $\int x^2 \sin x dx$.

Решение. $\int x^2 \sin x dx = \begin{vmatrix} U = x^2, & dU = 2x dx \\ dV = \sin x dx, & V = -\cos x \end{vmatrix} =$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} U = x, & dU = dx \\ dV = \cos x dx, & V = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Указанные выше две группы интегралов не исчерпывают все интегралы, находящиеся посредством интегрирования по частям.

5.5. Понятие определенного интеграла

Рассмотрим вначале задачу о нахождении объема выпуска продукции z, произведенной фирмой за промежуток времени $[T_1, T_2]$. Пусть $y = f(t)$ – производительность труда фирмы в момент времени $t \in [T_1, T_2]$. Если производительность труда в промежуток времени $[T_1, T_2]$ не меняется, т. е. $f(t) = c = \text{const}$ при $t \in [T_1, T_2]$, то,очевидно, $z = c(T_2 - T_1)$. Если же производительность труда $f(t)$ меняется с течением времени, то величину объема продукции приближенно можно вычислить следующим образом. Разобьем интервал $[T_1, T_2]$ на более мелкие промежутки (интервалы) точками $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T_2$. На каждом частичном интервале $[t_{k-1}, t_k]$ вычислим приближенно объем произведенной продукции Δz_k, считая, что в этом промежутке производительность труда была постоянной, равной $f(t_k)$. Тогда будем иметь: $\Delta z_k = f(t_k)\Delta t_k$, где $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ и $z \approx \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta z_k = \sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t_k$. Понятно, что это равенство будет тем точнее, чем меньше промежутки $[t_{k-1}, t_k]$, т. е. чем меньше Δt_k. Поэтому, величину объема выпуска продукции за промежуток $[T_1, T_2]$ следует считать равной $z = \lim\limits_{\max \Delta t_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t_k$.

Потребность вычисления таких пределов приводит к понятию определенного интеграла.

Пусть на интервале $[a, b]$ задана ограниченная функция $y = f(x)$. Разобьем интервал $[a, b]$ на n произвольных частей (частичных интервалов) точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$;

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

и обозначим через $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_k, \ldots, \Delta x_n$ соответственно длины частичных интервалов $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. На каждом из этих интервалов выберем произвольную точку c_k $(x_{k-1} \le c_k \le x_k)$ и рассмотрим следующую сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sigma(x_k, c_k). \tag{39}$$

Эта сумма называется ***интегральной***. Будем искать предел интегральной суммы (39) в предположении, что длины Δx_k всех частичных интервалов $[x_{k-1}, x_k]$ стремятся к нулю (очевидно, что при этом число n этих интервалов неограниченно растет), т. е. будем искать

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sigma(x_k, c_k). \tag{40}$$

Функция $f(x)$ называется ***интегрируемой на интервале*** $[a, b]$, если существует конечный предел (40), не зависящий от того, каким образом интервал $[a, b]$ делится на частичные интервалы и каким образом выбираются точки c_k на этих частичных интервалах, лишь бы длина каждого частичного интервала стремилась к нулю. Этот предел называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на интервале $[a,b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sigma(x_k, c_k).$$

Из определения определенного интеграла следует, что его величина не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \ldots = \int\limits_a^b f(y)dy.$$

Возвращаясь к задаче о нахождении объема выпуска продукции получаем: если $f(t)$ – производительность труда в момент времени $t \in [T_1, T_2]$, то $\int\limits_{T_1}^{T_2} f(t)dt = z$ – объем продукции, выпущенной за промежуток времени $[T_1, T_2]$.

Из определения определенного интеграла следует, что не любая функция интегрируема на любом интервале.

Покажем, что функция $f(x) = C = \text{const}$ интегрируема на любом интервале $[a,b]$. Так как для любого разбиения отрезка $[a,b]$ и любого выбора точек $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\sigma(x_k, c_k) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} C\Delta x_k = C\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = C(b-a),$$

то $\int\limits_a^b Cdx = \lim\limits_{\max \Delta x_K \to 0} \sigma(x_k, c_k) = C(b-a)$.

Приведем без доказательства важную для дальнейшего теорему.

Теорема 45. Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a,b]$, то она интегрируема на этом интервале, т. е. существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

При определении определенного интеграла мы предполагали, что $a < b$. В случае, когда $a > b$, под $\int\limits_a^b f(x)dx$ понимают $-\int\limits_b^a f(x)dx$, т. е. считают, что $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$. Также считают, что если функция $f(x)$

определена в точке a, то $\int_a^a f(x)dx = 0$. В заключение заметим, что если $f(x)$ интегрируема на интервале $[a,b]$, то она интегрируема и на любом другом интервале $[c,d]$, являющемся частью интервала $[a,b]$.

5.6. Основные свойства определенного интеграла

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на интервале $[a,b]$ и c – внутренняя точка этого интервала, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2. Если функция $f(x)$ интегрируема на интервале $[a,b]$, а k – произвольное число, то

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

3. Если $f(x)$ и $g(x)$ – интегрируемые на интервале $[a,b]$ функции, то

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$$

т. е. определенный интеграл от алгебраической суммы интегрируемых функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

Доказательства свойств 1-3 вытекают непосредственно из определения определенного интеграла и свойств пределов.

4. Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a,b]$, то внутри этого интервала найдется такая точка c, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c). \qquad (41)$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a,b]$,то на этом интервале она достигает своего наименьшего и наибольшего значений. Обозначим через m и M соответственно ее наименьшее и наибольшее значения. Разобьем интервал $[a,b]$ на n частичных интервалов точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ и обозначим через Δx_k длину соответствующего частичного интервала. В силу того, что на интервале $[a,b]$ $m \le f(x) \le M$

и $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$,

при любом выборе c_k из интервалов Δx_k будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \geq m\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = m(b-a),$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \leq M\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = M(b-a),$$

или $$m(b-a) \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \leq M(b-a).$$

В этом неравенстве перейдем к пределу при условии, что все Δx_k стремятся к нулю. Получим: $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Последние неравенства запишем так: $m \leq \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leq M$.

Таким образом, число $\alpha = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ заключено между наименьшим m и наибольшим M значениями непрерывной функции $f(x)$. Тогда из свойств непрерывной на замкнутом интервале функции следует, что на интервале $[a,b]$ найдется по крайней мере одна точка c, такая, что $f(c)=\alpha$, т. е. $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Из этого равенства и вытекает свойство 4.

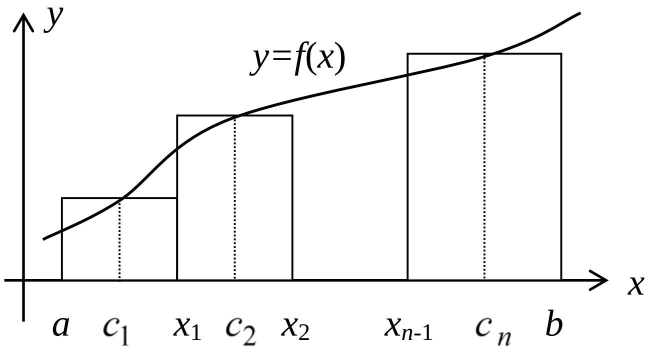

Рис. 12

5.7. Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$ (т. е. кривой, представляющей график непрерывной функции $y=f(x)$), осью $0x$ и прямыми $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$. Такую фигуру называют криволинейной трапецией.

Будем считать для простоты, что на интервале $[a,b]$ функция $f(x)$ положительная, т. е. принимает только положительные значения (рис. 12).

Для решения поставленной задачи поступим следующим образом. Разобьем интервал $[a,b]$ на n произвольных частей и обозначим абсциссы точек деления через $x_1, x_2, \ldots,$ x_{n-1} ($a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < \; < x_n = b$), а через Δx_1, Δx_2, …, Δx_n соответственно длины интервалов $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$. На каждом частичном интервале $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольную точку c_k и в этой точке восстановим перпендикуляр до пересечения с кривой $y = f(x)$. Рассмотрим n прямоугольников с основаниями, равными $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, и высотами, равными $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n)$ соответственно. Сумма площадей всех этих прямоугольников

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \,,$$

представляющая площадь ступенчатой фигуры, состоящей из n прямоугольников, дает приближенное значение искомой площади S криволинейной трапеции. Ясно, что площадь S_n тем меньше будет отличаться от искомой площади S криволинейной трапеции, чем мельче будут интервалы $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.

Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции естественно принять предел суммы $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ в предположении, что длина Δx_k каждого из интервалов неограниченно уменьшается, т. е.

$$S = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \,.$$

Таким образом, в случае, когда график функции $y = f(x)$ располагается над осью $0x$, т. е. когда $f(x) \ge 0$, определенный интеграл равен площади S криволинейной трапеции.

Нетрудно видеть, что если $f(x) \le 0$ на интервале $[a,b]$, т. е. кривая $y = f(x)$ располагается под осью $0x$, то определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, взятой со знаком минус.

5.8. Вычисление определенного интеграла

Естественно возникает вопрос: существует ли связь между определенным и неопределенным интегралом от одной и той же функции? Несмотря на то, что неопределенный интеграл – это функция (точнее множество функций), а определенный интеграл – число, положительный ответ на этот вопрос дает теорема Ньютона-Лейбница, доказательство которой будет дано ниже.

Пусть $y = f(x)$ – непрерывная на интервале $[a,b]$ функция. Рассмотрим определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Зафиксируем нижний предел a, а верхний будем изменять. Очевидно, что определенный интеграл будет функцией своего верхнего предела. Чтобы иметь привычные обозначения, верхний предел обозначим через x $(a \le x \le b)$, подынтегральное выражение – $f(t)dt$. Тогда определенный интеграл будет функцией от x, т. е. $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$. Такой интеграл называется ***определенным интегралом с переменным верхним пределом***.

При $f(t) \ge 0$ функция $\Phi(x)$ выражает собой переменную площадь криволинейной трапеции $aAXx$ (рис. 13). Кроме того, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ обладает замечательным свойством, которое можно выразить следующей теоремой.

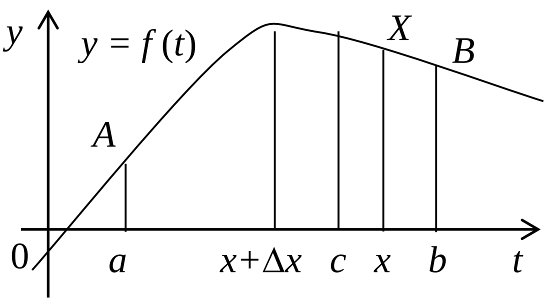

Рис. 13

<u>**Теорема 46**</u>. Если $f(t)$ непрерывная функция на $[a,b]$, а $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, то $\Phi'(x) = f(x)$, т. е. производная от определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на верхнем пределе.

<u>Доказательство</u>. Дадим x приращение Δx (на рис. 13 $\Delta x < 0$). Тогда функция $\Phi(x)$ получит приращение

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

По свойству 1 определенного интеграла $\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$,

поэтому $\Delta\Phi = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$. По свойству 4 $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)(x+\Delta x - x) = f(c)\Delta x$, т. е. $\Delta\Phi = f(c)\Delta x$, где $x+\Delta x < c < x$.

Согласно определению производной,будем иметь

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

Но при $\Delta x \to 0$ $c \to x$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim\limits_{c \to x} f(c)$. Так как $f(t)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\lim\limits_{c \to x} f(c) = f(x)$. Итак, $\Phi'(x) = f(x)$. Теорема доказана.

<u>Следствие</u>. Если функция $f(t)$ на отрезке $[a,x]$ непрерывна, то, согласно доказанной теореме, существует определенный интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$, т. е. существует функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, являющаяся первообразной для функции $y = f(x)$. Тем самым доказана основная теорема интегрального исчисления.

<u>Теорема 47.</u> Всякая непрерывная функция имеет первообразную.

Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема 46 позволяет установить простой метод вычисления определенных интегралов, не прибегая к суммированию и предельному переходу. Как было установлено выше, функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной для непрерывной функции $f(x)$. Согласно теореме 43, любая другая первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $\Phi(x)$ только постоянным слагаемым, т. е. $F(x) = \Phi(x) + C$.

Следовательно, $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - C$. Для определения постоянной C положим $x = a$; тогда $0 = \int\limits_a^a f(t)dt = F(a) - C$, откуда $C = F(a)$. Значит,

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Полагая в последнем равенстве $x = b$, получим формулу Ньютона-Лейбница: $$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Так как определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, то формулу Ньютона-Лейбница можно переписать так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (42)$$

Введем обозначения: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$. Тогда (42) можно переписать так: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Заметим, что разность $F(b) - F(a)$ не зависит от выбора первообразной $F(x)$. Действительно,

$$[F(x) + C]\Big|_a^b = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбница показывает, что для вычисления определенного интеграла нужно найти какую-нибудь первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$ и взять разность значений $F(x)$ при $x = b$ и $x = a$. Другими словами, определенный интеграл равен приращению первообразной для подынтегральной функции на отрезке интегрирования.

Примеры.

1. Производительность труда фирмы в течение рабочего дня определяется формулой $y = 12 + \dfrac{1}{(t+1)^2}$. Определить объем продукции z, произведенной фирмой за первые 3 часа работы.

<u>Решение.</u> Так как $-\dfrac{1}{t+1}$ является первообразной функции $\dfrac{1}{(t+1)^2}$, то интересующий нас объем произведенной продукции будет следующим:

$$z = \int\limits_0^3 \left(12 + \frac{1}{(t+1)^2}\right)dt = \left(12t - \frac{1}{1+t}\right)\Bigg|_0^3 = 36 - \frac{1}{4} + 1 = 36{,}75.$$

2. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>Решение</u>. Так как $\arcsin x$ является первообразной для $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

Замена переменной в определенном интеграле. Пусть при вычислении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ нужно сделать замену переменной по формуле $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ монотонная на интервале $[\alpha,\beta]$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi(\alpha)=a, \quad \varphi(\beta)=b, \tag{43}$$

а функции $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ и $f(\varphi(t))$ непрерывны на $[\alpha,\beta]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{44}$$

Действительно, если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$, то по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \tag{45}$$

Покажем, что если в первообразной $F(x)$ положить $x=\varphi(t)$, то $F(\varphi(t))$ будет первообразной для функции $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$. Найдем производную сложной функции $F(\varphi(t))$, где промежуточным аргументом есть $\varphi(t)=x$, по новой переменной t:

$$F_t'(\varphi(t))=\frac{dF(\varphi(t))}{d\varphi(t)}\cdot\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{d\varphi(t)}{dt}=$$
$$=F'(x)\cdot\varphi'(t)=f(x)\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Следовательно, по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)).$$

Учитывая условия (43), получим:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(b)-F(a). \tag{46}$$

Из равенств (45) и (46) получаем ***формулу замены переменной*** (44).

При замене переменной в определенном интеграле нет необходимости возвращаться к прежней переменной, достаточно лишь ввести новые пределы интегрирования по формулам (43).

Примеры.

1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$.

Решение. Сделаем замену: $x = 3\sin t$. Тогда $dx = 3\cos t\, dt$, а $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = 3\cos t$. Найдем новые пределы интегрирования:

при $x = 0$ $\quad 3\sin t = 0$, т. е. $t=0$,

при $x = 3$ $\quad 3\sin t = 3$, т. е. $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Итак, после замены переменной и пределов интегрирования имеем

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 9\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{9}{2}\left(t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{9}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{9}{4}\pi.$$

2. Вычислить определенный интеграл $\int_1^5 x\sqrt{x-1}dx$.

Решение. Положим $\sqrt{x-1} = t$. Тогда $x = t^2 + 1$, $dx = 2tdt$, а $x\sqrt{x-1}dx = 2(t^4 + t^2)dt$. Новые пределы интегрирования получим из равенства $\sqrt{x-1} = t$. Полагая $x = 1$, получим $t = 0$; полагая $x = 5$, получим $t = 2$. Итак,

$$\int_1^5 x\sqrt{x-1}dx = 2\int_0^2 (t^4 + t^2)dt = 2\frac{t^5}{5}\Big|_0^2 + 2\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^2 =$$

$$= 2\left(\frac{32}{5} - 0\right) + 2\left(\frac{8}{3} - 0\right) = \frac{64}{5} + \frac{16}{3} = 18\frac{2}{15}.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле. Пусть $U(x)$ и $V(x)$ – две дифференцируемые функции на интервале $[a,b]$. Тогда $d(UV) = VdU + UdV$. Интегрируя обе части полученного тождества в пределах от a до b, получим:

$$\int_a^b d(UV) = \int_a^b VdU + \int_a^b UdV. \qquad (47)$$

Так как по формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b d(UV) = UV\Big|_a^b$, то равенство (47) принимает вид $UV\Big|_a^b = \int_a^b VdU + \int_a^b UdV$, или

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU. \qquad (48)$$

Формула (48) называется формулой ***интегрирования по частям*** в определенном интеграле.

