Статистика знает все. Известно, сколько какой пищи съедает в год средний гражданин республики… Известно, сколько в стране охотников, балерин… станков, собак всех пород, велосипедов, памятников, девушек, маяков и швейных машинок. Как много жизни, полной пыла, страстей и мысли, глядит на нас со статистических таблиц!.. От статистики не скроешься никуда…

Илья Ильф, Евгений Петров
(Из книги «Двенадцать стульев»)

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

2.1. *Построение вариационного ряда. Графическое изображение рядов распределения*

Пусть требуется изучить совокупность объектов относительно некоторого признака, характеризующего эти объекты.

Выборочной совокупностью (или выборкой) называется совокупность значений признака случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называется совокупность значений признака всех объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называется число объектов этой совокупности.

Пусть исследуется некоторый признак генеральной совокупности. Проводя n наблюдений, получим n значений признака, среди которых могут быть и одинаковые. Пусть число различных значений в выборке равно m: x_1, x_2, …, x_m. Значения (элементы выборки) называются ***вариантами***. Количество повторений варианта x_i в выборке называется ***частотой*** варианта и обозначается через n_i. Очевидно, что:

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n.$$

Относительной частотой значения x_i называется отношение частоты n_i к объему выборки n и обозначается через n_i*, т. е.:

$$n_i^* = \frac{n_i}{n}.$$

Очевидно, что: $\sum_{i=1}^{m} n_i^* = 1$.

Упорядочим варианты выборки по возрастанию. Каждому варианту поставим в соответствие его частоту. Оформим результаты в виде таблицы:

Вариант x_i	x_1	x_2	…	x_m
Частота n_i	n_1	n_2	…	n_m

Аналогичную таблицу можно оформить с использованием относительной частоты:

Вариант x_i	x_1	x_2	…	x_m
Относительная частота n_i*	n_1*	n_2*	…	n_m*

Получено статистическое распределение, где каждому значению x_i ставится в соответствие n_i или n_i*. Такое распределение называется ***дискретным вариационным рядом***.

Наряду с дискретным вариационным рядом применяется ***интервальный (или непрерывный) вариационный ряд***. Он применяется, если объем выборки большой, а каждый вариант встречается очень редко. Для построения интервального вариационного ряда находят среди значений вариантов максимальное x_{max} и минимальное x_{min}. Разность между этими значениями называется ***размахом вариации***:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Интервал, содержащий все значения выборки, разбивают на m частичных непересекающихся интервалов (a_{i-1}, a_i), $(i = \overline{1, m})$, и подсчитывают частоты n_i – количество элементов выборки, попавших в i-й интервал. Если элемент выборки совпадает с границей частичного интервала, то при подсчете частоты его относят к последующему, а не к предыдущему интервалу. Интервальный вариационный ряд записывается в виде таблицы:

$a_{i-1} \div a_i$	$a_0 \div a_1$	$a_1 \div a_2$	…	$a_{m-1} \div a_m$
n_i	n_1	n_2	…	n_m

На практике чаще всего используются частичные интервалы равной длины. От интервального вариационного ряда можно перейти к дискретному. Для этого возьмем в качестве вариантов x_i средние значения признака в каждом интервале, т. е.:

$$x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2} \qquad (i = \overline{1,\ m})$$

Значения частот n_i переписываются без изменения.

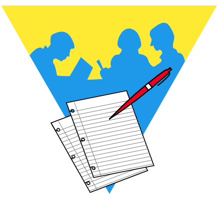
Иногда в ряде распределения вместо частот применяются накопленные частоты. ***Накопленной частотой*** называется число $n_i^{(n)}$, равное сумме частот вариантов от x_1 до x_i включительно, т. е.:

$$n_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{i} n_k \ .$$

Аналогично можно определить накопленную относительную частоту. Для наглядности дискретный вариационный ряд иллюстрируется полигоном распределения. ***Полигоном частот*** называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1), (x_2, n_2), …, (x_m, n_m).

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1^*), (x_2, n_2^*), …, (x_m, n_m^*).

Если по оси ординат откладывают накопленные частоты $n_i^{(n)}$, то полученная неубывающая ломаная линия будет называться ***кумулятой*** или кривой нарастающих итогов. Для изображения интервального вариационного ряда применяется гистограмма. ***Гистограммой*** называют ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы $[a_{i-1},\ a_i]$, а высоты равны соответствующим частотам n_i (иногда высоты берутся равными $\frac{n_i}{h}$ или $\frac{n_i^*}{h}$).



ПРИМЕРЫ

346. Записать в виде вариационного ряда выборку: 3, 9, 9, 5, 3, 6, 9, 5, 5, 5, 6, 3, 6, 5, 6, 3, 3, 5, 6, 5. Определить размах выборки. Построить полигон частот.

РЕШЕНИЕ.

Объем выборки: $n = 20$. Упорядочим варианты выборки по возрастанию и посчитаем количество повторений каждого варианта. Получаем:

$x_1 = 3$; $\quad x_2 = 5$; $\quad x_3 = 6$; $\quad x_4 = 9$;

$n_1 = 5$; $\quad n_2 = 7$; $\quad n_3 = 5$; $\quad n_4 = 3$.

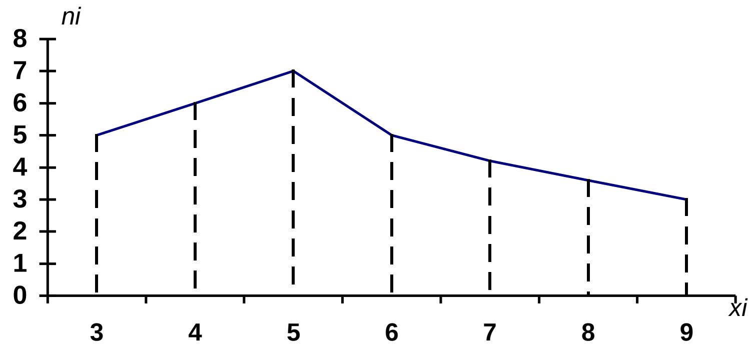
Контроль вычислений: $\sum_{i=1}^{4} n_i = 20$.

Вариационный ряд имеет вид:

x_i	3	5	6	9
n_i	5	7	5	3

Размах выборки: $R = x_{\max} - x_{\min} = 9 - 3 = 6$.

Для построения полигона частот в прямоугольной системе координат строим точки (3; 5), (5; 7), (6; 5), (9; 3) и полученные точки соединяем отрезками прямых.



347. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	30	33	36	39
n_i	10	45	30	15

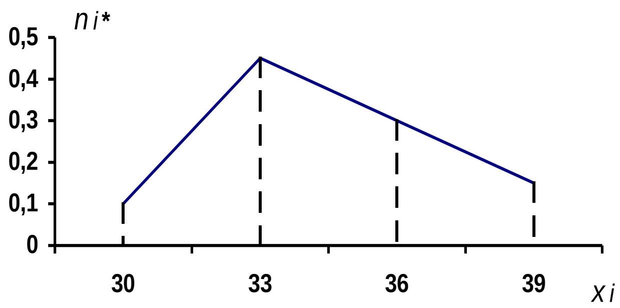
РЕШЕНИЕ.

Объем выборки: $n = \sum_{i=1}^{4} n_i = 100$. Для каждого варианта x_i вычисляем относительную частоту по формуле $n_i* = \frac{n_i}{n}$. Получаем:

x_i	30	33	36	39
n_i*	0,1	0,45	0,3	0,15

Контроль вычислений: $\sum_{i=1}^{4} n_i * = 1$.

Для построения полигона относительных частот в прямоугольной системе координат строим точки (30; 0,1), (33; 0,45), (36; 0,3), (39; 0,15) и полученные точки соединяем отрезками прямых.



Масштабные единицы по осям координат берем разные. Кроме того, расстояние от начала координат до $x_{min} = 30$ выбираем произвольно.

348. Построить интервальный вариационный ряд распределения по данной выборке: 15, 18, 22, 26, 15, 10, 23, 27, 19, 18, 14, 15, 28, 6, 29, 7, 26, 24, 19, 14, 15, 7, 27, 14, 19, 8, 20, 5, 29, 16, 10, 16, 11, 18, 20, 12, 16, 22, 23, 20, 21, 11, 16, 22, 22, 6, 18, 14, 11, 5. При построении интервального вариационного ряда использовать 6 интервалов равной длины. Перейти от интервального вариационного ряда к дискретному вариационному ряду.

Р Е Ш Е Н И Е.

Объем выборки: $n = 50$. Размах выборки: $R = x_{max} - x_{min} = 29 - 5 = 24$. По условию количество интервалов $m = 6$. Тогда длина каждого частичного интервала $h = \dfrac{R}{m} = 4$.

Подсчитаем количество элементов выборки, попавших в интервалы: [5; 9), [9; 13), [13; 17), [17; 21), [21; 25), [25; 29]. Элемент выборки 21 является границей интервалов [17; 21) и [21; 25). При подсчете частоты относим его к интервалу [21; 25). Получаем следующий интервальный вариационный ряд:

$a_{i-1} \div a_i$	$5 \div 9$	$9 \div 13$	$13 \div 17$	$17 \div 21$	$21 \div 25$	$25 \div 29$
n_i	6	7	12	10	8	7

Контроль вычислений: $\sum_{i=1}^{6} n_i = 50$.

Чтобы перейти от интервального вариационного ряда к дискретному вариационному ряду, возьмем в качестве вариантов:

$$x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2} \qquad (i = \overline{1,\ 6}).$$

Получаем следующий дискретный вариационный ряд:

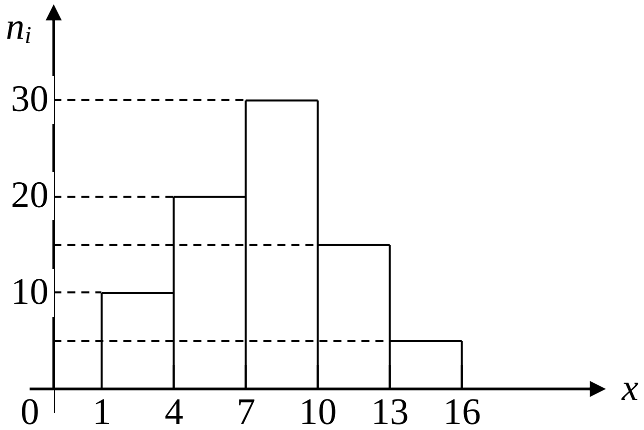
вариант x_i	7	11	15	19	23	27
частота n_i	6	7	12	10	8	7

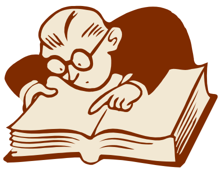
349. Построить гистограмму по данному распределению выборки:

$a_{i-1} \div a_i$	$1 \div 4$	$4 \div 7$	$7 \div 10$	$10 \div 13$	$13 \div 16$
n_i	10	20	30	15	5

Р Е Ш Е Н И Е.

Построим на оси абсцисс заданные интервалы $[a_{i-1},\ a_i)$ $(i = \overline{1,\ 5})$. Строим смежные прямоугольники, основаниями которых являются эти интервалы, а высотами – соответствующие частоты n_i.





ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

350. Записать в виде вариационного ряда выборку: 20, 32, 29, 32, 25, 22, 20, 20, 25, 29, 25, 22, 25, 29, 32, 29, 22, 25, 29, 32, 25, 25, 22, 20, 22, 25, 32, 22, 32, 32. Определить размах выборки. Построить полигон частот.

351. Записать в виде вариационного ряда выборку: 10, 13, 10, 15, 18, 13, 10, 15, 15, 13, 10, 18, 18, 13, 15, 10, 10, 13, 18, 10, 18, 18, 15, 10, 13. Определить размах выборки. Построить полигон частот.

352. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	10	12	14	16
n_i	10	20	40	10

353. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	5	9	12	17	20
n_i	15	30	25	25	5

354. Построить интервальный вариационный ряд по данной выборке: 17, 23, 12, 18, 19, 22, 27, 7, 16, 19, 24, 28, 30, 26, 8, 13, 16, 18, 25, 9, 14, 24, 15, 20, 10, 14, 20, 18, 11, 15, 21, 21, 19, 17, 23, 26, 29, 31, 32, 25. При построении интервального вариационного ряда использовать 5 интервалов равной длины. Перейти от интервального вариационного ряда к дискретному вариационному ряду.

355. Построить интервальный вариационный ряд по данной выборке: 6; 8,1; 9,2; 5; 11; 3; 7,4; 11,5; 10; 12,6; 14,2; 17; 19,8; 4; 8,5; 10,3; 11,4;

14,5; 17; 7,5; 10; 15,6; 3,6; 9; 10,7; 4,5; 7; 9,2; 10,5; 15; 5,5; 6,8; 8; 9,5; 13; 11,9; 12; 14,2; 16,5; 20; 10; 13,4; 9,6; 12; 13; 14,7; 16,2; 18,5; 21; 15. При построении интервального вариационного ряда использовать 6 интервалов равной длины. Перейти от интервального вариационного ряда к дискретному вариационному ряду.

356. Построить гистограмму по данному распределению выборки:

$a_{i-1} \div a_i$	$10 \div 14$	$14 \div 18$	$18 \div 22$	$22 \div 26$
n_i	10	25	15	10

357. Построить гистограмму по данному распределению выборки:

$a_{i-1} \div a_i$	$2 \div 7$	$7 \div 12$	$12 \div 17$	$17 \div 22$	$22 \div 27$	$27 \div 32$
n_i	5	15	30	25	15	10

358. Построить гистограмму по данному распределению выборки:

$a_{i-1} \div a_i$	$20 \div 23$	$23 \div 26$	$26 \div 29$	$29 \div 32$	$32 \div 35$
n_i	4	10	16	12	8

2.2. *Эмпирическая функция распределения*

Эмпирической функцией распределения называется функция $F_n(x)$, определяющая для каждого x относительную частоту события $X < x$.

Пусть задан дискретный вариационный ряд:

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

Вычисляем относительно частоты по формуле $n_i{*} = \dfrac{n_i}{n}$, где $n = \sum\limits_{i=1}^{m} n_i$.

Получаем:

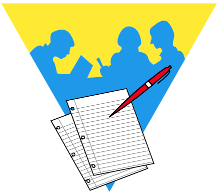
x_i	x_1	x_2	…	x_m
$n_i{*}$	$n_1{*}$	$n_2{*}$	…	$n_m{*}$

Тогда:
$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le x_1, \\ n_1{*} & \text{при} \quad x_1 < x \le x_2, \\ n_1{*} + n_2{*} & \text{при} \quad x_2 < x \le x_3, \\ n_1{*} + n_2{*} + n_3{*} & \text{при} \quad x_3 < x \le x_4, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \\ n_1{*} + n_2{*} + \ldots + n_m{*} = 1 & \text{при} \quad x > x_m \end{cases}$$

или: $$F_n(x) = \sum_{x_i < x} n_i^*.$$

Свойства эмпирической функции распределения

1. Значения $F_n(x)$ принадлежат интервалу [0; 1], т. е.: $0 \le F_n(x) \le 1$.
2. $F_n(x)$ – неубывающая функция.
3. Если x_1 – наименьший вариант, то $F_n(x) = 0$ при $x \le x_1$.
4. Если x_m – наибольший вариант, то $F_n(x) = 1$ при $x > x_m$.



ПРИМЕР

359. Найти эмпирическую функцию распределения по данному распределению выборки:

x_i	1	4	7
n_i	5	20	25

Построить график функции распределения.

РЕШЕНИЕ.

Находим объем выборки: $n = 5 + 20 + 25 = 50$. Для каждого варианта x_i вычисляем относительную частоту. Получаем:

x_i	1	4	7
n_i^*	0,1	0,4	0,5

Контроль вычислений: $\sum_{i=1}^{3} n_i^* = 1$.

Находим эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$.

Если $x \le 1$, то $F_n(x) = 0$.

Если $1 < x \le 4$, то $F_n(x) = n_1^* = 0{,}1$.

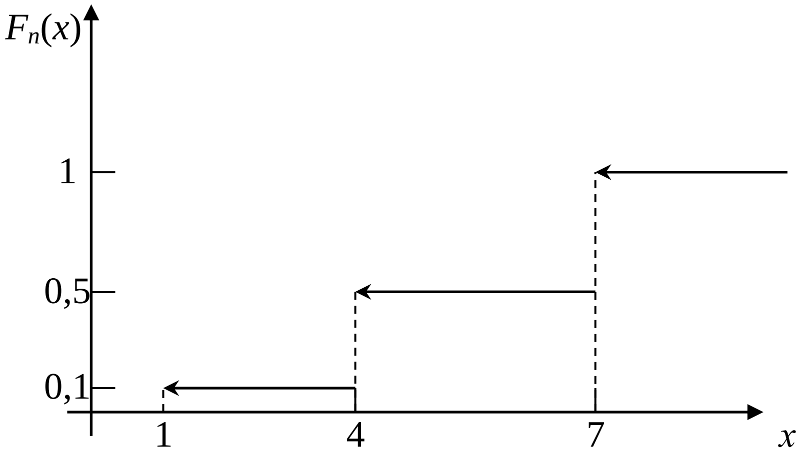
Если $4 < x \le 7$, то $F_n(x) = n_1^* + n_2^* = 0{,}5$.

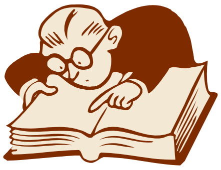
Если $x > 7$, то $F_n(x) = n_1^* + n_2^* + n_3^* = 1$.

Таким образом,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 0{,}1 & \text{при} \quad 1 < x \le 4, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 4 < x \le 7, \\ 1 & \text{при} \quad x > 7. \end{cases}$$

Строим график функции $F_n(x)$:





ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

360. Найти эмпирическую функцию распределения по данному распределению выборки:

x_i	0	2	4
n_i	8	12	20

Построить график функции распределения.

361. Найти эмпирическую функцию распределения по данному распределению выборки:

x_i	–2	1	4	6
n_i	5	10	20	15

Построить график функции распределения.

362. Найти эмпирическую функцию распределения по данному распределению выборки:

x_i	1	3	6	8
n_i	5	15	25	15

Построить график функции распределения.

363. Найти эмпирическую функцию распределения по данному распределению выборки:

x_i	2	5	7
n_i	12	18	10

Построить график функции распределения.

364. Найти эмпирическую функцию распределения по данному распределению выборки:

x_i	3	6	8	10
n_i	6	14	25	15

Построить график функции распределения.

2.3. *Числовые характеристики выборки*

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака извлечена выборка объема n.