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{2\pi} x\sin 2xdx$.

Решение. Положим $U = x$, $dV = \sin 2xdx$.

Тогда $dU = dx$, $V = -\frac{1}{2}\cos 2x$. Применяя формулу (48), получим:

$$\int_0^{2\pi} x\sin 2xdx = -\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2xdx = -\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\cos 4\pi + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot\cos 0 + \frac{1}{4}(\sin 4\pi - \sin 0) = -\pi.$$

5.9. Вычисление площадей

Как отмечалось ранее, если функция $y = f(x)$ на интервале $[a,b]$ непрерывна и положительна, то площадь криволинейной трапеции, имеющей основание $[a,b]$ и ограниченной сверху графиком этой функции, а по бокам прямыми $x = a$ и $x = b$,

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (49)$$

Если же на $[a,b]$ непрерывная функция $y = f(x)$ не положительная, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx \le 0$, а абсолютная величина этого интеграла равна площади соответствующей криволинейной трапеции, т. е

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (50)$$

Формулы (49) и (50) можно объединить в одну:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (51)$$

Поэтому, если функция $y = f(x)$ на интервале $[a,b]$ меняет знак, то для вычисления площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью $0x$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, мы должны пользоваться формулой (51). Формула же (49) дает нам разность площадей частей фигуры, находящихся выше и ниже оси $0x$.

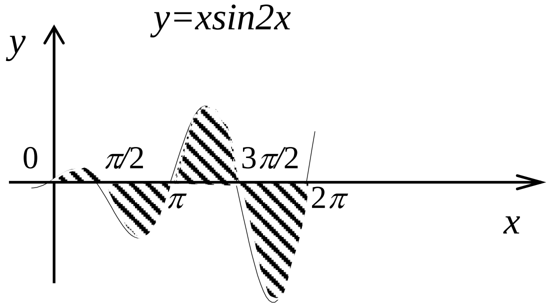

Рис. 14

Пример. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной кривой $y = x\sin 2x$ и осью $0x$ при $0 \le x \le 2\pi$ (рис. 14).

<u>Решение.</u> Функция $y = x\sin 2x$ на интервале $(0,\ 2\pi)$ меняет знак в точках $\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{3}{2}\pi$. Поэтому искомая площадь

$$S = \int_0^{2\pi} |x\sin 2x| dx = \int_0^{\pi/2} x\sin 2x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x\sin x dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} x\sin 2x dx - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} x\sin 2x dx .$$

В конце предыдущего пункта (пример) при вычислении определенного интеграла $\int_0^{2\pi} x\sin 2x dx$ было установлено, что функция $-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$ является первообразной для функции $x\sin 2x$. Поэтому искомая площадь

$$S = \left(-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi/2} - \left(-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} - \left(-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} =$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\pi+\frac{5}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=4\pi.$$

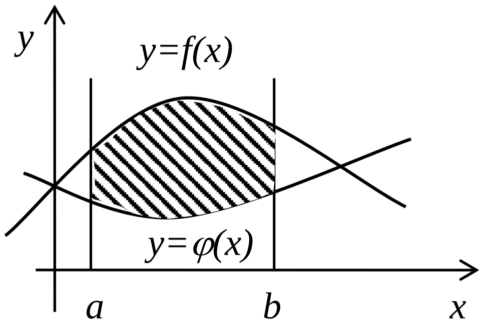

Рис. 15

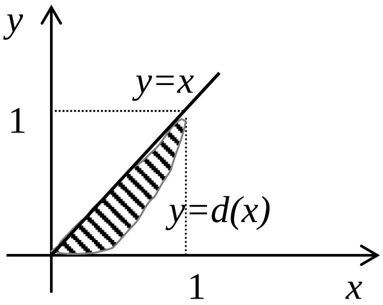

Рис. 16

Если нужно вычислить площадь, ограниченную кривыми $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ и прямыми $x=a,\ x=b$ (рис. 15), то при условии, что $f(x)\ge\varphi(x)$ на $[a,b]$, будем иметь

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b \varphi(x)dx=\int_a^b\left[f(x)-\varphi(x)\right]dx. \qquad (52)$$

При анализе социально-экономического строения общества, т. е. при оценке степени неравенства в распределении доходов среди населения, используется так называемая «диаграмма или кривая Джинни» распределения богатства в обществе (рис. 16).

Функция $y=d(x)$ определяет долю x общества, имеющую долю дохода не более $d(x)$. Если доход в обществе распределен равномерно, то кривая $y=d(x)$ является прямой $y=x$.

Если же доход распределяется неравномерно, то кривая Джинни располагается под прямой $y=x$ (см. рис. 16).

Площадь оборазовавшейся фигуры характеризует степень неравномерности распределения доходов в обществе. Чем больше площадь этой фигуры, тем неравномернее распределено богатство в обществе.

Величина этой площади k называется «коэффициентом Джинни».

Видно, что при равномерном распределении доходов $k=0$; в общем случае $0\le k\le\frac{1}{2}$.

Пример. Найти коэффициент Джинни распределения доходов в обществе, если функция Джинни $d(x)=x^3$.

Решение: Очевидно, $k=\int_0^1\left(x-x^3\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

Такой коэффициент свидетельствует о значительной неравномерности распределения доходов в обществе.

5.10. Несобственные интегралы

При введении понятия определенного интеграла делались предположения, что 1) интервал $[a,b]$ интегрирования конечен и 2) подынтегральная функция на интервале ограничена. Отказ от выполнения этих условий приводит к понятию ***несобственных*** интегралов первого и соответственно второго рода.

Несобственные интегралы первого рода (***интегралы с бесконечными пределами***). Вначале рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ определена на полуоси $[a,+\infty)$ и интегрируема на любом интервале $[a,b]$, где $b>a$.

Если существует предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то этот предел называется ***несобственным интегралом первого рода*** и обозначается символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, т. е. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

При этом говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Символ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ употребляют и тогда, когда указанный выше предел не существует. В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Аналогично определяются несобственные интегралы по полуоси $(-\infty,b]$ и по всей оси $(-\infty,+\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx;\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

причем во втором случае предполагается, что $a\to-\infty$, $b\to+\infty$ независимо друг от друга.

Из определения несобственных интегралов первого рода следует:

1) если для некоторого вещественного числа a сходится каждый из несобственных интегралов $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$,то сходится и несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ и при этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx;$$

2) если сходится несобственный интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ и $a_1 \geq a$, то сходится и несобственный интеграл $\int_{a_1}^{+\infty} f(x)dx$, причем

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{+\infty} f(x)dx.$$

Примеры.

1. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$.

Решение. Принимая во внимание, что для любого $b > 0$ $\int_{0}^{b} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_{0}^{b} = -e^{-b} + 1$, получим:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-x})\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$ сходится.

2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(2x^{\frac{1}{2}}\Big|_{1}^{b} \right) = 2\lim_{b\to+\infty} \sqrt{b} - 2 = +\infty.$$

Следовательно, этот интеграл расходится.

Несобственные интегралы второго рода (интегралы от неограниченных функций).

Пусть на интервале $[a,b)$ задана функция $f(x)$, не ограниченная на этом интервале, но ограниченная и интегрируемая на любом интервале $[a, b-\alpha]$, где $0 < \alpha < b-a$. Если существует предел $\lim_{\alpha\to+0} \int_{a}^{b-\alpha} f(x)dx$, то он называется ***несобственным интегралом второго рода*** от функции $f(x)$ на интервале $[a,b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx.$$

При этом говорят, что несобственный интеграл сходится. Если указанный выше предел не существует, то в этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ от неограниченной функции $f(x)$, определенной на интервале $[a,b]$, ограниченной и интегрируемой на любом интервале $[a+\alpha,b]$, где $0<\alpha<b-a$.

Пусть функция $f(x)$ не ограничена на $[a,c)$ и $(c,b]$, где $a<c<b$, и вместе с тем $f(x)$ ограничена и интегрируема на любых интервалах $[a,c-\alpha]$ и $(c+\beta,b]$, где $0<\alpha<c-a$, $0<\beta<b-c$.

В этом случае, по определению, полагают несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

т. е. $$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta\to+0} \int\limits_{c+\beta}^b f(x)dx.$$

Заметим, что α и β стремятся к нулю независимо друг от друга.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^4}$.

<u>Решение</u>. $x=0$ точка разрыва функции $f(x)=\frac{1}{x^4}$.

Поэтому $$\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^4} = \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{-1}^{-\alpha} \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3} \lim_{\alpha\to+0} \left(\frac{1}{x^3}\Bigg|_{-1}^{-\alpha} \right) = \frac{1}{3} \lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{3} = \infty.$$

Следовательно, $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^4}$ расходится.

Интеграл Пуассона.

В курсе «Теория вероятностей и математическая статистика» будет нужен несобственный интеграл Пуассона: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Неопределенный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ не выражается через элементарные функции. Поэтому, опуская доказательство, приводим значение сходящегося несобственного интеграла Пуассона: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

.

Поскольку подынтегральная функция e^{-x^2} четная, то

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Если сделать замену переменной: $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$, тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{\pi}\text{, откуда } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}.$$

Последний интеграл является наиболее распространенной формой интеграла Пуассона.

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные y', y'', …, $y^{(n)}$. Наивысший порядок производной искомой функции, входящей в дифференциальное уравнение, называется ***порядком*** этого ***уравнения***.

Например, уравнение $yy'' + 2xy' + y^2 - \operatorname{tg} x = 0$ – дифференциальное уравнение второго порядка. Символически дифференциальное уравнение n-го порядка можно записать так:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{53}$$

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, которая вместе со своими производными y', y'', …, $y^{(n)}$ удовлетворяет уравнению (53).

Пример. Пусть нам дано уравнение $y'' - y' = 0$. Нетрудно проверить, что решениями этого уравнения являются функции $y = e^x$, $y = 23e^x$, $y = 5e^x + 10$. Очевидно, что любая функция вида $y = C_1 e^x + C_2$ является решением этого дифференциального уравнения. Здесь C_1 и C_2 – произвольные, не зависящие друг от друга постоянные.

Из приведенного примера видно, что дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка (53) называется функция

$$y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{54}$$

содержащая n произвольных постоянных и удовлетворяющая уравнению (53). ***Частным решением*** дифференциального уравнения (53) называется всякое его решение, получающееся из общего решения (54) при конкретных числовых значениях $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Соотношение вида

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{55}$$

неявно определяющее общее решение, называется ***общим интегралом уравнения*** (53).

Решить (проинтегрировать) дифференциальное уравнение n-го порядка – значит найти его общее решение (54) или общий интеграл (55).

6.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка связывает независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производную. Общий вид его можно записать следующим образом:

$$F(x,y,y')=0. \tag{56}$$

В уравнение (56) могут не входить в явном виде x и y, но y' входит обязательно. Если (56) удается разрешить относительно y', то оно принимает вид

$$y'=f(x,y). \tag{57}$$

Пусть $y=y(x)$ есть решение уравнения (56) или (57). График функции $y=y(x)$ называется ***интегральной кривой***.

Общее решение (54) дифференциального уравнения (56) имеет вид:

$$y=y(x,C). \tag{58}$$

При конкретном значении постоянной получается ***частное решение*** уравнения (56) или (57). Поскольку дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений, то ему соответствует и бесчисленное множество интегральных кривых. Для выделения из этого множества конкретной кривой нужно задать точку (x_0,y_0), через которую эта кривая проходит, т. е. мы должны знать значение y_0 решения $y=y(x)$ при значении независимой переменной $x=x_0$. Задание значения $y=y_0$ общего решения (58) при $x=x_0$ называется наложением ***начальных условий*** на уравнение (56) или (57). Начальные условия принято обозначать так:

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0 \qquad \text{или} \qquad y(x_0)=y_0. \tag{59}$$

Нахождение решения уравнения (56) или (57), удовлетворяющего начальным условиям (59), называется ***задачей Коши***.

Приведем без доказательства одну из основных теорем теории дифференциальных уравнений.

Теорема Коши. Если правая часть уравнения $y'=f(x,y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области, содержащей точку (x_0,y_0), то в этой области существует единственное решение $y=y(x)$ уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее начальным условиям $y\Big|_{x=x_0}=y_0$.

С геометрической точки зрения это значит, что через каждую точку (x_0,y_0) этой области проходит единственная интегральная кривая $y=y(x)$.

Рассмотрим методы нахождения решений некоторых типов дифференциальных уравнений первого порядка.

Уравнения с разделяющимися переменными. Если дифференциальное уравнение первого порядка можно привести к виду

$$y' = f(x) \cdot \varphi(y), \tag{60}$$

то его называют уравнением с ***разделяющимися*** переменными.

С простейшим типом уравнения такого вида (при $\varphi(y) = 1$) мы уже встречались: $y' = f(x)$. Как известно, решением этого уравнения есть неопределенный интеграл, т. е. $y = \int f(x)dx = F(x) + C$. Для нахождения решения уравнения типа (60) необходимо в первую очередь ***разделить переменные***. Для этого запишем уравнение (60) в виде: $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$. Откуда $dy = f(x) \cdot \varphi(y)dx$. Разделив левую и правую часть последнего равенства на $\varphi(y) \neq 0$, получим:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx. \tag{61}$$

Это ***уравнение с разделенными переменными***. Считая y известной функцией от x, мы вправе рассматривать (61) как равенство двух дифференциалов. Следовательно, $\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx$. Таким образом, интегрируя (61), находим общий интеграл уравнения (60) с разделяющимися переменными. Проиллюстрируем сказанное выше на примере.

Пример. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\left(x^2 - yx^2\right) \cdot y' + y^2 + xy^2 = 0.$$

Решение. Представим это уравнение в виде (60):

$$y' = -\frac{y^2 + xy^2}{(1-y) \cdot x^2} = -\frac{y^2}{1-y} \cdot \frac{1+x}{x^2} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{1-y} \cdot \frac{1+x}{x^2}.$$

Разделим переменные: $-\frac{1-y}{y^2}dy = \frac{1+x}{x^2}dx$. Интегрируя, получим:

$$-\int \frac{1-y}{y^2}dy = \int \frac{1+x}{x^2}dx \quad \text{или} \quad -\int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{y} + \ln|y| = -\frac{1}{x} + \ln|x| + C.$$

После очевидных преобразований получим общий интеграл уравнения $\frac{x+y}{xy} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C$.

Линейные уравнения. Если дифференциальное уравнение первого порядка можно представить в виде

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{62}$$

то его называют линейным. Здесь $P(x)$ и $Q(x)$ – заданные непрерывные функции или постоянные.

Решение уравнения (62) будем искать в виде произведения двух функций от x, т. е. в виде

$$y = U(x) \cdot V(x). \tag{63}$$

Понятно, что одну из этих функций можно выбрать произвольно, а другую определить так, чтобы (63) было общим решением уравнения (62).

Дифференцируя обе части равенства (63) по x, находим

$$y' = U'V + UV'. \tag{64}$$

Подставляя (63) и (64) в (62), получим:

$$U'V + UV' + P(x)UV = Q(x) \qquad \text{или}$$

$$U'V + U(V' + P(x)V) = Q(x). \tag{65}$$

Пользуясь правом выбора одной из функций, выберем функцию V так, чтобы выражение, стоящее в скобках в (65), обратилось в нуль, т. е. чтобы

$$V' + P(x)V = 0. \tag{66}$$

Разделяя переменные в уравнении (66), получим $\dfrac{dV}{V} = -P(x)dx$.

Поскольку нам достаточно найти какое-нибудь частное решение уравнения (66), то, для удобства, после интегрирования возьмем $C = 0$:

$$\ln|V| = -\int P(x)dx \quad \text{или} \quad V = e^{-\int P(x)dx}. \tag{67}$$

Поставим найденное значение функции $V(x)$ в уравнение (65).

Получим уравнение с разделяющимися переменными для определения $U(x)$: $U'e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$. Разделяем переменные и находим $U(x)$:

$$dU = \frac{Q(x)dx}{e^{-\int P(x)dx}} = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

$$U = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C. \tag{68}$$

Подставляя (67) и (68) в (63), находим общее решение уравнения (62):

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

<u>Замечание</u>. При интегрировании линейных уравнений, как правило, готовыми формулами (67) и (68) не пользуются, а проделывают последовательно все вычисления.

Примеры.

1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(x+1)y' - 2y = (x+1)^4.$$

<u>Решение</u>. Приведем уравнение к виду (62). Для этого разделим его почленно на $x+1$. Очевидно, что $x+1 \neq 0$, так как в противном случае

коэффициент при y' равен нулю. Получаем: $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$. Подставляя вместо y и y' соответственно (63) и (64), будем иметь:

$$U'V + UV' - \frac{2}{x+1}UV = (x+1)^3 \text{ или}$$

$$U'V + U\left(V' - \frac{2V}{x+1}\right) = (x+1)^3. \tag{69}$$

Приравниваем выражение, стоящее в скобках, нулю: $V' - \frac{2V}{x+1} = 0$.