Выборочной средней (***средней арифметической***) $\overline{x}$ называется среднее арифметическое вариантов выборочной совокупности. Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ различны, то:

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}.$$

Если же значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$ имеют частоты $n_1, n_2, \ldots, n_m$ ($\sum_{i=1}^{m}n_i=n$), то:

$$\overline{x}=\frac{x_1n_1+x_2n_2+\ldots+x_mn_m}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{m}x_in_i}{n}.$$

При вычислении выборочной средней интервального вариационного ряда необходимо вначале перейти к дискретному вариационному ряду, а затем вычислить $\overline{x}$.

Свойства выборочной средней

1. Если все варианты увеличить в одно и то же число k раз, то выборочная средняя увеличится в k раз.
2. Если все варианты увеличить на одно и то же число a, то и выборочная средняя увеличится на это же число a.
3. Средняя арифметическая отклонений вариантов x_i от своей выборочной средней $\overline{x}$ равна нулю.

Выборочной дисперсией (дисперсией вариационного ряда) называется средняя арифметическая квадратов отклонений вариантов от своей выборочной средней:

$$D_в = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 n_i .$$

Свойства выборочной дисперсии

1. Если все варианты увеличить в одно и то же число k раз, то выборочная дисперсия увеличится в k^2 раз.
2. Если все варианты увеличить на одно и то же число a, то выборочная дисперсия не изменится.
3. Выборочная дисперсия равна выборочной средней квадратов вариантов без квадрата их выборочной средней, т. е.:

$$D_в = S^2 = (\overline{x^2}) - (\bar{x})^2 .$$

Это свойство используется на практике для вычисления выборочной дисперсии. При вычислении дисперсии интервального вариационного ряда следует сначала перейти к дискретному вариационному ряду.

Средним квадратическим отклонением называется арифметическое значение корня квадратного из дисперсии $S = \sqrt{D_в}$.

Начальным моментом k-го порядка $\nu_k{*}$ вариационного ряда называется средняя арифметическая k-х степеней вариантов, т. е.:

$$\nu_k{*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^k n_i .$$

При $k = 0, 1, 2$ получаем: $\nu_0{*} = 1$, $\nu_1{*} = \bar{x}$, $\nu_2{*} = (\overline{x^2})$.

Центральным моментов k-го порядка $\mu_k{*}$ вариационного ряда называется средняя арифметическая k-х степеней отклонений вариантов от своей выборочной средней, т. е.:

$$\mu_k{*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^k n_i .$$

При $k = 0, 1, 2$ получаем: $\mu_0{*} = 1$, $\mu_1{*} = 0$, $\mu_2{*} = D_в$.

Центральные моменты удобно рассчитывать по начальным, используя следующие соотношения между ними:

$\mu_2{*} = \nu_2{*} - (\nu_1{*})^2$;

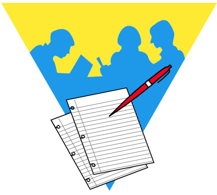
$\mu_3{*} = \nu_3{*} - 3\nu_2{*}\nu_1{*} + 2(\nu_1{*})^3$.

Показатель асимметрии A^* вычисляется по формуле:

$$A^* = \frac{\mu_3{}^*}{(\mu_2{}^*)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x})^3 n_i}{S^3}.$$

Если $A^* = 0$, то распределение симметрично относительно $\overline{x}$.

Если $A^* > 0$, то асимметрия правосторонняя. Если $A^* < 0$, то асимметрия левосторонняя.



ПРИМЕРЫ

365. Вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение по данному вариационному ряду:

x_i	–1	0	1	2	3
n_i	5	8	10	10	7

РЕШЕНИЕ.

Все вычисления оформляем в виде таблицы:

i	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
1	–1	5	–5	5
2	0	8	0	0
3	1	10	10	10
4	2	10	20	40
5	3	7	21	63
$\sum$		40	46	118

Для вычисления выборочной средней $\overline{x}$ используем формулу:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n},$$

где $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$.

В данном случае: $\overline{x} = \frac{46}{40} = 1{,}15$.

Для вычисления выборочной дисперсии используем формулу:

$$D_в = S^2 = (\overline{x^2}) - (\overline{x})^2.$$

В данном случае:

$$\overline{(x^2)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2} n_i}{n} = \frac{118}{40} = 2{,}95;$$

$$D_в = 2{,}95 - (1{,}15)^2 = 1{,}6275.$$

Среднее квадратическое отклонение $S = \sqrt{1{,}6275} = 1{,}276$.

366. Вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение по данному вариационному ряду:

$a_{i-1} \div a_i$	$1 \div 3$	$3 \div 5$	$5 \div 7$	$7 \div 9$	$9 \div 11$	$11 \div 13$
n_i	1	2	4	2	1	1

РЕШЕНИЕ.

От заданного интервального вариационного ряда переходим к дискретному вариационному ряду. Для этого вычисляем: $x_i = \dfrac{a_{i-1} + a_i}{2}$ $\left(i = \overline{1,\ 6}\right)$, а значения частот n_i переписываем без изменения.

Все дальнейшие вычисления оформляем в виде таблицы:

i	$a_{i-1} \div a_i$	n_i	x_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
1	$1 \div 3$	1	2	2	4
2	$3 \div 5$	2	4	8	32
3	$5 \div 7$	4	6	24	144
4	$7 \div 9$	2	8	16	128
5	$9 \div 11$	1	10	10	100
6	$11 \div 13$	1	12	12	144
$\sum$		11		72	552

Находим выборочную среднюю:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n} = \frac{72}{11} = 6{,}54.$$

Вычисляем $\left(\overline{x^2}\right)$:

$$\overline{(x^2)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2} n_i}{n} = \frac{552}{11} = 50{,}18.$$

Находим выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$D_в = S^2 = 50{,}18 - (6{,}54)^2 = 7{,}41;$$

$$S = \sqrt{D_в} = 2{,}72.$$

367. Вычислить показатель асимметрии A^* по данному распределению выборки:

$a_{i-1} \div a_i$	$10 \div 12$	$12 \div 14$	$14 \div 16$	$16 \div 18$	$18 \div 20$	$20 \div 22$	$22 \div 24$
n_i	2	4	8	12	16	10	3

РЕШЕНИЕ.

От интервального вариационного ряда переходим к дискретному вариационному ряду. Получаем:

x_i	11	13	15	17	19	21	23
n_i	2	4	8	12	16	10	3

Находим начальные моменты: ν_1^*, ν_2^*, ν_3^*.

Все вычисления оформляем в виде таблицы:

i	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	$x_i^3 n_i$
1	11	2	22	242	2662
2	13	4	52	676	8788
3	15	8	120	1800	27000
4	17	12	204	3468	58956
5	19	16	304	5776	109744
6	21	10	210	4410	92610
7	23	3	69	1587	36501
$\sum$	119	55	981	17959	336261

$$\nu_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i n_i}{55} = 17{,}84; \qquad \nu_2^* = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i^2 n_i}{55} = 326{,}53;$$

$$\nu_3^* = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i^3 n_i}{55} = 6113{,}84.$$

Находим центральные моменты μ_2^* и μ_3^* по формулам:

$$\mu_2^* = \nu_2^* - (\nu_1^*)^2; \qquad \mu_3^* = \nu_3^* - 3\nu_2^*\nu_1^* + 2(\nu_1^*)^3.$$

Получаем: $\mu_2^* = 326{,}53 - (17{,}84)^2 = 8{,}26;$

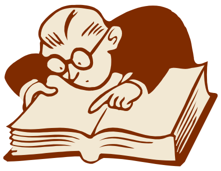
$$\mu_3^* = 6113{,}84 - 3 \cdot 326{,}53 \cdot 17{,}84 + 2(17{,}84)^3 = -6{,}32.$$

Показатель асимметрии A^* вычисляем по формуле:

$$A^* = \frac{\mu_3^*}{(\mu_2^*)^{3/2}}.$$

Получаем:

$$A^* = \frac{-6{,}32}{(8{,}26)^{3/2}} = -0{,}27.$$



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

368. Вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение по данному вариационному ряду:

x_i	–2	–1	0	2	3
n_i	4	6	7	7	6

369. Вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение по данному вариационному ряду:

x_i	–2	–1	0	1	2	3
n_i	3	7	16	13	6	5

370. Вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение по данному вариационному ряду:

x_i	0	1	2	3	5
n_i	6	7	13	9	5

371. Вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение по данному распределению выборки:

x_i	–3	–2	–1	0	2	3
n_i	4	9	12	11	8	6

372. Вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение по данному вариационному ряду:

$a_{i-1} \div a_i$	$5 \div 8$	$8 \div 11$	$11 \div 14$	$14 \div 17$	$17 \div 20$
n_i	2	5	11	9	3

373. Вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение по данному распределению выборки:

$a_{i-1} \div a_i$	$(-1) \div 3$	$3 \div 7$	$7 \div 11$	$11 \div 15$	$15 \div 19$
n_i	4	8	13	10	5

374. Вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение по данному вариационному ряду:

$a_{i-1} \div a_i$	$(-2) \div 0$	$0 \div 2$	$2 \div 4$	$4 \div 6$	$6 \div 8$	$8 \div 10$
n_i	2	5	9	7	4	3

375. Вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение по данному вариационному ряду:

$a_{i-1} \div a_i$	$0 \div 4$	$4 \div 8$	$8 \div 12$	$12 \div 16$	$16 \div 20$	$20 \div 24$
n_i	3	5	12	10	6	4

376. Вычислить показатель асимметрии по данному распределению выборки:

x_i	–3	–2	–1	0	1	3
n_i	5	7	14	12	8	4

377. Вычислить показатель асимметрии по данному распределению выборки:

x_i	–1	0	1	2	3	4
n_i	3	5	12	9	7	4

378. Вычислить показатель асимметрии по данному распределению выборки:

$a_{i-1} \div a_i$	$7 \div 9$	$9 \div 11$	$11 \div 13$	$13 \div 15$	$15 \div 17$	$17 \div 19$
n_i	3	6	7	5	5	4

379. Вычислить показатель асимметрии по данному распределению выборки:

$a_{i-1} \div a_i$	$8 \div 12$	$12 \div 16$	$16 \div 20$	$20 \div 24$	$24 \div 28$
n_i	2	6	9	5	3

2.4. *Условные варианты*

Если значения признака x_1, x_2, …, x_m выражаются многозначными числами, то вычисление выборочной средней и выборочной дисперсии трудоемко. В этом случае целесообразно при вычислениях ввести условные варианты.

Используем следующие свойства выборочной средней и дисперсии:

1) $\overline{(k \cdot x)} = k \cdot \bar{x}$; $\quad D_в(k \cdot x) = k^2 \cdot D_в(x)$;

2) $\overline{(x - a)} = \bar{x} - a$; $\quad D_в(x - a) = D_в(x)$.

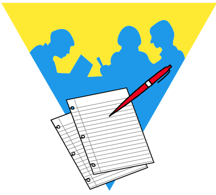
Пусть выборка задана в виде распределения равноотстоящих вариантов и их частот.

Условные варианты u_i вводим по формуле: $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$, где h – разность между двумя соседними вариантами, т. е.: $h = x_i - x_{i-1}$.

В качестве a удобнее всего выбирать значение варианта, стоящее в центре вариационного ряда.

Выражения исходных выборочной средней, дисперсии и среднего квадратического отклонения через соответствующие характеристики в условных вариантах имеют вид:

$$\bar{x} = h\bar{u} + a; \qquad D_в(x) = h^2 \cdot D_в(u); \qquad S_x = hS_u.$$



ПРИМЕР

380. С помощью перехода к условным вариантам вычислить $\bar{x}$, $D_в(x)$, S_x для данного вариационного ряда:

$a_{i-1} \div a_i$	$154 \div 158$	$158 \div 162$	$162 \div 166$	$166 \div 170$	$170 \div 174$	$174 \div 178$	$178 \div 182$
n_i	10	14	26	28	12	8	2

РЕШЕНИЕ.

От интервального вариационного ряда переходим к дискретному вариационному ряду. Получаем:

x_i	156	160	164	168	172	176	180
n_i	10	14	26	28	12	8	2

Вводим условные варианты: $u_i = \dfrac{x_i - 168}{4}$. Находим $\bar{u}$, $D_в(u)$, S_u. Все вычисления оформляем в виде таблицы:

i	x_i	u_i	n_i	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$
1	156	–3	10	–30	90
2	160	–2	14	–28	56
3	164	–1	26	–26	26
4	168	0	28	0	0
5	172	1	12	12	12
6	176	2	8	16	32
7	180	3	2	6	18
$\sum$			100	–50	234

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{7} u_i n_i}{100} = -0{,}5; \qquad \overline{u^2} = \frac{\sum_{i=1}^{7} u_i^2 n_i}{100} = 2{,}34.$$

$$D_в(u) = \overline{u^2} - (\bar{u})^2 = 2{,}34 - (-0{,}5)^2 = 2{,}09.$$

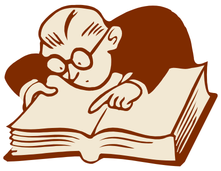
$$S_u = \sqrt{2{,}09} = 1{,}446.$$

Находим: $\bar{x}$, $D_в(x)$, S_x:

$\bar{x} = 4 \cdot \bar{u} + 168 = 166;$

$D_в(x) = 16 \cdot D_в(u) = 33{,}44;$

$S_x = 4 \cdot S_u = 5{,}78.$



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

381. С помощью перехода к условным вариантам вычислить $\bar{x}$, $D_в(x)$, S_x для данного вариационного ряда:

x_i	40	45	50	55	60	65
n_i	5	7	13	11	8	6

382. С помощью перехода к условным вариантам вычислить $\bar{x}$, $D_в(x)$, S_x для данного вариационного ряда:

x_i	120	123	126	129	132	135	138
n_i	3	8	10	15	12	7	5

383. С помощью перехода к условным вариантам вычислить $\bar{x}$, $D_в(x)$, S_x для данного вариационного ряда:

x_i	90	94	98	102	106	110
n_i	4	6	11	8	8	3

384. С помощью перехода к условным вариантам вычислить $\bar{x}$, $D_в(x)$, S_x для данного вариационного ряда:

$a_{i-1} \div a_i$	$80 \div 83$	$83 \div 86$	$86 \div 89$	$89 \div 92$	$92 \div 95$	$95 \div 98$
n_i	2	5	8	6	6	3

385. С помощью перехода к условным вариантам вычислить $\bar{x}$, $D_в(x)$, S_x для данного вариационного ряда:

$a_{i-1} \div a_i$	$140 \div 142$	$142 \div 144$	$144 \div 146$	$146 \div 148$	$148 \div 150$
n_i	6	10	14	13	7

386. С помощью перехода к условным вариантам вычислить $\bar{x}$, $D_в(x)$, S_x для данного вариационного ряда:

$a_{i-1} \div a_i$	$200 \div 205$	$205 \div 210$	$210 \div 215$	$215 \div 220$	$220 \div 225$	$225 \div 230$
n_i	4	10	11	10	9	6

2.5. *Предварительная обработка данных*

При проведении измерений иногда случается, что один результат (реже два и более) резко отличается от других. Такой результат существенно искажает выборочные среднюю и дисперсию. Возникает задача: считать ли такое измерение аномальным или же принадлежащим данной генеральной нормальной совокупности.

1. Пусть известно σ^2 и неизвестно математическое ожидание и пусть $x_{\max}$ – наибольшее из измерений. Найдем вероятность:

$$\mathrm{p} = \mathrm{P}(X > x_{\max}) \approx n\left[0{,}5 - \Phi\left(\beta\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\right],$$

где $\beta = \dfrac{x_{\max} - \bar{x}}{\sigma}$.

Если р < α (α – уровень значимости, обычно α = 0,05), то $x_{\max}$ исключается из совокупности. При оценке $x_{\min}$ полагают: $\beta = \dfrac{\bar{x} - x_{\min}}{\sigma}$.

Отметим, что при $x > 3$ для $\Phi(x)$ необходимо использовать выражение: $\Phi(x) \approx 0{,}5 - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{15}{x^6}\right)$.

2. Пусть σ^2 и $\bar{x}$ известны. Тогда находят вероятность:

$$\mathrm{p} = \mathrm{P}(X > x_{\max}) = \mathrm{p}\left(\frac{X - \bar{x}}{S_{испр.}} > \beta\right)$$

где $\beta = \dfrac{x_{\max} - \bar{x}}{S_{испр.}}$.

В приложении 6 приведены значения β_α, удовлетворяющие уравнению $\alpha = \mathrm{P}\left(\dfrac{X - \bar{x}}{S_{испр.}} > \beta_\alpha\right)$ для трех уровней значимости α и $n \le 25$; если $\beta > \beta_\alpha$, то измерение исключается (при $n > 25$ пользуемся таблицей для $\Phi(x)$, заменив σ^2 на $S^2_{испр.}$).

ПРИМЕР

387. Рассмотрим следующий вариационный ряд:

x_i	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001
n_i	1	–	1	1	–	2	3	3	4	4	6	6	5	8	10
x_i	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010	1011	1012	1013	1014	1015	1016
n_i	6	4	7	6	4	5	3	4	3	1	2	1	–	–	–
x_i	1017	1018													
n_i	–	1													

Здесь $n = 100$, $\bar{x} = 1001{,}5$, $S_{\text{испр.}} = 5{,}70$.

Является ли значение 1018 аномальным при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$?

РЕШЕНИЕ.

Найдем: $\beta = \dfrac{1018 - 1001{,}5}{5{,}70} = 2{,}89$.

Так как $n > 25$, то находим: $\mathrm{P} = 100\left(0{,}5 - \Phi\left(2{,}89\sqrt{\dfrac{100}{99}}\right)\right) = 0{,}18$.

Так как 0,18 > 0,05, то нет оснований для исключения крайнего значения 1018.

2.6. *Точечные оценки параметров распределения*

Пусть дана выборка x_1, x_2, …, x_n, по которой был определен закон распределения генеральной совокупности с точностью до параметров. Требуется получить статистическую оценку значений неизвестных параметров по заданным значениям элементов выборки.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом. Пусть для неизвестного параметра Θ получена точечная оценка: $\tilde{\Theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Свойства статистических оценок

1. Оценка $\tilde{\Theta}$ называется ***несмещенной***, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру Θ при любом объеме выборки, т. е.:

$$\mathrm{M}(\tilde{\Theta}) = \Theta.$$

2. Оценка $\tilde{\Theta}$ называется ***состоятельной***, если по мере роста числа наблюдений n она сходится по вероятности к оцениваемому параметру Θ, т. е.:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[|\Theta - \tilde{\Theta}| < \varepsilon] = 1.$$

3. Оценка $\tilde{\Theta}$ называется ***эффективной***, если она среди всех других несмещенных оценок этого параметра имеет наименьшую дисперсию.

Рассмотрим некоторые статистические оценки

1. Пусть по данной выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из генеральной совокупности с математическим ожиданием a вычислена выборочная средняя:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Доказано, что это несмещенная, состоятельная оценка математического ожидания a.

2. Рассмотрим выборочную дисперсию: $\mathrm{D}_в = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Доказано, что это смещенная оценка дисперсии, т. к.:

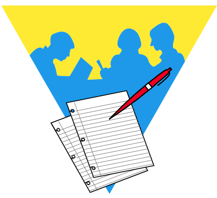
$$\mathrm{M}(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Несмещенной оценкой дисперсии служит «исправленная» дисперсия:

$$\mathrm{D}_{испр.} = \hat{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Оценка $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ является состоятельной оценкой дисперсии σ^2.

3. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – выборка значений из генеральной совокупности с известным математическим ожиданием a. Тогда $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$ является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии σ^2.



ПРИМЕР

388. Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии по данному распределению выборки:

x_i	–3	–1	0	1	2
n_i	6	10	15	12	7

Р Е Ш Е Н И Е.

Объем выборки: $n = 50$. Несмещенной оценкой математического ожидания является выборочная средняя:

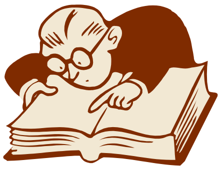
$$\bar{x} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{5} x_i n_i = -0{,}04.$$

Вычисляем выборочную дисперсию:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{5} x_i{}^2 n_i = \frac{1}{50}(9\cdot 6 + 1\cdot 10 + 0 + 1\cdot 12 + 4\cdot 7) = 2{,}08.$$

$$S^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 2{,}08 - (-0{,}04)^2 = 2{,}0784.$$

Несмещенную оценку дисперсии вычисляем по формуле: $\hat{S}^2 = \dfrac{n}{n-1}S^2$, т. е.: $\hat{S}^2 = \dfrac{50}{49}\cdot 2{,}0784 = 2{,}1208$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

389. Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии по данному распределению выборки:

x_i	–2	–1	0	2	3	4
n_i	4	7	10	8	8	3

390. Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии по данному распределению выборки:

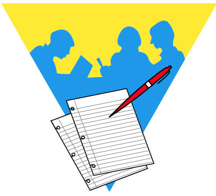
x_i	0	1	3	5	6
n_i	3	6	9	8	4

391. По выборке объема $n = 30$ найдена выборочная дисперсия $S^2 = 4$. Найти несмещенную оценку дисперсии.

392. По выборке объема $n = 20$ найдена выборочная дисперсия $S^2 = 5$. Найти несмещенную оценку дисперсии.

2.7. *Метод моментов*

Пусть закон распределения генеральной совокупности зависит от k параметров Θ_1, Θ_2, …, Θ_k. Тогда от этих параметров зависят и теоретические моменты. Метод моментов заключается в следующем: по выборке вычисляются k выборочных (начальных или центральных) моментов и приравниваются соответствующим теоретическим моментам. В качестве оценок параметров Θ_1, Θ_2, …, Θ_k берутся решения полученной системы $\tilde{\Theta}_1$, $\tilde{\Theta}_2$, …, $\tilde{\Theta}_k$, которые являются функциями элементов выборки.



ПРИМЕРЫ

393. Имеется выборка x_1, x_2, …, x_n объема n из генеральной совокупности, распределенной по закону Пуассона с неизвестным параметром λ. Найти оценку параметра λ, используя метод моментов, и показать, что это будет несмещенная оценка.

РЕШЕНИЕ.

Известно, что теоретический начальный момент первого порядка $\nu_1 = \mathrm{M}(X)$. С другой стороны, математическое ожидание $\mathrm{M}(X)$ в случае закона Пуассона равно λ.

Получаем: $\nu_1 = \lambda$.

Выборочный начальный момент первого порядка: $\nu_1{}^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Приравнивая теоретический момент ν_1 выборочному моменту $\nu_1{}^*$, получаем:

$$\tilde{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Вычисляем $\mathrm{M}(\tilde{\lambda})$:

$$\mathrm{M}(\tilde{\lambda}) = \mathrm{M}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}(x_i) = \frac{1}{n}\cdot n\lambda = \lambda,$$

т. е. $\tilde{\lambda}$ – несмещенная оценка.

394. Имеется выборка x_1, x_2, …, x_n из генеральной совокупности, распределенной равномерно на интервале $[a, в]$ с неизвестными параметрами a и $в$. Необходимо методом моментов найти оценки параметров a и $в$.

Р Е Ш Е Н И Е.

Для случайной величины X, распределенной равномерно на интервале $[a, в]$, имеем:

$$\nu_1 = \mathrm{M}(X) = \frac{a+в}{2}; \qquad \mu_2 = D(X) = \frac{(в-a)^2}{12}.$$

Соответствующие выборочные моменты:

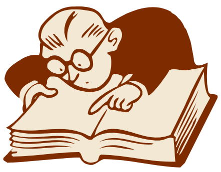
$$\nu_1{*} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad \mu_2{*} = \mathrm{D}_в = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Приравнивая теоретические моменты выборочным моментам, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{a}+\tilde{в}}{2} = \bar{x}, \\ \dfrac{(\tilde{в}-\tilde{a})^2}{12} = S^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{a}+\tilde{в} = 2\bar{x}, \\ \tilde{в}-\tilde{a} = 2\sqrt{3}\,S. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\tilde{a} = \bar{x} - \sqrt{3}\cdot S; \qquad \tilde{в} = \bar{x} + \sqrt{3}\cdot S.$$



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

395. Имеется выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону с неизвестными параметрами a и σ. Необходимо методом моментов найти оценки параметров a и σ.

396. Имеется выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объема n из генеральной совокупности, имеющей показательное распределение с неизвестным параметром λ. Найти оценку параметра λ, используя метод моментов.

397. Имеется выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объема n из генеральной совокупности, имеющей геометрическое распределение, т. е.: $\mathrm{P}(X = m) = (1-\mathrm{p})^{m-1}\cdot \mathrm{p}$.

Найти оценку неизвестного параметра p, если $\mathrm{M}(X) = \dfrac{1}{p}$.

398. Из генеральной совокупности, распределенной по биномиальному закону: $X = 0, 1, 2, \ldots, m$; $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}_m(k) = C_m^k\, \mathrm{p}^k (1-\mathrm{p})^{m-\mathrm{k}}$, извлечена выборка объема n: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Найти методом моментов оценку параметра p и показать, что это будет несмещенная оценка.

2.8. *Метод наибольшего правдоподобия*

Имеется выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ объема n из генеральной совокупности, закон распределения которой известен и зависит от k параметров Θ_1, Θ_2, …, Θ_k.

Рассмотрим два случая:

1. Пусть определяем оценки параметров распределения дискретной случайной величины, закон распределения которой имеет вид:

$$\mathrm{P}(X = x_i) = \mathrm{p}(x_i, \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k).$$

Составляем функцию правдоподобия, которая равна вероятности того, что элементы выборки примут конкретные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, т. е.: $L^*(x_1, x_2, \dots, x_n, \Theta_1, \dots, \Theta_k) = \mathrm{p}(x_1, \Theta_1, \dots, \Theta_k) \cdot \mathrm{p}(x_2, \Theta_1, \dots, \Theta_k) \cdot \dots$ x x $\mathrm{p}(x_n, \Theta_1, \dots, \Theta_k)$. В качестве оценок неизвестных параметров $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$ принимаем такие значения $\tilde{\Theta}_1$, $\tilde{\Theta}_2$, …, $\tilde{\Theta}_k$, которые доставляют максимум функции правдоподобия.

Очевидно, что L^* и $\ln L^*$ достигают максимума при одних и тех же значениях параметров $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$. Поэтому на практике для упрощения вычислений в качестве функции правдоподобия удобно рассматривать $\ln L^* = L$, т. е.: $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \Theta_1, \dots, \Theta_k) = \sum_{i=1}^{n} \ln \mathrm{p}(x_i, \Theta_1, \dots, \Theta_k)$. Используя необходимые условия существования экстремума, составляем систему уравнений:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, \Theta_1, \dots, \Theta_k)}{\partial \Theta_i} = 0, \qquad (i = \overline{1, k}).$$

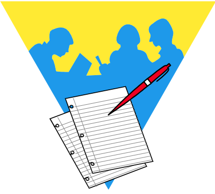
Решая систему уравнений, получаем оценки параметров $\tilde{\Theta}_1$, $\tilde{\Theta}_2$, …, $\tilde{\Theta}_k$.

2. Пусть находим оценки параметров распределения непрерывной случайной величины с плотностью распределения $f(x, \Theta_1, \dots, \Theta_k)$. Тогда функция правдоподобия определяется так:

$$L^*(x_1, \dots, x_n, \Theta_1, \dots, \Theta_k) = f(x_1, \Theta_1, \dots, \Theta_k) \cdot f(x_2, \Theta_1, \dots, \Theta_k) \cdot \dots \cdot f(x_n, \Theta_1, \dots, \Theta_k)$$

или $$L(x_1, \dots, x_n, \Theta_1, \dots, \Theta_k) = \ln L^* = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \Theta_1, \dots, \Theta_k).$$

Далее поступаем аналогично случаю 1.



ПРИМЕР

399. Имеется выборка $x_1, \ldots, x_n$, из генеральной совокупности, распределенной по закону Пуассона. Найти оценку параметра λ, используя метод наибольшего правдоподобия.

РЕШЕНИЕ.

Если генеральная совокупность распределена по закону Пуассона, то:

$$P(X=m)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^m}{m!}$$

Тогда:

$$L(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \lambda)=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\right)=\sum_{i=1}^{n}[-\lambda+x_i\ln\lambda-\ln(x_i!)]=$$

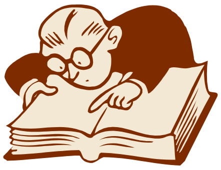
$$=-n\lambda+\ln\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!).$$

Находим частную производную $\frac{\partial L}{\partial\lambda}$ и приравниваем ее к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=-n+\frac{1}{\lambda}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=0.$$

Отсюда получаем: $\tilde{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$.

Легко проверить, что при этом значении $\tilde{\lambda}$ функция L имеет максимум.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

400. Имеется выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объема n из генеральной совокупности, имеющей геометрическое распределение, т. е.: $P(X=m)=(1-p)^{m-1}\cdot p$. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра p.

401. Из генеральной совокупности, распределенной по биномиальному закону: $X=0, 1, 2, \ldots, m$; $P(X=k)=P_m(k)=C_m^k\, p^k(1-p)^{m-k}$, извлечена выборка объема n: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Найти методом максимального правдоподобия оценку параметра p.

402. Осуществлены две серии из n_1 и n_2 независимых испытаний, причем в первой серии событие A произошло m_1 раз, а во второй серии m_2 раз. Найти методом максимального правдоподобия оценку неизвестной вероятности **p** появления события A при каждом испытании, если эта вероятность одна и та же в обеих сериях испытаний.

403. Имеется выборка x_1, x_2, …, x_n из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону с неизвестными параметрами a и σ. Найти методом максимального правдоподобия оценки этих параметров.

404. Имеется выборка x_1, x_2, …, x_n из генеральной совокупности, имеющей показательное распределение с неизвестным параметром λ. Найти оценку параметра λ, используя метод наибольшего правдоподобия.

2.9. *Интервальные оценки. Доверительные интервалы*

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. ***Доверительным интервалом*** для параметра Θ называется интервал (Θ_1, Θ_2), содержащий истинное значение параметра с заданной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$, т. е.: $P(\Theta_1 < \Theta < \Theta_2) = \gamma$.

Для симметричного относительно $\tilde{\Theta}$ доверительного интервала его ширина 2δ определяется условием: $P(|\Theta - \tilde{\Theta}| < \delta) = \gamma$.

Число $\gamma = 1 - \alpha$ называется ***доверительной вероятностью*** (***надежностью***), а значение α – ***уровнем значимости***. Нижняя и верхняя границы доверительного интервала определяются по результатам наблюдений и, следовательно, являются случайными величинами. В связи с этим говорят, что доверительный интервал накрывает оцениваемый параметр с вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$. Обычно доверительная вероятность задается заранее, причем в качестве γ берут число, близкое к единице. Наиболее часто используют значения, равные 0,90; 0,95; 0,99; 0,999.

Пусть x_1, x_2, …, x_n – выборка из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение. Рассмотрим задачу построения доверительного интервала для математического ожидания в двух случаях.

1. Пусть среднее квадратическое отклонение σ известно. Доверительный интервал для оценки математического ожидания a по выборочной средней $\bar{x}$ находим из неравенства:

$$P(|\bar{x} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma .$$

Обозначив $\dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}=t$, получим: $\delta=\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Тогда: $\mathrm{P}(\bar{x}-\delta<a<\bar{x}+\delta)=2\Phi(t)=\gamma$.

Чтобы по заданной доверительной вероятности γ найти доверительный интервал, необходимо найти значение t из равенства $2\Phi(t) = \gamma$, т. е.: $\Phi(t)=\dfrac{\gamma}{2}$. Для этого используем таблицу функции $\Phi(x)$ (см. прил. 3).

Затем находим $\delta=\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ и записываем ответ: $\bar{x}-\delta<a<\bar{x}+\delta$.

2. Пусть среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. По выборке вычисляем:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad \text{и} \qquad \hat{S}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\,.$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение $\hat{S}$ можно вычислить также по формуле: $\hat{S}=\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}\cdot S$. Требуется построить доверительный интервал для математического ожидания a, соответствующий доверительной вероятности γ. Рассмотрим случайную величину: $T=\dfrac{\bar{x}-a}{\hat{S}/\sqrt{n}}$. Случайная величина T распределена по закону Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы. Плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$S_n(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где $\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty}u^{x-1}e^{-u}du$ – гамма-функция.

Из неравенства $\mathrm{P}(|T|<t_\gamma)=2\int\limits_0^{t_\gamma}S_n(t)dt=\gamma$

получаем: $\mathrm{P}\left(\bar{x}-\dfrac{t_\gamma\hat{S}}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+\dfrac{t_\gamma\hat{S}}{\sqrt{n}}\right)=2\int\limits_0^{t_\gamma}S_n(t)dt=\gamma$.

Имеется готовая таблица (см. прил. 5), пользуясь которой по доверительной вероятности γ и числу степеней свободы $k = n - 1$ можно найти величину t_γ. Таким образом, чтобы по заданной доверительной вероятности γ найти доверительный интервал для математического ожидания a, необходимо найти величину t_γ (см. прил. 5), затем вычислить $\delta = \dfrac{t_\gamma \cdot \hat{S}}{\sqrt{n}}$ и записать ответ: $\bar{x} - \delta < a < \bar{x} + \delta$.

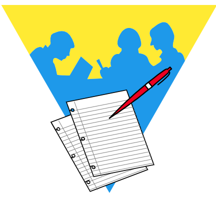
ЗАМЕЧАНИЕ. При неограниченном возрастании объема выборки n распределение Стьюдента стремится к нормальному. Поэтому при $n > 30$ можно вместо распределения Стьюдента пользоваться нормальным распределением, т. е. σ заменить на $\hat{S}$ и использовать формулы, рассмотренные в первом случае.

3. Укажем теперь доверительный интервал для дисперсии σ^2 в случае выборки из нормальной генеральной совокупности, причем математическое ожидание неизвестно. Так как $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2_{испр.}}{\sigma^2}$ имеет распределение χ^2 с $\nu = n - 1$ степенями свободы, то:

$$\underline{\chi^2_{\alpha,\,\nu}} < \frac{(n-1)S_{испр.}}{\sigma^2} < \overline{\chi^2_{\alpha,\,\nu}},$$

где $\underline{\chi^2_{\alpha,\,\nu}} = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,\nu}$, $\overline{\chi^2_{\alpha,\,\nu}} = \chi^2_{\frac{\alpha}{2},\,\nu}$ и находятся по таблице (см. прил. 4). Следовательно,

$$\sqrt{\frac{n-1}{\overline{\chi^2_{\alpha,\,\nu}}}}S_{испр.} < \sigma < \sqrt{\frac{n-1}{\underline{\chi^2_{\alpha,\,\nu}}}}S_{испр.}.$$



ПРИМЕРЫ

405. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$. Найти доверительный интервал для математического ожидания a по результатам девяти наблюдений при условии, что выборочная средняя $\bar{x} = 4{,}12$, а доверительная вероятность $\gamma = 0{,}92$.

РЕШЕНИЕ.

Находим значение t из равенства $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$. В данном случае $\Phi(t)=\frac{0{,}92}{2}=0{,}46$. По таблице (см. прил. 3) находим t = 1,75. Вычисляем δ по формуле $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Получаем: $\delta=\frac{1{,}75\cdot 2}{9}=1{,}17$.

Окончательно получаем:

$$4{,}12 - 1{,}17 < a < 4{,}12 + 1{,}17, \text{ т. е.: } 2{,}95 < a < 5{,}29.$$

406. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания a генеральной совокупности по выборочной средней будет равна δ = 0,3, если известно среднее квадратичекое отклонение σ = 1,2 нормально распределенной генеральной совокупности.

РЕШЕНИЕ.

По условию задачи доверительная вероятность γ = 0,975. Отсюда получаем: $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}=0{,}4875$. По таблице (см. прил. 3) находим t = 2,24. Из соотношения $\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}=t$ находим n: $n=\frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$.

Подставляем t = 2,24; σ = 1,2; δ = 0,3. Получаем n = 80,28. Так как n целое число, то минимальный объем выборки: n = 81.

407. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n = 10:

x_i	–2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенной случайной величины по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

РЕШЕНИЕ.

Найдем выборочную среднюю $\bar{x}$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $\hat{S}$.

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}x_i n_i=\frac{1}{10}\cdot 20=2;$$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}x_i^2 n_i=\frac{1}{10}\cdot 92=9{,}2;$$

$$S^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 9{,}2 - 4 = 5{,}2;$$

$$\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{10}{9} \cdot 5{,}2 = 5{,}78.$$

Тогда: $\hat{S} = \sqrt{5{,}78} = 2{,}4$.

По таблице (см. прил. 5) по доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ и числу степеней свободы $k = n - 1 = 9$ находим $t_\gamma = 2{,}26$.

Вычисляем: $\delta = \dfrac{t_\gamma \cdot \hat{S}}{\sqrt{n}}$. Получаем $\delta = \dfrac{2{,}26 \cdot 2{,}4}{\sqrt{10}} = 1{,}72$.

Таким образом, $2 - 1{,}72 < a < 2 + 1{,}72$, т. е.: $0{,}28 < a < 3{,}72$.