Разделяем переменные: $\frac{dV}{V} = \frac{2dx}{x+1}$. Откуда $\ln|V| = 2\ln|x+1|$ или $V = (x+1)^2$. Подставляя $V = (x+1)^2$ в (69), получаем:

$$U'(x+1)^2 = (x+1)^3 \text{ или } U' = x+1.$$

Интегрируя, получим $U = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + C$.

Окончательно будем иметь $y = UV = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right) \cdot (x+1)^2$.

2. Найти решение дифференциального уравнения $y' - 2xy = x - x^3$, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=0} = 1$.

Решение. После замены $y = U \cdot V$ получаем

$$U'V + UV' - 2xUV = x - x^3 \text{ или } U'V + U(V' - 2xV) = x - x^3.$$

Решаем уравнение $\frac{dV}{dx} - 2xV = 0$: $\int \frac{dV}{V} = 2\int xdx$, $\ln|V| = x^2$, $V = e^{x^2}$.

После подстановки $V = e^{x^2}$ имеем: $\frac{dU}{dx} \cdot e^{x^2} = x - x^3$ или

$dU = x(1-x^2)e^{-x^2}dx$, т. е. $U = \int x(1-x^2)e^{-x^2}dx$.

Сделаем замену: $-x^2 = t$, тогда $-2xdx = dt$,

$$U = -\frac{1}{2}\int (1+t)e^t dt = -\frac{1}{2}\int e^t dt - \frac{1}{2}\int te^t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}\left(te^t - e^t\right) + C = -\frac{1}{2}te^t + C = \frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + C.$$

Получаем общее решение $y = UV = e^{x^2}\left(\frac{x^2}{2}e^{-x^2} + C\right) = \frac{x^2}{2} + Ce^{x^2}$.

Для определения постоянной C подставим в общее решение начальные условия $x = 0$, $y = 1$. Получим $C = 1$.

Искомое частное решение есть $y = \dfrac{x^2}{2} + e^{x^2}$.

6.3. Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка в общем виде можно записать так:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (70)$$

В уравнении (70) обязательно должна быть вторая производная y'', в то время как x, y и y' могут отсутствовать. Общее решение уравнения (70) имеет вид $y = y(x, C_1, C_2)$, а общий интеграл $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$. Для определения частного решения (задача Коши) задаются начальные условия в виде

$$y\Big|_{x = x_0} = y_0, \qquad y'\Big|_{x = x_0} = y_0'.$$

При этом значения постоянных C_1 и C_2 находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0, C_1, C_2) \\ y_0' = y'(x_0, C_1, C_2) \end{cases}. \qquad (71)$$

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Дифференциальное уравнение второго порядка называется ***линейным***, если оно содержит искомую функцию y и ее производные y' и y'' в первой степени, и имеет вид

$$y'' + \varphi(x) y' + \psi(x) y = f(x), \qquad (72)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ – заданные функции от x или постоянные.

Функция $f(x)$ в (72) называется ***правой частью уравнения***. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (72) называется ***неоднородным*** или уравнением с правой частью.

При $f(x) \equiv 0$ уравнение (72) принимает вид

$$y'' + \varphi(x) y' + \psi(x) y = 0 \qquad (73)$$

и называется ***однородным***.

В дальнейшем нам потребуются некоторые свойства однородных уравнений, которые сформулируем в виде теорем, доказательство которых рекомендуется провести самостоятельно.

Теорема 48. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – частные решения уравнения (73), то их сумма $y_1 + y_2$ также является решением этого уравнения.

Теорема 49. Если $y_1(x)$ – частное решение уравнения (73), а C – произвольная постоянная, то $Cy_1(x)$ есть также решение данного уравнения.

Два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ дифференциального уравнения (73) называются ***линейно независимыми***, если их отношение не является постоянной, т. е. $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \mathrm{const}$.

В противном случае решения называются ***линейно зависимыми*** и каждое из них может быть получено из другого умножением последнего на некоторое число.

Теорема 50. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно независимых решения уравнения (73), то

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x), \qquad (74)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.

Замечание 1. Если бы y_1 и y_2 были линейно зависимыми решениями, то нашлось бы такое число λ, что $y_1(x) = \lambda y_2(x)$. Тогда (74) можно было бы представить в виде: $y = C_1\lambda \cdot y_2(x) + C_2 \cdot y_2(x) = (C_1\lambda + C_2)y_2(x)$.

Обозначив $C_1\lambda + C_2$ через C, получим $y = C \cdot y_2(x)$. Эта функция не может быть общим решением дифференциального уравнения второго порядка, поскольку содержит только одну произвольную постоянную.

Замечание 2. Если в (72) $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – произвольные функции, то не существует общих методов для нахождения решений уравнений такого типа. Ниже мы рассмотрим уравнения, у которых $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – постоянные. Такие уравнения называются ***уравнениями с постоянными коэффициентами***.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть мы имеем линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (75)$$

где p и q – постоянные числа.

Согласно теореме 50, для нахождения общего решения этого уравнения достаточно знать его два линейно независимых частных решения. Будем искать частные решения уравнения (75) в виде $y = e^{kx}$. Тогда $y' = ke^{kx}$, а $y'' = k^2e^{kx}$. Подставляя полученные выражения для производных в (75), получим:

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 + pk + q = 0. \qquad (76)$$

Уравнение (76) называется ***характеристическим уравнением***. Обозначим его корни через k_1 и k_2, т. е.

$$k_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \qquad k_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Очевидно, что $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$ являются частными решениями уравнения (75).

Рассмотрим три возможных случая.

1. Корни характеристического уравнения (76) действительны и различны, т. е. $k_1 \neq k_2$. Тогда имеем два линейно-независимых частных решения уравнения (75): $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$, так как

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}.$$

Следовательно, $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ будет общим решением уравнения (75).

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' - 8y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение будет следующим: $k^2 + 2k - 8 = 0$. Его корни $k_1 = 2$ и $k_2 = -4$. Следовательно, общим решением исходного уравнения будет: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$.

2. Корни характеристического уравнения (76) действительны и равны, т. е. $k_1 = k_2$. В этом случае частные решения $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$ линейно зависимы, так как $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_1 x}} = 1$.

Следовательно, одно частное решение есть $y_1 = e^{k_1 x}$, а второе мы должны найти из условия, что $\dfrac{y_2}{y_1} \neq \text{const}$. Нетрудно убедиться, что в данном случае$(k_2 = k_1)$ функция $x e^{k_1 x}$ удовлетворяет уравнению (75). Следовательно, $y_2 = x e^{k_1 x}$ будет вторым линейно независимым решением уравнения (75), а общее решение будет следующим:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2 - 6k + 9 = 0$ $k_1 = k_2 = 3$.

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2 x).$$

3. Корни характеристического уравнения комплексные. В математике $\sqrt{-1}$ принято обозначать буквой i и называют ***мнимой единицей***, а выражения вида $a + bi$, где a и b – вещественные числа, называть ***комплексными числами***. Комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$ называют ***комплексно сопряженными***. У квадратного уравнения $k^2 - pk + q = 0$ в случае, когда его дискриминант $p^2 - 4q$ отрицательный, решениями (корнями) будут комплексно сопряженные числа

$$-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i, \qquad -\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i.$$

В случае, когда дискриминант характеристического уравнения (76) отрицательный, частными линейно независимыми решениями уравнения (75) будут: $y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, где $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения:

$$y = e^{\alpha x} \left(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x \right).$$

Примеры.

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 10y = 0.$$

Решение. Находим корни характеристического уравнения

$$k^2 - 2k + 10 = 0: \quad k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 10} = 1 \pm 3i = 1 \pm 3i.$$

Общее решение $y = e^x (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + 17y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y\Big|_{x=0} = 0$, $y'\Big|_{x=0} = 1$.

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2 + 2k + 17 = 0$ есть $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 17} = -1 \pm 4i$.

Общее решение $y = e^{-x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$.

При $x = 0$ имеем $0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0$, откуда $C_2 = 0$. Следовательно, общее решение имеет вид $y = C_1 \cdot e^{-x} \sin 4x$. Находим y':

$$y' = -C_1 \cdot e^{-x} \sin 4x + 4C_1 \cdot e^{-x} \cos 4x = C_1 \cdot e^{-x} (4 \cos 4x - \sin 4x).$$

При $x = 0$ должно выполняться равенство: $1 = C_1 \cdot e^0 \left(4 \cos 0 - \sin 0 \right)$, откуда $C_1 = \frac{1}{4}$.