408. При многократном измерении эталонного образца на приборе были получены следующие величины отклонений или ошибок показаний прибора от истинного значения (эталона): 0,24; 0,03; –0,12; –0,15; –0,31; –0,08; –0,26; 0,19. Найти доверительный интервал с доверительной вероятностью 0,95 для дисперсии измерений на этом приборе.

Р Е Ш Е Н И Е.

Найдем $\bar{x}$ и $S^2_{\text{испр.}}$.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{8} x_k}{8} = -\frac{0{,}18}{8} = -0{,}02;$$

$$S^2_{испр.} = \frac{1}{8-1}\sum_{k=1}^{8}(x_k - (-0{,}02))^2 = \frac{0{,}3016}{7} = 0{,}043.$$

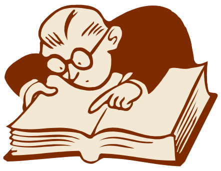
Для заданного доверительного уровня $\gamma = 0{,}95$ находим: $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}05$ и $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}975$.

Так как число степеней свободы $\nu = 8 - 1 = 7$ по таблице (см. прил. 4) определяем значение: $\overline{\chi^2_{0,05}} = \overline{\chi^2_{0,025;\ 7}} = 16{,}0$ и $\underline{\chi^2_{0,05}} = \underline{\chi^2_{0,975;\ 7}} = 1{,}69$.

Тогда для σ^2 имеем:

$$\frac{7 \cdot 0{,}043}{16{,}0} \le \sigma^2 \le \frac{7 \cdot 0{,}043}{1{,}69}$$

или $$0{,}14 \le \sigma \le 0{,}42.$$



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

409. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенной случайной величины, если даны выборочная средняя $\bar{x} = 14$, среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, объем выборки $n = 25$.

410. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью γ неизвестного математического ожидания a нормально распределенной случайной величины, если известно среднее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\bar{x}$ и объем выборки n:

а) $\sigma = 4$; $\bar{x} = 10{,}2$; $n = 16$; $\gamma = 0{,}95$;

б) $\sigma = 4$; $\bar{x} = 10{,}2$; $n = 16$; $\gamma = 0{,}99$;

в) $\sigma = 5$; $\bar{x} = 16{,}8$; $n = 25$; $\gamma = 0{,}99$.

411. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы выборки оказалась равной 1000 часов. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности a горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 40$ часов.

412. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по выборочной средней будет равна 0,2, если известно среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma = 1{,}5$.

413. Случайная величина Х имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 1{,}5$. Найти доверительный интервал для математического ожидания a по результатам 20 наблюдений при условии, что выборочная средняя $\bar{x} = 5{,}8$, а доверительная вероятность γ равна:

а) 0,9; б) 0,95; в) 0,999.

414. Случайная величина распределена нормально и для $n = 16$ вычислены $\bar{x} = 20{,}2$ и $\hat{S} = 0{,}8$. Определить интервальную оценку для математического ожидания a, если $\gamma = 0{,}95$.

415. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 12$:

x_i	–0,5	–0,4	–0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности при помощи доверительного интервала.

416. По данным 9 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены выборочная средняя $\bar{x} = 30{,}1$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $\hat{S} = 6$. Оценить истинное значение измеряемой величины при помощи доверительного интервала с надежностью: а) $\gamma = 0{,}99$; б) $\gamma = 0{,}95$.

417. По данным 16 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x} = 42{,}8$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $\hat{S} = 8$. Оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью:

а) $\gamma = 0{,}999$; б) $\gamma = 0{,}99$; в) $\gamma = 0{,}95$.

2.10. *Критерий Пирсона*

Пусть по выборке объема n построен дискретный или интервальный вариационный ряд, т. е.:

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

или

$a_{i-1} \div a_i$	$a_0 \div a_1$	$a_1 \div a_2$	…	$a_{m-1} \div a_m$
n_i	n_1	n_2	…	n_m

$n_1, n_2, \ldots, n_m$ – эмпирические частоты, причем $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$.

Проверяется гипотеза H_0, утверждающая, что генеральная совокупность имеет конкретный закон распределения (нормальный, Пуассона и т. п.).

Процедура применения критерия Пирсона (критерия χ^2) состоит из следующих этапов:

1. По вариационному ряду находим оценки неизвестных параметров предполагаемого закона распределения.
2. Определяем теоретические частоты на основе полученного закона распределения.

В случае, если X – дискретная случайная величина, вычисляем вероятности: $p_i = P(X = x_i)$. Если X – непрерывная случайная величина, определяем вероятности p_i попадания в i-й интервал, т. е.: $p_i = P(a_{i-1} < X < a_i)$.

Теоретическую частоту $\tilde{n}_i$ вычисляем по формуле $\tilde{n}_i = p_i \cdot n$, где n – объем выборки. Так как np_i могут быть дробными числами, а частоты $\tilde{n}_i$ должны выражаться целыми числами, то в качестве теоретической частоты $\tilde{n}_i$ можно взять ближайшее к np_i целое число, при этом $\sum_{i=1}^{m} \tilde{n}_i = n$.

3. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы H_0 принимается случайная величина:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}.$$

Подставляя в эту формулу заданные эмпирические частоты n_i и вычисленные теоретические частоты $\tilde{n}_i$, получим значение случайной величины χ^2, которое обозначим $\chi^2_{\text{набл}}$.

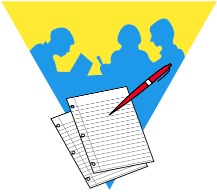
4. Закон распределения случайной величины χ^2 определяется одним параметром ν – числом степеней свободы, которое вычисляется по формуле $\nu = m - k - 1$, где m – число вариантов или интервалов заданного вариационного ряда, k – число параметров предполагаемого теоретического распределения, которые оцениваются по выборке. В частности, если предполагаемое распределение нормальное, то оценивают два параметра (математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ), поэтому $k = 2$ и число степеней свободы $\nu = m - 3$. Если предполагают, что генеральная совокупность распределена по закону Пуассона, то оценивают один параметр λ, поэтому $k = 1$ и $\nu = m - 2$. Итак, вычисляем число степеней свободы.

5. По заданному уровню значимости α и числу степеней свободы ν по таблице критических точек распределения χ^2 (см. прил. 4) находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, \nu)$.

6. Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ – нет оснований отвергать гипотезу H_0. Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$ – гипотезу H_0 отвергают.

ЗАМЕЧАНИЕ.

Для применения критерия Пирсона необходимо, чтобы объем выборки n был достаточно велик ($n \geq 50$). Кроме того, частоты n_i должны быть ≥ 5. Поэтому частоты $n_i < 5$ следует объединить. В этом случае и соответствующие им теоретические частоты следует объединить.



ПРИМЕРЫ

418. При испытании радиоэлектронной аппаратуры фиксировалось число отказов. Результаты 757 испытаний приводятся ниже:

Число отказов	0	1	2	3	4	5	≥ 6
Количество случаев	427	235	72	21	1	1	0

Проверить гипотезу H_0 о том, что число отказов имеет распределение Пуассона, при $\alpha = 0{,}05$.

Р Е Ш Е Н И Е.

1. Найдем оценку параметра λ распределения Пуассона, равную среднему числу отказов. Составим расчетную таблицу:

i	x_i	n_i	$x_i n_i$
1	0	427	0
2	1	235	235
3	2	72	144
4	3	21	63
5	4	1	4
6	5	1	5
7	6	0	0
$\sum$		757	451

Находим: $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{7} n_i} = \frac{451}{757} = 0{,}6.$$

Следовательно, теоретический закон распределения числа отказов аппаратуры имеет вид:

$$\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(X = x_i) = \frac{(0{,}6)^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-0{,}6}, \text{ где } x_i = \overline{0{,}5}.$$

2. На основе полученного закона распределения находим теоретические частоты $\tilde{n}_i$.

Составим расчетную таблицу. Вероятности p_i находим по таблице (см. прил. 1).

x_i	p_i	np_i	$\tilde{n}_i$
0	0,5488	415,4416	416
1	0,3293	249,2801	249
2	0,0988	74,7916	75
3	0,0198	14,9886	15
4	0,0030	2,2710	2
5	0,0004	0,3028	0
≥ 6	0	0	0
$\sum$			757

3. По заданным в условии эмпирическим частотам n_i и полученным теоретическим частотам $\tilde{n}_i$ вычисляем величину: $\chi^2_{набл} = \sum\limits_{i=1}^{7} \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$.

Составим расчетную таблицу, объединяя последние три строки со строкой для $x_i = 3$, так как применение критерия Пирсона требует, чтобы частоты не были малы.

i	n_i	$\tilde{n}_i$	$(n_i - \tilde{n}_i)^2$	$\frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$
1	427	416	121	0,291
2	235	249	196	0,787
3	72	75	9	0,120
4	23	17	36	2,118
$\sum$				$\chi_{\text{набл}}^2 = 3{,}316$

Так как по выборке оценивался один параметр λ, то число степеней свободы ν равно: $\nu = m - s - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$.

По таблице (см. прил. 4) находим: $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05; 2) = 5{,}99$.

Так как $\chi_{\text{набл}}^2 < \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза о распределении числа отказов аппаратуры по закону Пуассона принимается.

419. Пользуясь критерием Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ установить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с данными выборки объема $n = 100$:

$a_{i-1} \div a_i$	$3 \div 8$	$8 \div 13$	$13 \div 18$	$18 \div 23$	$23 \div 28$	$28 \div 33$	$33 \div 38$
Частоты	6	8	15	40	16	8	7

1. Найдем оценки параметров a и σ нормального распределения, для чего вычислим выборочную среднюю $\bar{x}$ и среднее квадратическое отклонение S.

Составим расчетную таблицу:

i	$a_{i-1} \div a_i$	n_i	$x_i = \dfrac{a_{i-1}+a_i}{2}$	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
1	3 ÷ 8	6	5,5	33	187,5
2	8 ÷ 13	8	10,5	84	882
3	13 ÷ 18	15	15,5	232,5	3603,75
4	18 ÷ 23	40	20,5	820	16810
5	23 ÷ 28	16	25,5	408	10404
6	28 ÷ 33	8	30,5	244	7442
7	33 ÷ 38	7	35,5	248,5	8827,45
$\sum$		100		2070	48156,7

Таким образом, $\bar{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7} x_i n_i}{n} = \dfrac{2070}{100} = 20{,}7$;

$$S^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{7} x_i^{\,2} n_i}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{48156{,}7}{100} - (20{,}7)^2 = 481{,}567 - 428{,}49 = 53{,}077;$$

$$S = \sqrt{53{,}077} = 7{,}28.$$

Следовательно, предполагаемый теоретический закон распределения генеральной совокупности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{7{,}28 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-20{,}7)^2}{2\cdot(7{,}28)^2}}.$$

2. Вычислим теоретические частоты $\tilde{n}_i$. Для этого сначала найдем теоретические вероятности p_i попадания нормально распределенной (по принятой гипотезе) случайной величины X в интервал (a_{i-1}; a_i):

$$\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(a_{i-1} < X < a_i) = \Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \bar{x}}{S}\right) = \Phi(Z_i) - \Phi(Z_{i-1}).$$

Подчеркнем, что наименьшее значение $Z_i = Z_0$ полагают равным $-\infty$, а наибольшее – $+\infty$.

Составим расчетную таблицу:

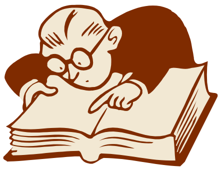
$a_{i-1} \div a_i$	$Z_{i-1} = \dfrac{a_{i-1} - \bar{x}}{S}$	$Z_i = \dfrac{a_i - \bar{x}}{S}$	$\Phi(Z_{i-1})$	$\Phi(Z_i)$	$p_i = \Phi(Z_i) - \Phi(Z_{i-1})$	np_i	$\tilde{n}_i$
$3 \div 8$	$-\infty$	–1,74	–0,5000	–0,4591	0,0409	4,09	4
$8 \div 13$	–1,74	–1,06	–0,4591	–0,3554	0,1037	10,37	10
$13 \div 18$	–1,06	–0,37	–0,3554	–0,1443	0,2111	21,11	21
$18 \div 23$	–0,37	0,32	–0,1443	0,1255	0,2698	26,98	27
$23 \div 28$	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158	21,58	22
$28 \div 33$	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132	11,32	11
$33 \div 38$	1,69	$+\infty$	0,4545	0,5000	0,0455	4,55	5
$\sum$					1,0000		100

3. Сравним эмпирические и теоретические частоты. Составим расчетную таблицу:

i	n_i	$\tilde{n}_i$	$(n_i - \tilde{n}_i)^2$	$\dfrac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$
1	6	4	4	1
2	8	10	4	0,4
3	15	21	36	1,7143
4	40	27	169	6,2593
5	16	22	36	1,6364
6	8	11	9	0,8182
7	7	5	4	0,8
$\sum$				$\chi_{набл}^2 = 12,6282$

Вычислим число степеней свободы: $\nu = m - k - 1 = 7 - 2 - 1 = 4$. По таблице (см. прил. 4), по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $\nu = 4$ находим: $\chi^2_{кр}(0,05; 4) = 9,49$.

Так как $\chi_{набл}^2 > \chi^2_{кр}$, то гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности отвергается.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

420. Фирма с целью установления известности ее продукции опросила в каждом из 100 населенных пунктов по 20 человек. Распределение числа x_i – лиц, незнакомых с продукцией фирмы таково:

x_i	0	1	2	3	4	5
Число пунктов	65	20	10	3	1	1

Можно ли при 5%-ом уровне значимости считать, что число незнакомых с продукцией фирмы подчиняется закону Пуассона?

421. В цехе с 10 станками ежедневно регистрировалось число вышедших из строя станков. Всего было проведено 200 наблюдений, результаты которых приведены ниже:

Число выбывших станков	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число зарегистрированных случаев	41	62	45	22	16	8	4	2	0	0	0

Используя критерий Пирсона, проверить гипотезу H_0 о том, что число выбывших из строя станков имеет распределение Пуассона. Принять $\alpha = 0{,}05$.

422. Ниже приводятся данные о числе деталей, поступающих на конвейер в течение 600 двухминутных интервалов:

Число деталей	0	1	2	3	4	5	6
Число интервалов	400	167	29	3	0	0	1

Используя критерий χ^2, проверить гипотезу H_0 о пуассоновском распределении числа деталей при $\alpha = 0{,}1$.

423. 200 рабочих изготавливают однотипные изделия. Для контроля качества работы проверено по 1000 единиц продукции, изготовленных каждым из них. Результаты проверки представлены в таблице:

Количество бракованных изделий	0	1	2	3	4
Число рабочих	109	65	22	3	1

С помощью критерия Пирсона проверить гипотезу о распределении бракованных изделий по закону Пуассона. Принять $\alpha = 0{,}05$.

424. Нормы полученной прибыли по 25 объектам одной фирмы приведены в таблице:

Норма прибыли	$0 \div 0{,}2$	$0{,}2 \div 0{,}4$	$0{,}4 \div 0{,}6$	$0{,}6 \div 0{,}8$	$0{,}8 \div 1{,}0$
Число объектов	2	4	7	9	3

Используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, приняв уровень значимости равным 0,05.

425. Страховая компания анализирует величину выплат страховых премий за прошедший год:

Премия (ден.ед.)	$500 \div 1500$	$1500 \div 2500$	$2500 \div 3500$	$3500 \div 4500$	$4500 \div 5500$	$5500 \div 6500$
Количество выплат	3	7	20	15	10	5

Используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, приняв уровень значимости равным 0,05.

426. Компания проводит маркетинговые исследования стоимости покупок 50 посетителей супермаркета. Результаты приведены в таблице:

Стоимость покупки (ден. ед)	$0 \div 20$	$20 \div 40$	$40 \div 60$	$60 \div 80$	$80 \div 100$
Количество покупок	2	8	20	15	5

С помощью критерия Пирсона при уровне значимости 0,1 проверить гипотезу о нормальном распределении стоимости покупок.

427. Уровень рентабельности предприятий легкой промышленности характеризуется следующими данными:

Уровень рентабельности (%)	$0 \div 5$	$5 \div 10$	$10 \div 15$	$15 \div 20$	$20 \div 25$	$25 \div 30$	$30 \div 40$
Количество предприятий	3	8	16	22	24	18	9

Проверить, используя критерий Пирсона, гипотезу о нормальном распределении уровня рентабельности, приняв за уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

2.11. *Критерий Фишера*

Пусть X и Y две нормально распределенные генеральные совокупности. Пусть из них извлечены выборки с объемами n_1 и n_2 и найдены выборочные исправленные дисперсии $\hat{S}_x^{\,2}$ и $\hat{S}_y^{\,2}$.

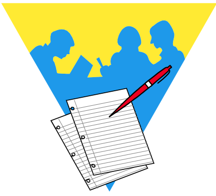
Требуется проверить гипотезу H_0, состоящую в том, что $\hat{S}_x^{\,2} = \hat{S}_y^{\,2}$, иначе $\mathrm{M}(\hat{S}_x^{\,2}) = \mathrm{M}(\hat{S}_y^{\,2})$ (т. к. $\hat{S}_x^{\,2}$ и $\hat{S}_y^{\,2}$ несмещенные оценки дисперсий). Обозначим большую из $\hat{S}_x^{\,2}$, $\hat{S}_y^{\,2}$ через $\hat{S}_б^{\,2}$, а меньшую через $\hat{S}_м^{\,2}$.

Рассмотрим случайную величину $F = \dfrac{\hat{S}_б^{\,2}}{\hat{S}_м^{\,2}}$, которая имеет распределение Фишера при условии справедливости H_0 со степенями свободы $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$ соответственно (где n_1 – объем выборки, соответствующий $\hat{S}_б^{\,2}$).

1 случай. Пусть H_0: $\mathrm{D}(X) = \mathrm{D}(Y)$, а конкурирующая гипотеза H_1: $\mathrm{D}(X) > \mathrm{D}(Y)$. В этом случае строят правостороннюю критическую область и находят $\mathrm{P}(F > F_{кр}\ (\alpha,\ n_1 - 1,\ n_2 - 1)) = \alpha$. $F_{кр}$ находят по таблицам (см. прил. 8) при заданном уровне значимости α.

Если $F_{набл.} < F_{кр.}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

2 случай. H_0: $\mathrm{D}(X) = \mathrm{D}(Y)$, а H_1: $\mathrm{D}(X) \neq \mathrm{D}(Y)$. В этом случае строят двухстороннюю критическую область и находят: $\mathrm{P}(F < F_1) = \dfrac{\alpha}{2}$, $\mathrm{P}(F > F_2) = \dfrac{\alpha}{2}$, причем достаточно найти только $F_2 = F_{кр.}(\dfrac{\alpha}{2},\ n_1 - 1,\ n_2 - 1)$ по таблицам приложения 8.