Искомое частное решение $y = \frac{1}{4} e^{-x} \sin 4x$.

7. РЯДЫ

7.1. Понятие числового ряда

Пусть задана бесконечная последовательность чисел $U_1,\ U_2,\dots,U_n,\dots$. ***Числовым рядом*** (или просто ***рядом***) называется бесконечная сумма

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} U_k\,. \qquad (77)$$

Числа $U_1,\ U_2,\ \dots,U_n,\dots$ называются ***членами ряда***, при этом U_n называется ***общим членом ряда***. Чтобы составить ряд, необходимо задать закон , по которому вычисляется общий член U_n ряда.

Так, если $U_n = \dfrac{1}{n^2}$, то ряд (77) будет иметь вид:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,.$$

Сумма первых *n* членов ряда (77) называется ***частичной суммой*** этого ряда и обычно обозначается S_n:

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \sum_{k=1}^{n} U_k\,. \qquad (78)$$

Выражение $U_{n+1} + U_{n+2} + \dots = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} U_k$, которое получается из ряда (77) путем отбрасывания первых *n* членов, называется ***остатком ряда*** и обычно обозначается R_n. Ряд (77) называется ***сходящимся***, если при $n \to \infty$ существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Этот предел *S* называют ***суммой ряда*** (77) и пишут:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} U_k = S\,.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то говорят, что ряд (77) ***расходится***.

В качестве примера рассмотрим ряд, члены которого являются членами геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + aq^{n-1} + \dots. \qquad (79)$$

Сумма первых *n* членов этого ряда при $q \neq 1$:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\,.$$

Если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)=\frac{a}{1-q}$, или $a+aq+$ $+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\frac{a}{1-q}$. Следовательно, если $|q|<1$, то ряд (79) сходится и его сумма равна $\frac{a}{1-q}$.

Если $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)=\infty$. Значит, если $|q|>1$, то ряд (79) расходится.

Если $q=1$, то ряд (79) принимает вид: $a+a+\ldots+a+\ldots$. Поэтому, $S_n = na$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, т. е. ряд расходится.

Если $q=-1$, то ряд (79) принимает вид: $a-a+a-a+\ldots$. В этом случае $S_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n - \text{четное}, \\ a, & \text{если } n - \text{нечетное}. \end{cases}$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, т. е. ряд расходится. Таким образом, ряд вида (79) сходится тогда и только тогда, когда $|q|<1$.

Рассмотрим еще один пример :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots.$$

Покажем, что этот ряд сходится. Действительно, в силу очевидного равенства $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, будем иметь

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

Следовательно, наш ряд сходится и его сумма равна единице.

Отметим несколько простых свойств рядов, вытекающих непосредственно из определения сходимости ряда и свойств пределов последовательностей.

1. Отбрасывание (добавление) конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда.

2. Если $C \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} CU_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$. Причем, если $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = S$, то $\sum_{n=1}^{\infty} CU_n = CS = C\sum_{n=1}^{\infty} U_n$.

3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ сходятся и их суммы соответственно равны S_1 и S_2, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n \pm V_n)$, называемые соответственно суммой и разностью данных рядов, также сходятся, при этом

$$\sum_{n=1}^{\infty}(U_n \pm V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} V_n = S_1 \pm S_2.$$

7.2. Необходимый признак сходимости ряда

При исследовании рядов одним из основных вопросов является вопрос о том, сходится или расходится данный ряд. Необходимое условие сходимости ряда заключается в следующем.

<u>**Теорема 51**</u>. Если ряд (77) сходится, то при неограниченном возрастании n его общий член U_n стремится к нулю.

<u>Доказательство</u>. Пусть ряд (77) сходится и его сумма равна S. Это означает, что $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_k = S$. Очевидно, тогда имеет место и следующее равенство: $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} U_k = S$.

С другой стороны, $S_n - S_{n-1} = U_n$. Поэтому:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает следующее.

<u>Следствие</u>. Если при неограниченном возрастании n общий член U_n ряда (77) не стремится к нулю, то ряд (77) расходится. Так, например, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{3k+1}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} \neq 0,$$

т. е. не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Заметим, что если общий член U_n ряда (77) стремится к нулю при $n\to\infty$, то это еще не означает, что ряд (77) сходится.

Рассмотрим, например, так называемый ***гармонический ряд***:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (80)$$

Очевидно,что для него необходимый признак сходимости ряда выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Покажем, что ряд (80) расходится. Для этого рассмотрим ряд (80)

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

и вспомогательный ряд

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

Вспомогательный ряд получен из ряда (80) путем замены $\frac{1}{3}$ на $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ на $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, …, $\frac{1}{15}$ на $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{18}$, …, $\frac{1}{31}$ на $\frac{1}{32}$ и т. д. Обозначим через $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$ соответственно частичные суммы гармонического и вспомогательного рядов. Очевидно, что при $n>2$

$$S_n^{(1)}>S_n^{(2)}. \qquad (81)$$

С другой стороны, как нетрудно видеть:

$$S_2^{(2)}=1+\frac{1}{2}=1+1\cdot\frac{1}{2}, \qquad S_4^{(2)}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+2\cdot\frac{1}{2},$$

$$S_8^{(2)}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=1+3\cdot\frac{1}{2},$$

$$S_{16}^{(2)}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)=1+4\cdot\frac{1}{2}, \text{ и}$$

$$S_{2^k}^{(2)}=1+k\cdot\frac{1}{2}.$$

Следовательно, частичная сумма $S_n^{(2)}$ может быть сделана как угодно большой, если взять достаточно большое *n*, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^{(2)}=\infty$. Поэтому в силу (81), $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^{(1)}=\infty$, т. е. гармонический ряд расходится.

7.3. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов

Числовой ряд (77) называется ***знакопостоянным***, если все его члены имеют одинаковые знаки.

Рассмотрим ряд признаков, позволяющих сделать заключение о сходимости (или расходимости) ряда с неотрицательными членами, которые сформулированы в виде теорем, доказательства которых приводить не будем.

Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k = U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots, \tag{82}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k = V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots. \tag{83}$$

Теорема 52 (признак сравнения рядов). Если члены ряда (82) не больше соответствующих членов ряда (83), т. е.

$$U_n \le V_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{84}$$

тогда, если сходится ряд (83), то сходится и ряд (82); если же ряд (82) расходится, то расходится и ряд (83).

Замечание. Теорема 52 остается справедливой и в том случае, когда условие (84) выполняется для всех n, начиная с некоторого номера p, т. е. для $n = p,\ p+1,\ \ldots$.

Примеры.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$.

Решение. Сравним наш ряд с рядом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots,$$

который, очевидно, сходится, т. к. является суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. В силу очевидного неравенства $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$ $(n > 2)$ и замечания к теореме 52, заключаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ сходится.

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$.

Решение. Так как члены этого ряда не меньше соответствующих членов гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$, который как было установлено выше, расходится, то наш ряд расходится.

<u>Теорема 53 (признак Даламбера).</u> Если в ряде $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ с положительными членами отношение (n + 1)-го члена к n-му при $n \to \infty$ имеет предел l, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = l$, то:

1) если $l < 1$ – ряд расходится;
2) если $l > 1$ – ряд расходится;
3) если $l = 1$ – необходимы дополнительные исследования.

Таким образом, признак Даламбера дает ответ на вопрос о том, сходится ли данный знакопостоянный ряд, только в том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ существует и отличен от единицы. Если же этот предел равен единице или не существует, то признак Даламбера не дает возможности установить, сходится ряд или расходится. В этом случае необходимо применить какой-нибудь другой признак.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$.

<u>Решение</u>. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

то, согласно признаку Даламбера, данный ряд сходится.

<u>Теорема 54 (радикальный признак Коши).</u> Если для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ с положительными членами величина $\sqrt[n]{U_n}$ при $n \to \infty$ имеет предел l, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = l$, то:

1) если $l < 1$ – ряд сходится;
2) если $l > 1$ – ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{k}{2k+1}\right)^k$.

<u>Решение.</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} < 1.$

Значит, ряд сходится.

Заметим, что, как и в признаке Даламбера, в том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = 1$, требуются дополнительные исследования.

Теорема 55 (интегральный признак Коши). Если функция $f(x)$, определенная при всех $x \geq 1$, неотрицательна и монотонно убывает, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$.

Решение. Очевидно, что функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 55. Следовательно, необходимо рассмотреть несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p}$. Так как

$$\int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left. \frac{1}{1-p} x^{1-p} \right|_{1}^{b} = \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - 1), & \text{при } p \neq 1, \\ \left. \ln x \right|_{1}^{b} = \ln b, & \text{при } p = 1, \end{cases}$$

то при $p > 1$

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - 1) = \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{p-1},$$

т. е. несобственный интеграл сходится.

Значит, при $p > 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится.

Если $p < 1$, то $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - 1) = \infty$, и, значит, ряд расходится.

Если же $p = 1$, то $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to +\infty} \ln b = \infty$, а это означает, что ряд расходится.

Таким образом, рассматриваемый ряд сходится только в случае $p > 1$.

7.4. Знакочередующиеся ряды

Ряд, члены которого имеют чередующиеся знаки, т. е. ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}U_k = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots + (-1)^n U_n + \ldots, \qquad (85)$$

где $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ положительны, называется ***знакочередующимся*** рядом. Достаточный признак сходимости такого ряда выражается следующей теоремой.

Теорема (признак) Лейбница. Если в знакочередующемся ряде (85) члены таковы, что

$$U_1 > U_2 > U_3 > \ldots > U_n > \ldots \qquad (86)$$

$$\text{и} \quad \lim_{n\to\infty} U_n = 0, \qquad (87)$$

то ряд (85) сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots.$$

Решение. Так как $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$; то, согласно теореме Лейбница, этот ряд сходится.

В заключение отметим, что остаток R_n ряда (85)

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k U_k = (-1)^n U_{n+1} + (-1)^{n+1}U_{n+2} + \ldots = (-1)^n\left(U_{n+1} - U_{n+2} + \ldots\right)$$

по абсолютной величине меньше U_{n+1}, т. е. $|R_n| < U_{n+1}$. Действительно,

$$|R_n| = \left|(-1)^n\left(U_{n+1} - U_{n+2} + U_{n+3} - U_{n+4} + \ldots\right)\right| =$$

$$= \left|U_{n+1} - U_{n+2} + U_{n+3} - U_{n+4} + \ldots\right| =$$

$$= \left|U_{n+1} - (U_{n+2} - U_{n+3}) - (U_{n+4} - U_{n+5}) - \ldots\right|.$$

Поэтому, в силу (86), $|R_n| < U_{n+1}$.

7.5. Знакопеременные ряды

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ называется знакопеременным, если среди его членов $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ имеются как положительные, так и отрицательные. Очевидно, что знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда. Приведем один достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

Т е о р е м а 5 6. Если знакопеременный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ таков, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |U_k|$, составленный из абсолютных величин его членов, сходится, то и данный знакопеременный ряд также сходится.

П р и м е р. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\alpha}{k^2} = \frac{\cos\alpha}{1} + \frac{\cos 2\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{\cos n\alpha}{n^2} + \ldots, \qquad (88)$$

где α – любое число.

Решение. Наряду с данным рядом рассмотрим ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos k\alpha|}{k^2} = \frac{|\cos\alpha|}{1} + \frac{|\cos 2\alpha|}{2^2} + \ldots + \frac{|\cos n\alpha|}{n^2} + \ldots, \qquad (89)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots . \qquad (90)$$

Раньше было показано (см. интегральный признак Коши), что ряд (90) сходится. Так как члены ряда (89) не превосходят соответствующих членов ряда (90), то, согласно признаку сравнения рядов (теорема 52), ряд (89) тоже сходится. Тогда, в силу теоремы 56, сходится и ряд (88).

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ называют ***а б с о л ю т н о с х о д я щ и м с я***, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |U_k|$, составленный из абсолютных величин его членов. Так, ряд (88) сходится абсолютно. Если же знакопеременный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |U_k| = |U_1| + |U_2| + \ldots + |U_n| + \ldots$ расходится, то знакопеременный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ называется ***у с л о в н о*** или ***н е а б с о л ю т н о с х о д я щ и м с я р я д о м***. Так, например, знакопеременный ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

является условно сходящимся, так как ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ составленный из абсолютных величин его членов (гармонический ряд), расходится.

С помощью понятия абсолютной сходимости ряда теорему 56 можно сформулировать кратко так: всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

7.6. Степенные ряды

Функциональные ряды. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots, \qquad (91)$$

члены которого являются функциями от *x*. Такой ряд называется ***функциональным***. Давая *x* различные числовые значения, будем получать различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися. Совокупность всех тех значений *x*, при которых числовой ряд, полученный из ряда (91), сходится, называется ***областью сходимости функционального ряда*** (91). Очевидно, что в области сходимости ряда (91) его сумма является некоторой функцией от *x*, которую обычно обозначают через $S(x)$ (или $f(x)$):

$$S(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots.$$

В этом случае также говорят, что функция $S(x)$ ***разлагается в ряд***.

Через $S_n(x)$, аналогично случаю числового ряда, обозначают сумму *n* первых членов ряда (91): $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x)$, а через $R_n(x)$ – остаток ряда: $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x)$.

Очевидно, что если ряд (91) сходится и его сумма равна $S(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \qquad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Интервал сходимости степенного ряда.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \qquad (92)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные числа, которые называются ***коэффициентами ряда*** (92).

Областью сходимости степенного ряда является некоторый интервал $(-R,\ R)$ с центром в начале координат, называемый ***интервалом сходимости***.

Число R называется ***радиусом сходимости*** ряда (92). Интервал сходимости может вырождаться в точку ($R=0$) или совпадать со всей числовой осью $(R=\infty)$.

<u>**Теорема 57.**</u> Если при $n\to\infty$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R$, то ряд (92) абсолютно сходится при $|x|<R$ и расходится при $|x|>R$.

<u>Замечание.</u> На концах интервала (т. е. при $x=\pm R$) вопрос о сходимости ряда (92) решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

Примеры.

1. Исследовать на сходимость ряд

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots. \tag{93}$$

<u>Решение</u>. Определим радиус сходимости. Так как $a_0=a_1=a_2=\ldots=$ $=a_n=\ldots=1$, то, согласно теореме 57, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1}=1$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости, т. е. при $x=\pm 1$.

При $x=1$ степенной ряд (93) превращается в числовой ряд $1+1+1+\ldots+1+\ldots$, который, очевидно, расходится.

При $x=-1$ получаем ряд $1-1+1-1+\ldots+(-1)^n+\ldots$, который тоже расходится.

Следовательно, ряд (93) абсолютно сходится на интервале (-1, 1). На концах интервала сходимости, т. е. при $x=\pm 1$, ряд расходится.

2. Исследовать на сходимость ряд

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots. \tag{94}$$

<u>Решение</u>. Очевидно, что $a_n=\frac{1}{n}$. Поэтому

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

При $x=1$ имеем ряд $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, который расходится.

При $x=-1$ получаем ряд $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\left(-1\right)^n\frac{1}{n}+\ldots$, который сходится, согласно признаку Лейбница. Ряд, составленный из абсолютных величин членов последнего ряда, расходится.

Поэтому, ряд (94) при $|x|<1$ сходится абсолютно, при $x=-1$ – условно, при $x=1$ – расходится, т. е. ряд сходится на интервале $[-1,1)$.

3. Исследовать на сходимость ряд: $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$.

Решение. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$.

Значит, ряд абсолютно сходится при всех значениях $x\in(-\infty,+\infty)$.

4. Исследовать на сходимость ряд

$$x+(2x)^2+(3x)^3+\ldots+(nx)^n+\ldots.$$

Решение. Очевидно, что $a_n=n^n$. Поэтому

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}=e^{-1}\cdot 0=0.$$

Значит, ряд сходится только при $x=0$.

7.7. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Пусть дан степенной ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \tag{95}$$

рассмотрим ряд

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots, \tag{96}$$

полученный из ряда (95) почленным дифференцированием, и ряд

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots, \tag{97}$$

полученный из ряда (95) почленным интегрированием.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 58. Ряды (95), (96) и (97) имеют один и тот же интервал сходимости $(-R,R)$. Причем, если $S(x)$, $S_1(x)$ и $S_2(x)$ соответственно суммы этих рядов, то

$$S_1(x)=S'(x),\qquad S_2(x)=\int_0^x S(t)dt. \tag{98}$$

Проиллюстрируем применение этой теоремы на примере.