ПРИМЕРЫ

428. Пусть объемы выборок 12 и 15 соответственно, а исправленные выборочные дисперсии равны $S_x^2 = 11{,}41$ и $S_y^2 = 6{,}52$, а $\alpha = 0{,}05$. Проверить гипотезу H_0: $\mathrm{D}(X) = \mathrm{D}(Y)$ при конкурирующей гипотезе H_1: $\mathrm{D}(X) > \mathrm{D}(Y)$.

РЕШЕНИЕ.

Находят $F_{набл.} = \dfrac{11{,}41}{6{,}52} = 1{,}75$. Так как критическая область правосторонняя: $\mathrm{D}(X) > \mathrm{D}(Y)$, то достаточно найти по таблице (см. прил. 8) критическую точку $F_{кр.}(0{,}05;\ 11{,}14)$, которая оказывается равной 2,56.

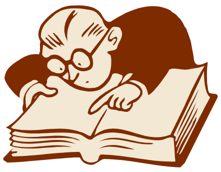
Так как $F_{набл.} < F_{кр.}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

429. Пусть объемы независимых выборок, извлеченных из нормальных генеральных совокупностей, соответственно равны 14 и 10, а найденные исправленные выборочные дисперсии соответственно 0,84 и 2,52, $\alpha = 0{,}1$. Проверить нулевую гипотезу $\mathrm{D}(X) = \mathrm{D}(Y)$ при конкурирующей $\mathrm{D}(X) \neq \mathrm{D}(Y)$.

Р Е Ш Е Н И Е.

Находим $F_{эмп.} = \dfrac{2{,}52}{0{,}84} = 3$, а затем по таблице (см. прил. 8) $F_{кр.}(0{,}05;\, 9{,}13)$, которая оказывается равной 2,72.

Так как $F_{эмп.} > F_{кр.}$, то нулевую гипотезу отвергаем.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

430. Объемы выборок равны 9 и 16 соответственно. А исправленные выборочные дисперсии 34,02 и 12,15. Проверить нулевую гипотезу $\mathrm{D}(X) = \mathrm{D}(Y)$ при конкурирующей $\mathrm{D}(X) > \mathrm{D}(Y)$.

431. Объемы выборок 9 и 6, а выборочные дисперсии 14,4 и 20,5. Проверить нулевую гипотезу при конкурирующей $\mathrm{D}(X) \neq \mathrm{D}(Y)$.

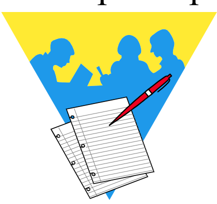
2.12. *Критерий согласия Колмогорова*

При помощи этого критерия обнаруживают отклонения от нормального закона при малых выборках.

Для проверки гипотезы нормальности необходимо вычислить значение $D_{эмп.} = \max|F_{теор.}(t) - F_{эмп.}(t)|$ и сравнить его с $D_{кр.}$, которое находится по приложению 7 при заданных n и уровня значимости α.

Если $D_{эмп.} < D_{кр.}$, то гипотеза принимается.

ЗАМЕЧАНИЕ. При использовании критерия согласия Колмогорова все параметры теоретического распределения считаются известными.



ПРИМЕР

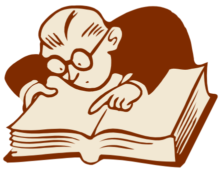
432. В 10-ти опытах получили следующие значения интересующей нас величины: 5,30; 5,38; 5,28; 5,40; 5,42; 5,41; 5,39; 5,51; 5,43; 5,47. Проверить гипотезу о нормальности генеральной совокупности, если $a = 5{,}40$; $\sigma = 0{,}05$.

Р Е Ш Е Н И Е.

Составим таблицу

№ п/п	x_i	$F_{эмп.}(x_i)$	$z_i = \dfrac{x_i - 5{,}40}{0{,}05}$	$F_{теор.}(z_i)$	$\Delta = F_{тер.} - F_{эмп.}$
1	5,28	0,1	–2,4	0,0082	–0,0918
2	5,30	0,2	–2,0	0,0228	–0,1772
3	5,38	0,3	–0,4	0,3446	0,0446
4	5,39	0,4	–0,2	0,4207	0,0207
5	5,40	0,5	0	0,5000	0
6	5,41	0,6	0,2	0,5793	–0,0207
7	5,42	0,7	0,4	0,6554	–0,0446
8	5,43	0,8	0,6	0,7257	–0,743
9	5,47	0,9	1,6	0,9452	0,0452
10	5,51	1,0	2,2	0,5961	0,0139

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и $n = 10$ по приложению 7 находим $D_{кр} = 0{,}409$. Так как $\max|F_{теор.} - F_{эмп.}| = 0{,}1772$, то $D_{эмп.} < D_{кр.}$ и гипотезу о нормальности генеральной совокупности принимаем.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

433. Ниже приводятся данные о фактических объемах сбыта товара (в условных единицах)

Район	1	2	3	4	5
Объем сбыта	110	130	70	90	100

Является ли эта выборка выборкой из нормальной генеральной совокупности, если математическое ожидание равно 100, а дисперсия 400.

434. Имеется выборка из некоторой генеральной совокупности: –0,5; 1,2; 0; 0,8; 1,2; –0,4; 0,2; 1,5; 0,6; –0,4; 1,0. Проверить гипотезу о нормальности выборки, если математическое ожидание равняется 0,41, а дисперсия 0,5.

2.13. *Выборочное уравнение линейной регрессии*

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y). Пусть проведено n независимых испытаний, в результате которых получено n пар чисел: (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n),
где x_i – значения случайной величины X,
y_i – значения случайной величины Y.

Необходимо найти приближенное представление значений одной из случайных величин как функции значений другой случайной величины.

Уравнение $y = f(x)$ называют выборочным уравнением регрессии Y на X; уравнение $x = \varphi(y)$ называют выборочным уравнением регрессии X на Y. Если $f(x)$ и $\varphi(y)$ линейные функции, то регрессия называется линейной. В этом случае: $y = ax + b$ и $x = cy + d$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть среди точек (x_i, y_i) нет совпавших. Для того чтобы составить выборочное уравнение прямой линии регрессии, делаем следующее:

а) вычисляем $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{xy}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$, S_x, S_y по формулам:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}, \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2},$$

$$S_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \quad S_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2;$$

б) вычисляем выборочный коэффициент корреляции r:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y}.$$

Выборочный коэффициент корреляции r характеризует силу линейной корреляционной связи. Чем ближе $|r|$ к единице, тем связь сильнее; чем ближе $|r|$ к нулю, тем связь слабее;

в) для получения уравнения $y = ax + b$ вычисляем a и b по формулам: $a = r\dfrac{S_y}{S_x}$; $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Для получения уравнения $x = cy + d$ вычисляем c и d по формулам: $c = r \cdot \dfrac{S_x}{S_y}$; $d = \bar{x} - c\bar{y}$.

Обе прямые $y = ax + b$ и $x = cy + d$ проходят через точку $(\bar{x}, \bar{y})$.

2. При большом n значение x_i может встретиться m_i раз, значение y_j – n_j раз, одна и та же пара чисел (x_i, y_j) – n_{ij} раз. В этом случае выборку удобно представлять в виде корреляционной таблицы:

$x_i \backslash y_j$	y_1	y_2	…	y_l	m_i
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1l}	m_1
x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2l}	m_2
…	…	…	…	…	…
x_k	n_{k1}	n_{k2}	…	n_{kl}	m_k
n_j	n_1	n_2	…	n_l	n

где $m_i = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}$, $n_j = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}$; объем выборки $n = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} n_{ij}$ (заметим, что $\sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{j=1}^{l} n_j = n$).

Выборочное уравнение прямой линии регрессии находим аналогично первому случаю, только $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{xy}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ с учетом повторяющихся значений x_i и y_j вычисляем по формулам:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} y_j n_j, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} x_i y_j n_{ij},$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i, \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} y_j^2 n_j.$$

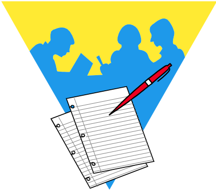
Если рассматривается выборка из генеральной совокупности непрерывных случайных величин X и Y, то корреляционная таблица содержит интервалы $[a_{i-1}, a_i)$ и $[b_{j-1}, b_j)$. В этом случае для вычисления $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{xy}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ необходимо вначале перейти к дискретным вариационным рядам, а затем выполнить вычисления по рассмотренным выше формулам.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если значения x_i, y_j – большие или очень маленькие числа, то при вычислении $\bar{x}$, $\bar{y}$, S_x, S_y можно использовать условные варианты.

Пусть $u_i = \dfrac{x_i - \alpha}{p}$, $v_j = \dfrac{y_j - \beta}{q}$.

Тогда: $\bar{x} = p\bar{u} + \alpha$, $\bar{y} = q\bar{v} + \beta$; $S_x = pS_u$, $S_y = qS_v$.

Переход к условным вариантам не изменяет величины выборочного коэффициента корреляции, т. е.: $r_{xy} = r_{uv} = r$.



ПРИМЕРЫ

435. Найти выборочные уравнения прямых линий регрессии Y на X и X на Y по данным наблюдений:

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Р Е Ш Е Н И Е.

Составим расчетную таблицу:

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	1,00	1,25	1,00	1,562	1,250
2	1,50	1,40	2,25	1,960	2,100
3	3,00	1,50	9,00	2,250	4,500
4	4,50	1,75	20,25	3,063	7,875
5	5,00	2,25	25,00	5,062	11,250
$\sum$	15,00	8,15	57,50	13,897	26,975

Таким образом, из таблицы находим:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{15}{5} = 3, \qquad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{5} = \frac{8{,}15}{5} = 1{,}63,$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i y_i}{5} = \frac{26{,}975}{5} = 5{,}395, \qquad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i{}^2}{5} = \frac{57{,}5}{5} = 11{,}5,$$

$$\overline{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i{}^2}{5} = \frac{13{,}897}{5} = 2{,}779.$$

Следовательно, $S_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} = \sqrt{11{,}5 - 9} = \sqrt{2{,}5} = 1{,}58$,

$S_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2} = \sqrt{2{,}779 - 2{,}657} = \sqrt{0{,}122} = 0{,}35$.

Вычислим выборочный коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{5{,}395 - 3 \cdot 1{,}63}{1{,}58 \cdot 0{,}35} = \frac{0{,}505}{0{,}553} = 0{,}913.$$

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид $y = ax + b$. Вычислим его коэффициенты:

$$a = r\frac{S_y}{S_x} = 0{,}913 \cdot \frac{0{,}35}{1{,}58} = 0{,}202,$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 1{,}63 - 0{,}202 \cdot 3 = 1{,}63 - 0{,}606 = 1{,}024.$$

Следовательно, $y = 0{,}202x + 1{,}024$.

Выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y имеет вид $x = cy + d$, где:

$$c = r\frac{S_x}{S_y} = 0{,}913 \cdot \frac{1{,}58}{0{,}35} = 4{,}122,$$

$$d = \bar{x} - c\bar{y} = 3 - 4{,}122 \cdot 1{,}63 = -3{,}719.$$

Следовательно, $x = 4{,}122y - 3{,}719$.

436. По данным корреляционной таблицы найти выборочные уравнения прямых линий регрессии

$x \backslash y$	7	13	40	80	200
0	19	2			
4	1	14	3		
6	1		22		
7			2	15	
10					21

РЕШЕНИЕ.

Составим расчетные таблицы:

i	x_i	m_i	$x_i m_i$	$x_i^2 m_i$
1	0	21	0	0
2	4	18	72	288
3	6	23	138	828
4	7	17	119	833
5	10	21	210	2100
$\sum$		100	539	4049

j	y_j	n_j	$y_j n_j$	$y_j^2 n_j$
1	7	21	147	1029
2	13	16	208	2704
3	40	27	1080	43200
4	80	15	1200	96000
5	200	21	4200	840000
$\sum$		100	6835	982933

Из таблицы находим:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i m_i = \frac{1}{100} \cdot 539 = 5{,}39,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{5} y_j n_j = \frac{1}{100} \cdot 6835 = 68{,}35,$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i{}^2 m_i = \frac{1}{100} \cdot 4049 = 40{,}49,$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{5} y_j{}^2 n_j = \frac{1}{100} \cdot 982933 = 9829{,}33.$$

Следовательно, $S_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{40{,}49 - (5{,}39)^2} = 3{,}38$,

$S_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{9829{,}33 - (68{,}35)^2} = 71{,}82$.

Из исходной корреляционной таблицы находим:

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i \sum_{j=1}^{5} y_j n_{ij} = \frac{1}{100}(0 + 4(7 \cdot 1 + 13 \cdot 14 + 40 \cdot 3) + 6(7 \cdot 1 + 40 \cdot 22) +$$

$$+ 7(40 \cdot 2 + 80 \cdot 15) + 10 \cdot 200 \cdot 21) = \frac{1}{100} \cdot 57518 = 575{,}18.$$

Вычислим выборочный коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{575{,}18 - 5{,}39 \cdot 68{,}35}{3{,}38 \cdot 71{,}82} = 0{,}85.$$

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид $y = ax + b$, где:

$$a = r\frac{S_y}{S_x} = 0{,}85 \cdot \frac{71{,}82}{3{,}38} = 18{,}06,$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 68{,}35 - 18{,}06 \cdot 5{,}39 = -28{,}99.$$

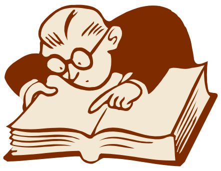
Следовательно, $y = 18{,}06x - 28{,}99$.

Выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y имеет вид $x = cy + d$, где:

$$c = r\frac{S_x}{S_y} = 0{,}85 \cdot \frac{3{,}38}{71{,}82} = 0{,}04,$$

$$d = \bar{x} - c\bar{y} = 5{,}39 - 0{,}04 \cdot 68{,}35 = 2{,}66.$$

Следовательно, $x = 0{,}04y + 2{,}66$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

437. По статистическим данным за 6 лет имеет место зависимость валового выпуска продукции предприятия от основных производственных фондов

Основные производственные фонды	120	140	150	160	180	200
Валовой выпуск	420	440	510	560	600	620

Используя эти данные, написать выборочное уравнение линейной регрессии.

438. Туристическую фирму крупного курортного города интересует связь между числом отпускников, останавливающихся в отелях, и расходами на рекламу отелей. Взято случайное число отелей – 6, сходных по размеру. Была собрана следующая информация за текущий сезон:

Реклама(ден.ед.)	9000	6000	10000	8000	7000	4000
Число гостей	1100	1200	1600	1300	1100	800

Построить модель линейной регрессии и объяснить значение коэффициентов.

439. В таблице приведены опытные данные, характеризующие зависимость величины урожайности y (ц с 1 га) от срока уборки x (дней после наступления полной спелости зерна).

x	0	5	10	15	20
y	29,5	28,4	23,4	21,6	18,5

Написать выборочные уравнения прямых линий регрессии.

440. Найти выборочные уравнения прямых линий регрессии Y на X и X на Y по данным, приведенным в таблице:

$x \backslash y$	5	10	15	20
10	2			
20	5	4	1	
30	3	8	6	3
40		3	6	6
50			2	1

441. Найти выборочные уравнения прямых линий регрессии Y на X и X на Y по данным, приведенным в таблице:

x \ y	0	4	6	7	10
7	19	1	1		
13	2	14			
40		3	22	2	
80				15	
200					21

442. При обследовании 50 учеников получены следующие данные об их росте (x см) и весе (y кг)

x \ y	24	27	30	33	36	Итого
120	1	3				4
125		2	6	1		9
130		1	5	5		11
135		1	6	7	2	16
140			1	4	2	7
145				1	1	2
150					1	1
Итого	1	7	18	18	6	50

По этим данным вычислить коэффициент корреляции и составить уравнения прямых линий регрессии.

443. Известно распределение 100 га пахотной земли по количеству внесенных удобрений X (в ц на 1 га) и урожайности Y (в ц с 1 га):

x \ y	$9 \div 11$	$11 \div 13$	$13 \div 15$	$15 \div 17$	$17 \div 19$	$19 \div 21$
$0 \div 20$	9	4	1			
$20 \div 40$	1	10	9	3		
$40 \div 60$		2	6	14	6	
$60 \div 80$			1	10	18	6

Написать выборочные уравнения прямых линий регрессии.

444. Распределение 40 заводов области по количеству ремонтных слесарей y и числу станко-смен x (тыс. ед.) задано таблицей:

x \ y	10 ÷ 15	15 ÷ 20	20 ÷ 25	25 ÷ 30	30 ÷ 35	35 ÷ 40
0 ÷ 0,2	4					
0,2 ÷ 0,4	2	2				
0,4 ÷ 0,6			2			
0,6 ÷ 0,8		6		4	4	
0,8 ÷ 1,0					6	6
1,0 ÷ 1,2						4

Написать выборочное уравнение прямой линии регрессии y на x.

2.14. *Выборочное уравнение параболической регрессии*

Если график регрессии изображается кривой линией, то корреляцию называют криволинейной. В частности, в случае параболической корреляции второго порядка выборочное уравнение регрессии Y на X имеет вид: $y = ax^2 + bx + c$.

Рассмотрим два случая:

1. Пусть в результате n независимых испытаний получено n пар чисел (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$, причем среди точек (x_i, y_i) нет совпавших. В этом случае неизвестные параметры a, b, c находим, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

2. Пусть выборка объема n задается в виде корреляционной таблицы:

x_i \ y_j	y_1	y_2	…	y_l	m_i
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1l}	m_1
x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2l}	m_2
…	…	…	…	…	…
x_k	n_{k1}	n_{k2}	…	n_{kl}	m_k
n_j	n_1	n_2	…	n_l	n

где $m_i = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}$ – частота значения x_i,

$n_j = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}$ – частота значения y_j,

n_{ij} – частота наблюдавшейся пары (x_i, y_j),

n – объем выборки (сумма всех частот).