Пример. Найти сумму $S(x)$ ряда

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots. \tag{99}$$

Решение. Рассмотрим ряд

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots, \tag{100}$$

полученный из ряда (99) почленным дифференцированием. Ранее было показано (примеры 1, 2), что радиусы сходимости рядов (99) и (100) равны единице. Очевидно, что при $|x|<1$ сумма $S_1(x)$ ряда (100), как сумма членов

бесконечно убывающей прогрессии, равна $\frac{1}{1-x}$, т. е. $S_1(x)=\frac{1}{1-x}$.
Поэтому, в силу первого из равенств (98), имеем $S_1(x)=S'(x)=\frac{1}{1-x}$,

откуда $S(x)=\int\limits_0^x \frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)$.

7.8. Ряды по степеням $x-a$

Функциональный ряд вида

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots, \qquad (101)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные, таже называется ***степенным рядом***. Этот ***ряд*** расположен ***по степеням*** $x-a$. Степенной ряд вида (92) является частным случаем ($a=0$) степенного ряда (101).

Для определения интервала сходимости ряда (101) нобходимо предварительно сделать замену:

$$x-a=y. \qquad (102)$$

Тогда ряд (101) примет вид $a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_ny^n+\ldots$.

Пусть $(-R, R)$ – интервал сходимости последнего ряда. Тогда, в силу (102), интервал сходимости ряда (101) будет определяться из условия: $|x-a|<R$ или $-R<x-a<R$. Следовательно, интервал сходимости ряда (101) будет $(a-R, a+R)$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{n}+\ldots.$$

Решение. Сделав замену $x-1=y$, получим ряд

$$y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\ldots+\frac{y^n}{n}+\ldots,$$

который абсолютно сходится на интервале (-1, 1), т. е. при $|y|<1$.

Поэтому исходный ряд абсолютно сходится, когда $|x-1|<1$ или $0<x<2$; при $x=0$ исходный ряд сходится условно; при $x=2$ – расходится.

Значит, интервал сходимости нашего ряда – $[0, 2)$.

7.9. Ряды Тейлора и Маклорена

Как известно из дифференциального исчисления, если функция $f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$–го порядка включительно в некоторой окрестности точки $x=a$, то справедлива ***формула Тейлора***:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x), \qquad (103)$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора.

Напомним, что остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора может быть представлен в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Если функция $f(x)$ в окрестности точки a имеет производные всех порядков, т. е. бесконечно дифференцируема, и если

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0, \qquad (104)$$

то переходя в формуле Тейлора (103) к пределу при $n\to\infty$, получим ***разложение функции*** $f(x)$ в ряд Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots.$$

Подчеркнем, что ряд Тейлора бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ сходится к этой функции только тогда, когда выполняется условие (104).

Из ряда Тейлора при $a=0$ получаем ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Некоторые постоянные

$\pi = 3{,}14159$ $\qquad e = 2{,}71828$ $\qquad \ln\pi = 1{,}14473$

$\pi^2 = 9{,}8696$ $\qquad e^2 = 7{,}3891$ $\qquad \sqrt{2} = 1{,}41421$

$\sqrt{\pi} = 1{,}77245$ $\qquad \sqrt{e} = 1{,}64872$ $\qquad \sqrt{3} = 1{,}73205$

$\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$ $\qquad \frac{1}{e} = 0{,}36788$

Основные алгебраические формулы

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}, \qquad a^b : a^c = a^{b-c},$$

$$(a^b)^c = a^{bc}, \qquad \sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}, \qquad a^{-b} = \frac{1}{a^b}.$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a - b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$$
$$a - b = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}\right)$$
$$a + b = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}\right)$$

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$: $\qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Разложение квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Арифметическая прогрессия:

$a_{n+1} = a_n + d$ (определение арифметической прогрессии),

$a_n = a_1 + d(n-1)$ (формула n –го члена),

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ (формула суммы первых n членов).

Геометрическая прогрессия

$b_{n+1} = b_n q$, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$ (определение геометрической прогрессии),

$b_n = b_1 q^{n-1}$ (формула n – го члена),

$S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1} = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ (формула суммы первых n членов),

$S = \dfrac{b_1}{1-q}$ (формула суммы бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$).

$a^{\log_a b} = b \quad (0 < a \neq 1,\ b > 0)$, $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$,

$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,

$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$,

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(0 < c \neq 1)$ (формула перехода к новому основанию).

Основные тригонометрические формулы

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

Знаки тригонометрических функций по четвертям

Функция / Четверть	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–

Некоторые значения тригонометрических функций

Функция / Аргумент	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
0	0	1	0	–
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	0
π	0	-1	0	–

Функция / Аргумент	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{ctg}\, x$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

Правила дифференцирования

Если c – постоянная, а $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, то:

1) $c'=0$; 2) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; 3) $(cu)'=cu'$;

4) $(uv)'=u'v+uv'$; 5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$;

6) $\left(f\left(u(x)\right)\right)' = f'_u\cdot u'_x$.

Таблица производных

1) $\left(u^a\right)'=au^{a-1}\cdot u'$; в частности: $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$.

2) $\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$; в частности: $\left(e^u\right)'=e^u u'$;

3) $\left(\log_a u\right)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$; в частности: $\left(\ln u\right)'=\dfrac{u'}{u}$;

4) $\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$; 5) $\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$; 6) $\left(\operatorname{tg} u\right)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

7) $\left(\operatorname{ctg} u\right)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$; 8) $\left(\arcsin u\right)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

9) $\left(\arccos u\right)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 10) $\left(\operatorname{arctg} u\right)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$;

11) $\left(\operatorname{arcctg} u\right)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Правила интегрирования

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$. 2. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$.

3. $\int dF(x)=F(x)+C$. 4. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$.

5. $\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$.

6. Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx=\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$

Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (если $\alpha \neq -1$).

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln|\varphi(x)| + C$.

5. $\int e^{x} dx = e^{x} + C$.

6. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.

10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$.

11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

12. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$.

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \dfrac{x}{a} + C \\ -\arccos \dfrac{x}{a} + C \end{cases}$.

15. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$.

16. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C \\ -\dfrac{1}{a} \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{a} + C \end{cases}$.

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

18. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фортуна В. В. Вища та прикладна математика : навч. посіб. / В. В. Фортуна, О. І. Бескровний. – Львів : Магнолія-2006, 2016. – 647 с.

2. Коваленко І. П. Вища математика : навч. посіб. / І. П. Коваленко. – Київ : Слово, 2011. – 456 с.

3. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. для студентів ВНЗ / В. П. Дубовик, ІІ Юрик. – Київ : Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

4. 6. Денисюк В. П**.** Вища математика : підруч. : у 2 ч. / В. П. Денисюк, В. К. Репета. – Київ : НАУ, 2013. – Ч. 1. – 472 с.

5. Валєєв К. Г. Вища математика для економістів : навч. посіб. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, С. В. Дегтяр. – Київ : Знання, 2011. – 287 с.

6. Васильченко І. П. Вища математика для економістів / І. П. Васильченко. – Київ : Знання, 2007. – 260 с.

7. Макаренко В. О. Вища математика для економістів : навч. посіб. / В. О. Макаренко. – Київ : Знання, 2008. – 517 с.

8. Чеберяк О. Г. Математика для економістів. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння : навч. посіб. для ВНЗ / О. Г. Чеберяк, В. В. Кузубов, Л. О. Свистун. – Київ : Самміт-книга ; КНТ, 2011. – 287 с.

9. Барковський В. В. Вища математика для економістів : навч. посіб. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – 5-те вид. – Київ : Центр учб. літ., 2010. – 448 с.

10.Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах: навчальний посібник / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. – Київ : Центр учб. літ., 2009. – 594 с.

11. Клюшин В. Л. Высшая математика для экономистов : учеб. пособ. / В. Л. Клюшин. – М. : ИНФРА-М, 2009. – 448 с.

12.Клименко Ю. И. Высшая математика для экономистов: теория, примеры, задачи: учебник для вузов / Ю. И. Клименко. – М. : Экзамен, 2005. – 736 с.

13.Красс М. С. Математика для экономистов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005. – 464 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

Серія «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ»

МИХАЙЛЕНКО Віталій Григорович
СВІЩОВА Євгенія Віталіївна
ПЕТРОВА Анжела Юріївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
Для студентів економічних спеціальностей

(російською мовою)

В авторській редакції
Компьютерний набір і верстка А. Ю. Петрова

Підписано до друку 27.06.2017 Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Гарнітура «Таймс».
Умов. друк. арк. 9,07. Обл.-вид. арк. 8,74.
Тираж 300 пр. Зам №

План 2016/17 навч. р., поз. № 3 в переліку робіт кафедри.

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво № 1153 від 16.12.2002.

Надруковано у видавництві Народної української академії
Україна, 61000, Харків, МСП, вул. Лермонтовська, 27.