Система уравнений для нахождения параметров a, b, c с учетом повторяющихся значений x_i и y_j может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{k} x_i^4 m_i + b\sum_{i=1}^{k} x_i^3 m_i + c\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} x_i^2 y_j n_{ij}, \\ a\sum_{i=1}^{k} x_i^3 m_i + b\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i + c\sum_{i=1}^{k} x_i m_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} x_i y_j n_{ij}, \\ a\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i + b\sum_{i=1}^{k} x_i m_i + cn = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} y_j n_{ij}. \end{cases}$$

Назовем условным средним $\bar{y}_{x_i}$ среднее арифметическое значений Y, соответствующих значению x_i, т. е.:

$$\bar{y}_{x_i} = \frac{\sum_{j=1}^{l} y_j n_{ij}}{\sum_{j=1}^{l} n_{ij}} = \frac{\sum_{j=1}^{l} y_j n_{ij}}{m_i}.$$

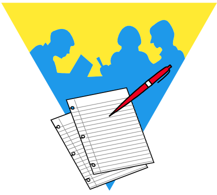
Тогда: $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} x_i^2 y_j n_{ij} = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \bar{y}_{x_i} m_i$, $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} x_i y_j n_{ij} = \sum_{i=1}^{k} x_i \bar{y}_{x_i} m_i$,

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} y_j n_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \bar{y}_{x_i} m_i$$

и система для нахождения a, b, c запишется в виде:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{k} x_i^4 m_i + b\sum_{i=1}^{k} x_i^3 m_i + c\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \bar{y}_{x_i} m_i, \\ a\sum_{i=1}^{k} x_i^3 m_i + b\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i + c\sum_{i=1}^{k} x_i m_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \bar{y}_{x_i} m_i, \\ a\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i + b\sum_{i=1}^{k} x_i m_i + cn = \sum_{i=1}^{k} \bar{y}_{x_i} m_i. \end{cases}$$

Аналогично составляется выборочное уравнение регрессии X на Y: $x = a_1y^2 + b_1y + c_1$.



ПРИМЕРЫ

445. Найти выборочное уравнение параболической регрессии Y на X по данным таблицы:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–10	0	4	5	4	2	–2

РЕШЕНИЕ.

Составим расчетную таблицу:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
1	–3	–10	9	–27	81	30	–90
2	–2	0	4	–8	16	0	0
3	–1	4	1	–1	1	–4	4
4	0	5	0	0	0	0	0
5	1	4	1	1	1	4	4
6	2	2	4	8	16	4	8
7	3	–2	9	27	81	–6	–18
$\sum$	0	3	28	0	196	28	–92

Для нахождения неизвестных параметров выборочного уравнения параболической регрессии получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 196a + 28c = -92 \\ 28b = 28 \\ 28a + 7c = 3. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем (приближенно):

$$a = -1{,}24, \quad b = 1, \quad c = 5{,}38.$$

Следовательно, выборочное уравнение параболической регрессии Y на X имеет вид: $y = -1{,}24x^2 + x + 5{,}38$.

446. Найти выборочное уравнение параболической регрессии Y на X по данным корреляционной таблицы:

x \ y	6	6,75	7,5
1	8		
1,1	2	30	1
1,2			9

РЕШЕНИЕ.

Вычислим условные средние:

$$\bar{y}_{x_1} = 6, \qquad \bar{y}_{x_2} = \frac{6 \cdot 2 + 6{,}75 \cdot 30 + 7{,}5 \cdot 1}{33} = 6{,}73, \qquad \bar{y}_{x_3} = 7{,}5.$$

Составим расчетную таблицу:

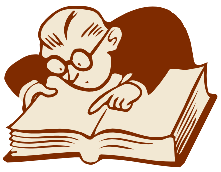
i	x_i	m_i	$\bar{y}_{x_i}$	$x_i m_i$	$x_i^2 m_i$	$x_i^3 m_i$	$x_i^4 m_i$	$\bar{y}_{x_i} m_i$	$x_i \bar{y}_{x_i} m_i$	$x_i^2 \bar{y}_{x_i} m_i$
1	1	8	6	8	8	8	8	48	48	48
2	1,1	33	6,73	36,3	39,93	43,93	48,32	222,09	244,30	268,73
3	1,2	9	7,5	10,8	12,96	15,55	18,66	67,50	81,00	97,20
$\sum$		50		55,1	60,89	67,48	74,98	337,59	373,30	413,93

Получаем систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов a, b, c:

$$\begin{cases} 74{,}98a + 67{,}48b + 60{,}89c = 413{,}93 \\ 67{,}48a + 60{,}89b + 55{,}10c = 373{,}30 \\ 60{,}89a + 55{,}10b + 50c = 337{,}59. \end{cases}$$

Решив эту систему (например, методом полного исключения неизвестных), найдем: $a = 1{,}94$, $b = 2{,}98$, $c = 1{,}10$.

Искомое выборочное уравнение параболической регрессии имеет вид: $y = 1{,}94x^2 + 2{,}98x + 1{,}10$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

447. Данные таблицы характеризуют изучавшуюся зависимость капитальных вложений Y (млн грн) от мощности предприятий данного типа X (млн тонн продукции в год):

x	1	2	3	4
y	1	3	6	11

Построить выборочное уравнение параболической регрессии Y на X.

448. Найти уравнение параболичной регрессии между скоростью автомобиля (км/ч) и расходом горючего (л/км) по статистической выборке:

скорость автомобиля	40	50	60	70	80	90	100
расход горючего	9	8,5	8	8,5	9	10	12

449. Найти выборочное уравнение параболической регрессии X на Y по данным корреляционной таблицы:

а)

x \ y	1	3	4
6	15	1	
30		14	2
50			18

б) б)

x \ y	0	2	3
1	13	2	1
9		10	1
19			23

450. Зависимость урожайности Y (ц с га) от глубины орошения X (м) приводится в следующей таблице:

x \ y	10	12	14	16
0	4	1		
0,1		2	3	2
0,2		1	4	4
0,3		2	2	3
0,4		2	3	1
0,5	2	2	2	

Найти выборочное уравнение параболической регрессии Y на X.

451. Результаты исследования зависимости урожайности Y (ц с га) от количества выпавших в течение года осадков X (м) представлены в таблице:

x \ y	1,5 ÷ 4,5	4,5 ÷ 7,5	7,5 ÷ 10,5	10,5 ÷ 13,5	13,5 ÷ 16,5	16,5 ÷ 19,5	19,5 ÷ 22,5	22,5 ÷ 25,5
0,05 ÷ 0,15	2	1						
0,15 ÷ 0,25		1		4	2			
0,25 ÷ 0,35			1		1	2		
0,35 ÷ 0,45					4		2	
0,45 ÷ 0,55							5	
0,55 ÷ 0,65						2	2	6
0,65 ÷ 0,75							2	3
0,75 ÷ 0,85						1	1	2
0,85 ÷ 0,95					1	2	3	

Найти выборочное уравнение параболической регрессии Y на X.

2.15. *Выборочное уравнение множественной линейной регрессии*

Если исследуется связь между несколькими величинами, то корреляцию называют *множественной*. В простейшем случае число величин равно трем и связь между ними линейная:

$$z = ax + by + c.$$

Пусть произведено n независимых опытов, в результате чего получены значения x_i, y_i, z_i $(i = \overline{1,\ n})$.

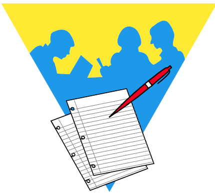
Тогда параметры a, b, c вычисляем по формулам:

$$a = \frac{r_{xz} - r_{xy} r_{yz}}{1 - r_{xy}{}^2} \cdot \frac{S_z}{S_x}; \qquad b = \frac{r_{yz} - r_{xy} r_{xz}}{1 - r_{xy}{}^2} \cdot \frac{S_z}{S_y}; \qquad c = \bar{z} - a\bar{x} - b\bar{y},$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$ – выборочные средние;

$r_{xy} = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y}$; $r_{xz} = \dfrac{\overline{xz} - \bar{x} \cdot \bar{z}}{S_x \cdot S_z}$; $r_{yz} = \dfrac{\overline{yz} - \bar{y} \cdot \bar{z}}{S_y \cdot S_z}$ – коэффициенты корреляции между парами переменных x и y, x и z, y и z;

S_x, S_y, S_z – выборочные средние квадратические отклонения.



ПРИМЕР

452. По данным таблицы найти выборочное уравнение множественной линейной регрессии Z на X и Y.

x	–5	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	14	12	8	6	2	4	0	–2	–6	–4
z	5	4	7	1	4	–4	2	0	–5	–1

РЕШЕНИЕ.

Составим расчетную таблицу:

i	x_i	y_i	z_i	x_i^2	y_i^2	z_i^2	x_iy_i	x_iz_i	y_iz_i
1	–5	14	5	25	196	25	–70	–25	70
2	–3	12	4	9	144	16	–36	–12	48
3	–2	8	7	4	64	49	–16	–14	56
4	–1	6	1	1	36	1	–6	–1	6
5	0	2	4	0	4	16	0	0	8
6	1	4	–4	1	16	16	4	–4	–16
7	2	0	2	4	0	4	0	4	0
8	3	–2	0	9	4	0	–6	0	0
9	4	–6	–5	16	36	25	–24	–20	30
10	5	–4	–1	25	16	1	–20	–5	4
$\sum$	4	34	13	94	516	153	–174	–77	206

Из таблицы находим:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}\cdot 4 = 0{,}4; \qquad \overline{x^2} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^{\ 2} = \frac{1}{10}\cdot 94 = 9{,}4;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{1}{10}\cdot 34 = 3{,}4; \qquad \overline{y^2} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^{\ 2} = \frac{1}{10}\cdot 516 = 51{,}6;$$

$$\bar{z} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} z_i = \frac{1}{10}\cdot 13 = 1{,}3; \qquad \overline{z^2} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} z_i^{\ 2} = \frac{1}{10}\cdot 153 = 15{,}3;$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = \frac{1}{10}\cdot(-174) = -17{,}4;$$

$$\overline{xz} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i z_i = \frac{1}{10}\cdot(-77) = -7{,}7;$$

$$\overline{yz} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i z_i = \frac{1}{10}\cdot 206 = 20{,}6.$$

Следовательно,

$$S_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{9{,}4 - (0{,}4)^2} = 3{,}04;$$

$$S_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{51{,}6 - (3{,}4)^2} = 6{,}33;$$

$$S_z = \sqrt{\overline{z^2} - (\bar{z})^2} = \sqrt{15{,}3 - (1{,}3)^2} = 3{,}69.$$

Вычисляем коэффициенты корреляции между парами переменных:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{-17{,}4 - 0{,}4\cdot 3{,}4}{3{,}04\cdot 6{,}33} = -0{,}97;$$

$$r_{xz} = \frac{\overline{xz} - \bar{x}\cdot\bar{z}}{S_x \cdot S_z} = \frac{-7{,}7 - 0{,}4\cdot 1{,}3}{3{,}04\cdot 3{,}69} = -0{,}73;$$

$$r_{yz} = \frac{\overline{yz} - \bar{y}\cdot\bar{z}}{S_y \cdot S_z} = \frac{20{,}6 - 3{,}4\cdot 1{,}3}{6{,}33\cdot 3{,}69} = 0{,}69.$$

Выборочное уравнение множественной линейной регрессии Z на X и Y имеет вид: $z = ax + by + c$.

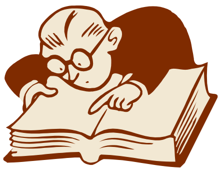
Вычислим его коэффициенты:

$$a = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{1 - r_{xy}^2}\cdot\frac{S_z}{S_x} = \frac{-0{,}73 + 0{,}97\cdot 0{,}69}{1-(0{,}97)^2}\cdot\frac{3{,}69}{3{,}04} = -1{,}25;$$

$$b = \frac{r_{yz} - r_{xy}r_{xz}}{1 - r_{xy}^2}\cdot\frac{S_z}{S_y} = \frac{0{,}69 - 0{,}97\cdot 0{,}73}{1-(0{,}97)^2}\cdot\frac{3{,}69}{6{,}33} = -0{,}18;$$

$$c = \bar{z} - a\bar{x} - b\bar{y} = 1{,}3 + 1{,}25\cdot 0{,}4 + 0{,}18\cdot 3{,}4 = 2{,}41.$$

Таким образом, окончательно получаем: $z = -1{,}25x - 0{,}18y + 2{,}41$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

453. В таблице представлены данные, характеризующие зависимость валовой продукции растениеводства Z (млн грн) от размеров пашни X (тыс. га) и основных средств производства Y (млн грн).

x	30	36	42	47	56	60	66
y	29	38	39	42	46	52	55
z	7	12	16	20	25	29	36

Найти выборочное уравнение множественной линейной регрессии Z на X и Y.

454. Найти выборочное уравнение множественной линейной регрессии Z на X и Y по данным, приведенным в таблице:

а)

x	–4	–2	–1	–1	0	1	1	2	3	6	7	8
y	5	7	–8	1	–3	–6	–1	–2	–10	2	3	0
z	4	5	–8	0	–2	–4	2	1	8	10	11	9

б)

x	0	2	4	13	18	35	44	56	61	64
y	14	32	29	44	49	54	0	59	34	16
z	0,5	9	8	0	19,2	18,2	47,2	60,9	63,8	47,5

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Чем различаются генеральная и выборочная совокупности?
2. В каких случаях пользуются условными вариантами? Напишите формулы перехода от исходных вариантов к условным и наоборот.
3. Как перейти от гистограммы к полиному частот?
4. Выделите основные этапы построения закона распределения по выборке.
5. Чем отличаются точечное и интервальное оценивание параметров?
6. Какая оценка параметров называется несмещенной, эффективной, состоятельной?
7. Чем отличаются теоретические частоты от эмпирических?
8. В каком случае коэффициент корреляции равен ± 1?
9. Чему равен коэффициент корреляции для независимых случайных величин?
10. В каком случае прямые регрессии сливаются?
11. Через какую общую точку проходят выборочные прямые регрессии?

Индивидуальные задания по математической статистике

Каждое индивидуальное задание состоит из двух задач:

Задача 1.

Предполагается, что случайная величина, заданная интервальным вариационным рядом, имеет нормальный закон распределения.

Требуется: а) построить гистограмму частот;

б) оценить математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ при помощи метода моментов;

в) записать выражение плотности распределения;

г) используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины (α = 0,05).

Задача 2.

Найти выборочные уравнения прямых линий регрессии Y на X и X на Y по данным, приведенным в таблице. Построить в прямоугольной системе координат заданные точки (x_i, y_i) и полученные прямые $y = ax + b$ и $x = cy + d$.

Вариант	**Задача 1**								
1	8,4 ÷ 8,5	8,5 ÷ 8,6	8,6 ÷ 8,7	8,7 ÷ 8,8	8,8 ÷ 8,9	8,9 ÷ 9,0	9,0 ÷ 9,1	9,1 ÷ 9,2	9,2 ÷ 9,3
	2	6	10	12	16	18	14	10	8
2	2,4 ÷ 2,5	2,5 ÷ 2,6	2,6 ÷ 2,7	2,7 ÷ 2,8	2,8÷ 2,9	2,9 ÷ 3,0	3,0 ÷ 3,1	3,1 ÷ 3,2	3,2 ÷ 3,3
	4	8	10	14	18	16	12	10	6
3	0,6 ÷ 0,8	0,8 ÷ 1,0	1,0 ÷ 1,2	1,2 ÷ 1,4	1,4 ÷ 1,6	1,6 ÷ 1,8	1,8 ÷ 2,0	2,0 ÷ 2,2	2,2 ÷ 2,4
	3	7	13	15	19	17	11	9	5
4	5,4 ÷ 5,5	5,5 ÷ 5,6	5,6 ÷ 5,7	5,7 ÷ 5,8	5,8 ÷ 5,9	5,9 ÷ 6,0	6,0 ÷ 6,1	6,1 ÷ 6,2	6,2 ÷ 6,3
	2	4	6	10	16	18	14	12	10
5	1,4 ÷ 1,6	1,6 ÷ 1,8	1,8 ÷ 2,0	2,0 ÷ 2,2	2,2 ÷ 2,4	2,4 ÷ 2,6	2,6 ÷ 2,8	2,8 ÷ 3,0	3,0 ÷ 3,2
	3	7	10	15	19	16	13	7	2
6	–4,5 ÷ –4,4	–4,4 ÷ –4,3	–4,3 ÷ –4,2	–4,2 ÷ –4,1	–4,1 ÷ –4,0	–4,0 ÷ –3,9	–3,9 ÷ –3,8	–3,8 ÷ –3,7	
	3	7	11	17	19	15	13	9	
7	7,6 ÷ 7,7	7,7 ÷ 7,8	7,8 ÷ 7,9	7,9 ÷ 8,0	8,0 ÷ 8,1	8,1 ÷ 8,2	8,2 ÷ 8,3	8,3 ÷ 8,4	8,4 ÷ 8,5
	2	6	8	10	14	18	16	12	10
8	4,5 ÷ 4,6	4,6 ÷ 4,7	4,7 ÷ 4,8	4,8 ÷ 4,9	4,9 ÷ 5,0	5,0 ÷ 5,1	5,1 ÷ 5,2	5,2 ÷ 5,3	5,3 ÷ 5,4
	1	3	9	11	17	15	15	13	7
9	0,4 ÷ 0,6	0,6 ÷ 0,8	0,8 ÷ 1,0	1,0 ÷ 1,2	1,2 ÷ 1,4	1,4 ÷ 1,6	1,6 ÷ 1,8	1,8 ÷ 2,0	2,0 ÷ 2,2
	2	8	10	14	18	16	12	10	6
10	1,2 ÷ 1,3	1,3 ÷ 1,4	1,4 ÷ 1,5	1,5 ÷ 1,6	1,6 ÷ 1,7	1,7 ÷ 1,8	1,8 ÷ 1,9	1,9 ÷ 2,0	2,0 ÷ 2,1
	1	3	7	13	17	19	15	11	9
11	2,2 ÷ 2,4	2,4 ÷ 2,6	2,6 ÷ 2,8	2,8 ÷ 3,0	3,0 ÷ 3,2	3,2 ÷ 3,4	3,4 ÷ 3,6	3,6 ÷ 3,8	3,8 ÷ 4,0
	3	7	12	18	20	15	11	8	4
12	3,2 ÷ 3,5	3,5 ÷ 3,8	3,8 ÷ 4,1	4,1 ÷ 4,4	4,4 ÷ 4,7	4,7 ÷ 5,0	5,0 ÷ 5,3	5,3 ÷ 5,6	5,6 ÷ 5,9
	2	4	8	10	12	16	18	14	6

13	–3,6 ÷ –3,5	–3,5 ÷ –3,4	–3,4 ÷ –3,3	–3,3 ÷ –3,2	–3,2 ÷ –3,1	–3,1 ÷ –3,0	–3,0 ÷ –2,9	–2,9 ÷ –2,8	
	1	3	9	11	17	19	15	13	
14	7,5 ÷ 7,6	7,6 ÷ 7,7	7,7 ÷ 7,8	7,8 ÷ 7,9	7,9 ÷ 8,0	8,0 ÷ 8,1	8,1 ÷ 8,2	8,2 ÷ 8,3	8,3 ÷ 8,4
	3	5	11	15	19	17	15	9	7
15	5,5 ÷ 5,6	5,6 ÷ 5,7	5,7 ÷ 5,8	5,8 ÷ 5,9	5,9 ÷ 6,0	6,0 ÷ 6,1	6,1 ÷ 6,2	6,2 ÷ 6,3	6,3 ÷ 6,4
	1	5	9	11	17	19	15	13	7
16	0,4 ÷ 0,7	0,7 ÷ 1,0	1,0 ÷ 1,3	1,3 ÷ 1,6	1,6 ÷ 1,9	1,9 ÷ 2,2	2,2 ÷ 2,5	2,5 ÷ 2,8	2,8 ÷ 3,1
	2	6	8	10	14	18	16	12	10
17	3,4 ÷ 3,5	3,5 ÷ 3,6	3,6 ÷ 3,7	3,7 ÷ 3,8	3,8 ÷ 3,9	3,9 ÷ 4,0	4,0 ÷ 4,1	4,1 ÷ 4,2	4,2 ÷ 4,3
	1	5	9	11	17	19	15	13	7
18	8,1 ÷ 8,2	8,2 ÷ 8,3	8,3 ÷ 8,4	8,4 ÷ 8,5	8,5 ÷ 8,6	8,6 ÷ 8,7	8,7 ÷ 8,8	8,8 ÷ 8,9	8,9 ÷ 9,0
	4	8	10	14	18	16	12	10	6
19	2,0 ÷ 2,1	2,1 ÷ 2,2	2,2 ÷ 2,3	2,3 ÷ 2,4	2,4 ÷ 2,5	2,5 ÷ 2,6	2,6 ÷ 2,7	2,7 ÷ 2,8	2,8 ÷ 2,9
	2	6	8	10	16	18	14	12	10
20	6,3 ÷ 6,4	6,4 ÷ 6,5	6,5 ÷ 6,6	6,6 ÷ 6,7	6,7 ÷ 6,8	6,8 ÷ 6,9	6,9 ÷ 7,0	7,0 ÷ 7,1	7,1 ÷ 7,2
	4	9	14	19	21	17	13	9	3
21	1,2 ÷ 1,4	1,4 ÷ 1,6	1,6 ÷ 1,8	1,8 ÷ 2,0	2,0 ÷ 2,2	2,2 ÷ 2,4	2,4 ÷ 2,6	2,6 ÷ 2,8	2,8 ÷ 3,0
	3	7	12	15	18	16	13	8	4
22	5,2 ÷ 5,3	5,3 ÷ 5,4	5,4 ÷ 5,5	5,5 ÷ 5,6	5,6 ÷ 5,7	5,7 ÷ 5,8	5,8 ÷ 5,9	5,9 ÷ 6,0	6,0 ÷ 6,1
	1	5	7	13	15	19	17	11	9
23	–2,5 ÷ –2,4	–2,4 ÷ –2,3	–2,3 ÷ –2,2	–2,2 ÷ –2,1	–2,1 ÷ –2,0	–2,0 ÷ –1,9	–1,9 ÷ –1,8	–1,8 ÷ –1,7	
	3	7	11	15	19	17	13	9	
24	1,1 ÷ 1,2	1,2 ÷ 1,3	1,3 ÷ 1,4	1,4 ÷ 1,5	1,5 ÷ 1,6	1,6 ÷ 1,7	1,7 ÷ 1,8	1,8 ÷ 1,9	1,9 ÷ 2,0
	5	7	13	15	19	17	11	9	3

25	5,1 ÷ 5,4	5,4 ÷ 5,7	5,7 ÷ 6,0	6,0 ÷ 6,3	6,3 ÷ 6,6	6,6 ÷ 6,9	6,9 ÷ 7,2	7,2÷7,5	
	4	8	15	19	21	17	11	5	
26	–1,6 ÷ –1,5	–1,5 ÷ –1,4	–1,4 ÷ –1,3	–1,3 ÷ –1,2	–1,2 ÷ –1,1	–1,1 ÷ –1,0	–1,0 ÷ –0,9	–0,9 ÷ –0,8	
	2	4	8	10	12	16	18	14	
27	3,3 ÷ 3,5	3,5 ÷ 3,7	3,7 ÷ 3,9	3,9 ÷ 4,1	4,1 ÷ 4,3	4,3 ÷ 4,5	4,5 ÷ 4,7	4,7 ÷ 4,9	4,9 ÷ 5,1
	1	5	9	11	17	19	15	13	7
28	–2,1 ÷ –1,9	–1,9 ÷ –1,7	–1,7 ÷ –1,5	–1,5 ÷ –1,3	–1,3 ÷ –1,1	–1,1 ÷ –0,9	–0,9 ÷ –0,7	–0,7 ÷ –0,5	
	3	5	11	15	19	17	15	8	
29	1,5 ÷ 1,6	1,6 ÷ 1,7	1,7 ÷ 1,8	1,8 ÷ 1,9	1,9 ÷ 2,0	2,0 ÷ 2,1	2,1 ÷ 2,2	2,2 ÷ 2,3	2,3 ÷ 2,4
	1	3	9	11	17	15	15	13	7
30	4,1 ÷ 4,3	4,3 ÷ 4,5	4,5 ÷ 4,7	4,7 ÷ 4,9	4,9 ÷ 5,1	5,1 ÷ 5,3	5,3 ÷ 5,5	5,5 ÷ 5,7	5,7 ÷ 5,9
	3	6	11	16	20	17	14	10	7
31	0,1 ÷0,2	0,2 ÷ 0,3	0,3 ÷ 0,4	0,4 ÷ 0,5	0,5 ÷ 0,6	0,6 ÷ 0,7	0,7 ÷ 0,8	0,8 ÷ 0,9	0,9 ÷ 1,0
	2	6	8	10	14	18	16	12	10
32	0,2 ÷ 0,4	0,4 ÷ 0,6	0,6 ÷ 0,8	0,8 ÷ 1,0	1,0 ÷ 1,2	1,2 ÷ 1,4	1,4 ÷ 1,6	1,6 ÷ 1,8	1,8 ÷ 2,0
	4	9	14	18	21	16	11	8	3
33	3,1 ÷ 3,3	3,3 ÷ 3,5	3,5 ÷ 3,7	3,7 ÷ 3,9	3,9 ÷ 4,1	4,1 ÷ 4,3	4,3 ÷ 4,5	4,5 ÷ 4,7	4,7 ÷ 4,9
	3	7	12	17	20	16	12	9	6
34	–0,6 ÷ –0,5	–0,5 ÷ –0,4	–0,4 ÷ –0,3	–0,3 ÷ –0,2	–0,2 ÷ –0,1	–0,1 ÷ 0,0	0,0 ÷ 0,1	0,1 ÷ 0,2	
	2	5	9	11	17	19	15	11	
35	2,5 ÷ 2,7	2,7 ÷ 2,9	2,9 ÷ 3,1	3,1 ÷ 3,3	3,3 ÷ 3,5	3,5 ÷ 3,7	3,7 ÷ 3,9	3,9 ÷ 4,1	4,1 ÷ 4,3
	3	7	11	15	19	17	13	9	5
36	8,5 ÷ 8,6	8,6 ÷ 8,7	8,7 ÷ 8,8	8,8 ÷ 8,9	8,9 ÷ 9,0	9,0 ÷ 9,1	9,1 ÷ 9,2	9,2 ÷ 9,3	9,3 ÷ 9,4
	5	7	13	15	19	17	11	9	3

37	6,1 ÷ 6,3	6,3 ÷ 6,5	6,5 ÷ 6,7	6,7 ÷ 6,9	6,9 ÷ 7,1	7,1 ÷ 7,3	7,3 ÷ 7,5	7,5 ÷ 7,7	
	5	9	15	24	20	17	14	6	
38	1,3 ÷ 1,6	1,6 ÷ 1,9	1,9 ÷ 2,2	2,2 ÷ 2,5	2,5 ÷ 2,8	2,8 ÷ 3,1	3,1 ÷ 3,4	3,4 ÷ 3,7	3,7 ÷ 4,0
	4	10	13	17	19	16	12	9	5
39	–1,3 ÷ –1,0	–1,0 ÷ –0,7	–0,7 ÷ –0,4	–0,4 ÷ –0,1	–0,1 ÷ 0,2	0,2 ÷ 0,5	0,5 ÷ 0,8	0,8 ÷ 1,1	
	3	8	11	15	18	14	10	7	
40	4,4 ÷ 4,5	4,5 ÷ 4,6	4,6 ÷ 4,7	4,7 ÷ 4,8	4,8 ÷ 4,9	4,9 ÷ 5,0	5,0 ÷ 5,1	5,1 ÷ 5,2	5,2 ÷ 5,3
	2	6	8	10	14	18	16	12	10
41	0,3 ÷ 0,6	0,6 ÷ 0,9	0,9 ÷ 1,2	1,2 ÷ 1,5	1,5 ÷ 1,8	1,8 ÷ 2,1	2,1 ÷ 2,4	2,4 ÷ 2,7	2,7 ÷ 3,0
	5	10	14	18	22	17	13	9	5
42	1,7 ÷ 1,9	1,9 ÷ 2,1	2,1 ÷ 2,3	2,3 ÷ 2,5	2,5 ÷ 2,7	2,7 ÷ 2,9	2,9 ÷ 3,1	3,1 ÷ 3,3	3,3 ÷ 3,5
	2	6	10	12	16	18	14	10	7
43	3,5 ÷ 3,6	3,6 ÷ 3,7	3,7 ÷ 3,8	3,8 ÷ 3,9	3,9 ÷ 4,0	4,0 ÷ 4,1	4,1 ÷ 4,2	4,2 ÷ 4,3	4,3 ÷ 4,4
	3	7	13	15	19	17	11	9	5
44	1,6 ÷ 1,8	1,8 ÷ 2,0	2,0 ÷ 2,2	2,2 ÷ 2,4	2,4 ÷ 2,6	2,6 ÷ 2,8	2,8 ÷ 3,0	3,0 ÷ 3,2	3,2 ÷ 3,4
	1	3	9	11	17	19	15	13	5
45	7,4 ÷ 7,5	7,5 ÷ 7,6	7,6 ÷ 7,7	7,7 ÷ 7,8	7,8 ÷ 7,9	7,9 ÷ 8,0	8,0 ÷ 8,1	8,1 ÷ 8,2	8,2 ÷ 8,3
	2	6	8	10	16	18	14	12	10
46	0,5 ÷ 0,7	0,7 ÷ 0,9	0,9 ÷ 1,1	1,1 ÷ 1,3	1,3 ÷ 1,5	1,5 ÷ 1,7	1,7 ÷ 1,9	1,9 ÷ 2,1	2,1 ÷ 2,3
	3	5	8	10	16	18	14	11	8
47	6,4 ÷ 6,6	6,6 ÷ 6,8	6,8 ÷ 7,0	7,0 ÷ 7,2	7,2 ÷ 7,4	7,4 ÷ 7,6	7,6 ÷ 7,8	7,8 ÷ 8,0	8,0 ÷ 8,2
	1	5	7	13	15	19	17	11	9
48	2,3 ÷ 2,5	2,5 ÷ 2,7	2,7 ÷ 2,9	2,9 ÷ 3,1	3,1 ÷ 3,3	3,3 ÷ 3,5	3,5 ÷ 3,7	3,7 ÷ 3,9	3,9 ÷ 4,1
	3	7	11	17	19	15	13	8	2

49	4,3 ÷ 4,5	4,5 ÷ 4,7	4,7 ÷ 4,9	4,9 ÷ 5,1	5,1 ÷ 5,3	5,3 ÷ 5,5	5,5 ÷ 5,7	5,7 ÷ 5,9	5,9 ÷ 6,1
	1	3	9	11	17	19	14	12	6
50	6,4 ÷ 6,5	6,5 ÷ 6,6	6,6 ÷ 6,7	6,7 ÷ 6,8	6,8 ÷ 6,9	6,9 ÷ 7,0	7,0 ÷ 7,1	7,1 ÷ 7,2	7,2 ÷ 7,3
	2	8	10	14	18	16	12	10	6

Вариант	**Задача 2**															
1	*X*	1,2	1,5	2,3	2,4	3,6	4,1	4,7	5,8	6,0	6,3	6,9	8,1	8,5	9,2	10,1
	Y	1,5	1,7	2,2	2,3	3,0	3,0	3,6	3,8	4,1	4,2	4,7	5,3	5,5	5,7	6,3
2	*X*	3,2	3,9	4,3	4,4	5,0	5,7	6,2	6,7	7,1	7,5	8,6	8,7	9,9	10,3	11,2
	Y	4,2	4,2	4,0	3,8	3,7	3,5	3,4	3,3	3,0	2,6	2,4	2,1	1,9	1,4	1,1
3	*X*	2,8	3,1	3,6	4,5	4,7	5,4	5,5	6,2	6,6	7,0	7,3	7,8	8,5	8,6	8,9
	Y	1,1	1,5	2,2	3,5	3,6	4,1	4,5	5,5	5,8	6,3	6,9	7,2	8,1	8,1	8,3
4	*X*	1,3	1,7	2,5	2,6	2,9	3,8	4,1	4,7	5,2	6,1	6,6	6,7	7,8	8,1	8,3
	Y	1,6	1,9	2,8	2,8	3,3	3,6	4,3	4,6	5,0	5,5	6,0	6,4	7,2	7,2	7,4
5	*X*	4,2	4,4	5,1	5,9	6,1	6,4	6,5	7,3	7,6	8,1	8,7	9,2	9,9	10,5	11,4
	Y	5,1	4,9	4,6	4,3	4,1	4,1	3,9	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,0	2,8	2,5
6	*X*	2,4	2,7	3,0	3,9	4,2	5,1	5,3	6,2	6,6	6,8	7,5	8,4	9,1	9,8	10,5
	Y	0,3	0,5	1,1	2,1	2,9	3,9	4,3	5,7	6,1	6,7	7,4	8,1	9,4	10,6	11,1
7	*X*	1,1	1,4	2,2	2,9	3,0	4,1	4,3	5,2	5,5	6,1	6,7	7,9	8,4	9,7	10,2
	Y	2,8	3,2	3,5	4,1	4,4	4,7	5,1	5,5	5,7	6,2	6,6	7,1	7,2	8,1	8,5
8	*X*	4,1	4,7	5,2	5,3	6,0	6,4	6,9	7,9	8,1	8,4	8,7	9,2	9,4	9,9	10,1
	Y	3,8	3,4	3,0	2,9	2,5	2,4	2,0	1,8	1,6	1,4	1,3	1,0	0,9	0,9	0,3

9	*X*	2,7	3,1	3,2	4,3	4,8	5,2	5,9	6,3	6,5	7,7	8,1	8,4	9,5	10,1	10,3
	Y	1,9	2,4	2,7	4,0	4,6	5,1	5,5	6,1	6,6	7,6	8,1	8,1	9,6	10,5	10,8
10	*X*	5,2	6,0	6,5	7,3	9,6	9,8	10,0	11,0	11,5	11,7	12,0	12,8	13,5	14,0	14,5
	Y	4,3	4,7	5,0	5,2	6,0	6,1	6,1	6,3	6,5	6,8	7,0	7,0	7,1	7,2	7,9
11	*X*	1,5	1,9	2,7	3,1	3,3	4,1	5,2	5,7	6,3	6,9	7,8	8,7	8,9	9,1	9,6
	Y	2,8	3,1	4,0	4,5	4,5	5,1	6,4	6,7	7,4	7,8	8,5	9,2	9,6	9,9	10,5
12	*X*	2,1	2,2	3,0	3,6	4,3	4,5	5,1	5,9	6,6	7,1	7,8	8,5	9,1	9,9	10,5
	Y	7,0	7,0	6,8	6,3	5,5	5,5	5,2	4,8	4,5	4,0	3,4	3,2	2,6	2,5	2,1
13	*X*	3,2	3,9	4,1	4,8	5,2	5,3	6,0	6,7	7,1	7,8	8,5	8,9	9,2	9,4	10,1
	Y	2,2	3,1	3,6	4,7	5,0	5,2	6,2	7,0	7,3	8,4	9,6	9,9	10,1	10,2	11,4
14	*X*	5,5	5,8	6,3	7,5	8,4	9,5	10,1	10,8	11,6	12,1	12,5	12,9	13,6	14,2	14,7
	Y	4,1	4,5	5,1	5,4	6,0	6,5	6,7	6,8	7,1	7,2	7,2	7,4	7,6	7,7	7,9
15	*X*	1,1	1,8	2,5	3,1	3,8	4,2	4,4	5,4	6,1	6,7	7,5	8,1	8,8	9,3	10,4
	Y	2,5	3,1	3,8	4,3	4,9	5,0	5,1	5,5	6,4	6,9	7,6	7,8	8,3	8,5	9,1
16	*X*	2,5	2,7	3,6	3,9	4,5	5,1	5,7	6,1	6,2	7,3	7,9	8,5	9,2	9,4	10,2
	Y	7,8	7,4	6,9	6,8	6,1	5,5	5,1	5,0	5,0	4,4	4,0	3,4	2,6	2,5	2,1
17	*X*	3,3	3,7	4,1	4,2	4,9	5,2	5,8	6,0	6,4	6,7	7,3	8,1	8,5	8,9	9,1
	Y	2,2	2,7	3,5	3,7	4,9	5,2	5,9	6,6	7,0	7,6	8,1	9,6	10,1	10,9	11,3
18	*X*	5,4	6,0	6,5	6,9	7,5	8,3	9,6	10,7	11,5	12,3	13,0	14,1	14,5	14,6	15,2
	Y	4,2	4,3	4,5	4,6	4,7	4,8	5,1	5,2	5,2	5,3	5,4	5,6	6,2	7,3	7,5
19	*X*	0,1	0,8	1,2	1,7	2,4	3,1	3,9	4,5	5,6	6,1	6,7	7,2	8,1	8,9	9,8
	Y	4,5	5,0	5,3	5,6	5,6	5,9	6,1	6,5	7,2	7,3	7,4	7,6	8,2	8,2	8,4
20	*X*	1,2	2,1	2,9	3,5	4,0	4,7	5,1	5,8	6,2	6,9	7,5	8,1	8,6	9,3	10,2
	Y	7,8	7,3	7,0	6,8	6,4	6,4	6,1	6,0	5,9	5,9	5,7	5,4	5,1	5,0	4,5

21	*X*	3,5	3,8	4,4	4,6	5,7	6,1	6,9	7,4	8,1	8,2	9,2	9,7	10,3	10,6	11,2
	Y	1,1	1,7	2,3	2,9	4,4	5,3	6,7	7,3	8,5	8,5	10,4	11,0	11,6	12,7	13,1
22	*X*	5,8	5,9	6,4	6,6	7,2	8,1	9,4	10,3	10,9	11,8	12,5	13,0	13,8	14,0	14,5
	Y	5,4	5,5	5,6	5,8	6,2	6,4	6,6	6,6	6,7	6,9	7,0	7,1	7,2	7,5	7,7
23	*X*	0,1	0,7	1,2	1,4	2,3	2,9	3,5	4,1	4,6	5,2	6,3	6,6	7,4	8,3	9,1
	Y	3,1	3,7	3,7	3,8	4,0	4,3	4,8	5,3	5,4	5,5	6,0	6,6	6,8	7,5	7,5
24	*X*	1,2	1,4	2,3	3,0	3,7	4,5	5,1	5,3	6,2	6,7	7,1	7,4	8,0	8,2	8,6
	Y	3,8	3,5	3,0	2,6	2,6	2,1	1,7	1,7	1,5	1,4	1,0	0,7	0,7	0,6	0,3
25	*X*	2,6	2,8	3,3	3,9	4,1	4,7	5,2	5,8	6,7	7,0	7,7	8,3	9,2	9,5	9,9
	Y	2,1	2,4	3,3	4,1	4,2	4,5	5,3	6,5	7,3	7,7	8,1	9,4	10,5	10,7	11,5
26	*X*	5,1	6,2	6,4	7,0	7,4	8,5	9,5	10,6	11,6	12,0	12,8	13,7	14,3	14,5	14,9
	Y	5,0	5,1	5,2	5,5	5,6	5,8	6,1	6,2	6,3	6,3	6,5	6,6	6,8	7,5	7,6
27	*X*	3,1	3,6	4,0	4,2	5,3	5,9	6,7	6,8	7,5	8,1	8,6	9,1	9,3	10,2	10,7
	Y	3,8	4,5	4,6	5,0	6,1	6,5	6,7	7,2	7,6	7,9	8,5	9,1	9,1	9,5	10,4
28	*X*	1,8	2,5	3,1	3,9	4,5	5,0	5,7	6,2	7,1	7,7	8,5	9,4	9,8	10,4	11,2
	Y	8,9	8,5	8,2	8,0	7,6	7,6	7,2	7,2	7,1	7,0	6,7	6,3	6,0	6,0	5,4
29	*X*	3,5	4,1	4,4	5,3	5,9	6,7	7,2	7,9	8,4	8,6	9,0	9,5	10,1	10,6	10,9
	Y	3,3	4,3	5,0	6,4	6,8	8,3	8,9	9,5	10,2	10,8	11,4	12,4	12,6	13,6	14,2
30	*X*	5,0	5,3	5,6	6,5	7,0	7,3	8,0	8,5	10,0	10,4	10,8	11,5	12,9	13,5	14,0
	Y	5,3	5,6	5,6	5,7	5,7	5,8	5,9	6,0	6,8	6,9	7,1	7,2	7,2	7,4	7,5
31	*X*	1,3	1,9	2,7	3,3	3,8	4,2	5,1	5,7	6,5	7,1	8,0	8,6	9,4	10,1	11,7
	Y	1,1	1,3	1,8	2,3	2,8	2,8	3,1	3,8	4,4	4,6	5,1	5,2	5,5	6,5	7,3
32	*X*	2,1	2,9	3,5	4,3	4,7	5,8	6,0	6,6	7,5	7,7	8,4	9,2	9,9	10,1	10,6
	Y	7,1	6,7	6,2	5,7	5,4	5,0	4,9	4,8	4,0	4,0	3,5	3,1	3,0	3,0	2,8

33	*X*	3,7	3,9	4,3	4,9	5,5	5,7	6,7	7,1	7,8	8,4	9,1	9,8	10,1	10,4	11,2
	Y	2,4	2,6	3,2	3,9	4,7	4,7	5,4	6,3	7,1	7,9	8,8	9,3	9,6	9,8	10,5
34	*X*	5,4	5,6	6,0	6,3	6,8	7,5	8,1	8,6	9,0	9,8	10,5	11,6	12,8	13,4	14,2
	Y	5,2	5,4	5,5	5,6	5,6	5,9	6,1	6,3	6,6	6,7	6,9	7,0	7,2	7,4	7,8
35	*X*	1,2	1,9	2,3	3,2	4,1	4,5	5,0	5,9	6,3	7,4	7,7	8,2	9,3	9,8	10,4
	Y	3,4	4,1	4,6	5,7	6,0	6,9	7,1	8,1	8,3	9,0	9,2	10,1	11,1	11,4	12,0
36	*X*	3,5	3,8	4,4	4,9	5,3	6,0	6,7	7,1	7,3	8,4	9,1	9,6	10,2	10,9	11,5
	Y	7,5	7,2	6,6	6,3	5,8	5,6	5,3	4,6	4,6	4,2	4,0	3,6	3,1	2,5	2,1
37	*X*	4,1	4,5	5,2	5,4	6,0	6,3	7,3	7,9	8,2	8,5	9,1	9,9	10,3	10,7	11,1
	Y	2,1	2,5	3,7	3,9	4,8	5,3	6,6	7,0	7,6	7,7	8,9	9,5	10,4	10,8	11,5
38	*X*	5,3	5,5	6,1	6,4	6,7	7,6	8,0	8,7	9,2	9,9	10,3	11,5	12,5	13,5	14,1
	Y	5,3	5,4	5,6	5,7	5,8	6,1	6,2	6,3	6,5	6,7	7,1	7,2	7,4	7,5	7,7
39	*X*	0,2	0,7	1,5	2,3	3,0	3,6	4,1	4,9	5,8	6,1	6,7	7,8	8,5	8,9	9,8
	Y	3,4	3,6	4,5	5,1	5,6	6,2	6,6	6,8	7,5	7,9	8,0	9,1	9,1	9,9	10,6
40	*X*	1,1	1,5	2,3	2,8	3,1	3,7	4,5	5,3	6,0	6,4	7,2	8,1	8,4	9,1	9,6
	Y	6,6	6,4	5,6	5,2	4,8	4,6	4,0	3,2	3,0	3,0	2,5	1,5	1,3	0,6	0,6
41	*X*	2,5	2,7	3,1	3,9	4,5	5,2	5,4	5,9	6,4	7,1	7,8	8,0	8,6	9,1	9,4
	Y	2,6	3,0	3,8	5,1	5,9	6,5	7,1	8,2	8,7	9,9	10,5	11,3	12,0	12,4	13,5
42	*X*	5,1	5,6	6,0	6,2	6,8	7,4	8,1	8,3	9,0	9,5	10,5	11,2	12,1	13,0	14,0
	Y	5,4	5,5	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,1	6,2	6,3	6,5	6,7	7,0	7,1	7,6
43	*X*	1,2	1,5	2,4	3,3	3,9	4,8	5,5	6,0	6,8	7,9	8,4	9,2	9,9	10,5	11,6
	Y	2,6	3,0	3,5	4,0	4,3	4,8	4,8	4,9	5,1	5,9	5,9	6,1	6,8	6,8	7,2
44	*X*	5,0	5,5	6,1	6,3	6,9	7,2	8,3	8,8	9,2	9,6	10,4	11,0	12,2	13,1	14,5
	Y	5,5	5,7	6,0	6,2	6,4	6,5	6,6	6,8	6,8	7,0	7,0	7,2	7,4	7,5	7,6

45	*X*	2,4	3,1	4,2	4,9	5,5	6,3	7,0	7,7	8,4	9,1	9,9	10,5	11,2	11,8	12,3
	Y	8,6	8,2	8,0	7,4	7,4	7,0	6,9	6,9	6,6	6,5	6,0	5,6	5,5	5,5	5,2
46	*X*	5,2	5,6	6,2	6,8	7,0	7,5	8,4	9,3	9,8	10,6	11,4	12,1	12,7	13,5	14,8
	Y	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	6,0	6,2	6,4	6,6	6,7	6,8	7,0	7,1	7,4	7,6
47	*X*	2,6	3,1	3,7	4,2	4,5	5,2	5,8	6,3	7,2	7,9	8,1	8,9	9,3	9,7	10,1
	Y	1,1	2,0	3,2	3,5	4,5	5,4	6,4	7,0	8,8	9,4	10,0	11,1	12,0	12,9	13,0
48	*X*	5,3	5,5	6,1	6,7	7,2	7,8	8,3	9,5	9,8	10,8	11,2	12,0	12,5	13,1	13,8
	Y	5,4	5,4	5,5	5,6	5,7	5,9	6,0	6,1	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	7,2	7,5
49	*X*	3,1	3,8	4,2	4,9	5,5	6,3	7,1	7,6	8,4	9,2	9,8	10,5	11,1	11,9	12,4
	Y	3,5	4,1	4,8	4,8	5,1	5,8	6,1	6,1	6,6	6,9	7,5	7,6	7,8	8,6	8,9
50	*X*	5,2	5,6	5,8	6,8	7,1	7,7	8,5	9,4	9,9	10,5	11,3	12,1	12,8	13,6	14,3
	Y	5,2	5,4	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	6,1	6,4	6,6	6,8	6,9	7,0	7,1	7,5

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений вероятностей закона распределения Пуассона $\mathrm{P}(X = k) = F(k,\ \lambda) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k}}{k!}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0333	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	—	0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	—	—	—	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0001
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

k \ λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3231	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
3	0,0738	0,0868	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0110	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0020	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0026	0,0034
8	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0006	0,0009
9	—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

k \ λ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	0,1225	0,1108	0,1002	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
1	0,2572	0,2438	0,2306	0,2178	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
2	0,2700	0,2682	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
3	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2139	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
4	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
5	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
6	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
7	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0140	0,0163	0,1888	0,0216
8	0,0012	0,0015	0,0020	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
9	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
11	—	—	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002

k \ λ	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
1	0,1396	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0790	0,0733
2	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1540	0,1465
3	0,2237	0,2264	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2002	0,1954
4	0,1734	0,1781	0,1822	0,1358	0,1888	0,1912	0,1930	0,1944	0,1952	0,1954
5	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563
6	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042
7	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0386	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595
8	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298
9	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0076	0,0088	0,0102	0,0116	0,0132
10	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053
11	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019
12	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
13	—	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0001

k \ λ	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0129	0,0111	0,0100	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
1	0,0680	0,0630	0,0583	0,0540	0,0500	0,0462	0,0428	0,0395	0,0365	0,0337
2	0,1393	0,1323	0,1254	0,1189	0,1125	0,1064	0,1000	0,0948	0,0894	0,0842
3	0,1904	0,1852	0,1798	0,1743	0,1687	0,1631	0,1574	0,1517	0,1460	0,1404
4	0,1951	0,1944	0,1933	0,1918	0,1898	0,1875	0,1849	0,1820	0,1789	0,1755
5	0,1600	0,1633	0,1662	0,1688	0,1708	0,1725	0,1738	0,1748	0,1753	0,1755
6	0,1094	0,1143	0,1191	0,1238	0,1281	0,1323	0,1362	0,1398	0,1432	0,1462
7	0,0640	0,0686	0,0732	0,0778	0,0824	0,0869	0,0914	0,0959	0,1002	0,1044
8	0,0328	0,0360	0,0393	0,0428	0,0463	0,0500	0,0537	0,0575	0,0614	0,0653
9	0,0150	0,0168	0,0188	0,0209	0,0232	0,0256	0,0280	0,0307	0,0334	0,0363
10	0,0061	0,0071	0,0081	0,0092	0,0104	0,0118	0,0132	0,0147	0,0164	0,0181
11	0,0023	0,0027	0,0032	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0064	0,0073	0,0082
12	0,0008	0,0009	0,0011	0,0014	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034
13	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0011	0,0013
14	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005
15	—	—	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

k \ λ	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	0,0061	0,0055	0,0050	0,0045	0,0041	0,0037	0,0034	0,0030	0,0027	0,0025
1	0,0311	0,0287	0,0265	0,0244	0,0225	0,0207	0,0191	0,0176	0,0162	0,0149
2	0,0793	0,0740	0,0701	0,0658	0,0618	0,0580	0,0544	0,0509	0,0477	0,0446
3	0,1348	0,1293	0,1239	0,1185	0,1133	0,1083	0,1033	0,0985	0,0938	0,0893
4	0,1719	0,1680	0,1641	0,1600	0,1558	0,1516	0,1472	0,1428	0,1383	0,1339
5	0,1753	0,1748	0,1740	0,1828	0,1714	0,1698	0,1678	0,1656	0,1632	0,1607
6	0,1490	0,1515	0,1537	0,1555	0,1571	0,1584	0,1594	0,1601	0,1605	0,1607
7	0,1086	0,1125	0,1164	0,1200	0,1235	0,1268	0,1298	0,1326	0,1353	0,1377
8	0,0692	0,0731	0,0771	0,0810	0,0849	0,0887	0,0925	0,0962	0,0998	0,1033
9	0,0392	0,0423	0,0454	0,0486	0,0519	0,0552	0,0586	0,0620	0,0654	0,0688
10	0,0200	0,0220	0,0241	0,0262	0,0285	0,0309	0,0334	0,0360	0,0386	0,0413
11	0,0093	0,0104	0,0116	0,0129	0,0143	0,0157	0,0173	0,0190	0,0207	0,0225
12	0,0030	0,0045	0,0051	0,0058	0,0065	0,0073	0,0082	0,0092	0,0102	0,0113
13	0,0016	0,0018	0,0021	0,0024	0,0028	0,0032	0,0036	0,0041	0,0046	0,0052
14	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0015	0,0017	0,0020	0,0022
15	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0008	0,0009
16	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
17	—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Продолжение прил. 1

k \ λ	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0
0	0,0020	0,0017	0,0014	0,0011	0,0009	0,0007	0,0006	0,0005	0,0004	0,0003
1	0,0126	0,0106	0,0090	0,0076	0,0064	0,0054	0,0045	0,0038	0,0032	0,0027
2	0,0390	0,0340	0,0296	0,0258	0,02223	0,0194	0,0167	0,0144	0,0125	0,0107
3	0,0806	0,0726	0,0652	0,0584	0,0521	0,0464	0,0413	0,0366	0,0324	0,0286
4	0,1250	0,1162	0,1076	0,0992	0,0912	0,0836	0,0764	0,0696	0,0632	0,0572
5	0,1550	0,1487	0,1420	0,1350	0,1277	0,1204	0,1130	0,1058	0,0986	0,0916
6	0,1601	0,1586	0,1562	0,1530	0,1490	0,1445	0,1394	0,1340	0,1282	0,1222
7	0,1418	0,1450	0,1473	0,1486	0,1490	0,1486	0,1474	0,1454	0,1428	0,1396
8	0,1099	0,1160	0,1215	0,1263	0,1304	0,1338	0,1363	0,1382	0,1312	0,1396
9	0,0757	0,0825	0,0891	0,0954	0,1014	0,1070	0,1120	0,1167	0,1207	0,1241
10	0,0469	0,0528	0,0588	0,0649	0,0710	0,0770	0,0829	0,0887	0,0941	0,0993
11	0,0265	0,0307	0,0353	0,0401	0,0452	0,0504	0,0558	0,0613	0,0667	0,0722
12	0,0137	0,0164	0,0194	0,0227	0,0264	0,0302	0,0344	0,0388	0,0434	0,0481
13	0,0065	0,0081	0,0098	0,0119	0,0142	0,0168	0,0196	0,0227	0,0260	0,0296
14	0,0029	0,0037	0,0046	0,0058	0,0071	0,0086	0,0104	0,0123	0,0145	0,0169
15	0,0012	0,0016	0,0020	0,0026	0,0033	0,0041	0,0051	0,0062	0,0075	0,0090
16	0,0005	0,0006	0,0008	0,0011	0,0014	0,0019	0,0024	0,0030	0,0037	0,0045
17	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0006	0,0008	0,0010	0,0013	0,0017	0,0021
18	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0006	0,0007	0,0009
19	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004
20	—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0001
22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

k \ λ	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0
0	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	—	—
1	0,0022	0,0019	0,0016	0,0013	0,0011	0,0009	0,0008	0,0006	0,0005	0,0004
2	0,0092	0,0079	0,0068	0,0058	0,0050	0,0043	0,0036	0,0031	0,0027	0,0023
3	0,0252	0,0222	0,0195	0,0171	0,0150	0,0131	0,0114	0,0100	0,0087	0,0076
4	0,0517	0,0466	0,042	0,0377	0,0337	0,0302	0,0269	0,0240	0,0213	0,0189
5	0,0849	0,0784	0,0725	0,0663	0,0607	0,0555	0,0506	0,0460	0,0418	0,0378
6	0,1160	0,1097	0,1034	0,0972	0,0911	0,0851	0,0793	0,0736	0,0682	0,0631
7	0,1359	0,1317	0,1271	0,1222	0,1171	0,1118	0,1065	0,1010	0,0955	0,0901
8	0,1393	0,1383	0,1366	0,1344	0,1318	0,1315	0,1306	0,1293	0,1274	0,1251
9	0,1269	0,1290	0,1306	0,1315	0,1318	0,1315	0,1306	0,1293	0,1274	0,1251
10	0,1040	0,1084	0,1123	0,1157	0,1186	0,1210	0,1228	0,1241	0,1249	0,1251
11	0,0776	0,0828	0,0878	0,0926	0,0970	0,1012	0,1050	0,1083	0,1112	0,1138
12	0,0530	0,0579	0,0629	0,0679	0,0728	0,0776	0,0822	0,0866	0,0908	0,0948
13	0,0334	0,0374	0,0416	0,0459	0,0504	0,0549	0,0594	0,0640	0,0685	0,0729
14	0,0196	0,0225	0,0256	0,0289	0,0324	0,0361	0,0399	0,0439	0,0479	0,0521
15	0,0107	0,0126	0,0146	0,0169	0,0194	0,0221	0,0250	0,0281	0,0313	0,0347
16	0,0055	0,0066	0,0079	0,0093	0,0109	0,0127	0,0147	0,0168	0,0192	0,0117
17	0,0026	0,0033	0,0040	0,0048	0,0058	0,0069	0,0081	0,0095	0,0111	0,0128
18	0,0012	0,0015	0,0019	0,0024	0,0029	0,0035	0,0042	0,0051	0,0060	0,0071
19	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0017	0,0021	0,0026	0,0031	0,0037
20	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008	0,0010	0,0012	0,0015	0,0019
21	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0006	0,0007	0,0009
22	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004
23	—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	0,3989	0,30	0,3814	0,60	0,3332	0,90	0,2661
0,01	0,3989	0,31	0,3802	0,61	0,3312	0,91	0,2637
0,02	0,3989	0,32	0,3790	0,62	0,3292	0,92	0,2613
0,03	0,3989	0,33	0,3778	0,63	0,3271	0,93	0,2589
0,04	0,3986	0,34	0,3765	0,64	0,3252	0,94	0,2565
0,05	0,3984	0,35	0,3752	0,65	0,3230	0,95	0,2541
0,06	0,3982	0,36	0,3739	0,66	0,3209	0,96	0,2516
0,07	0,3980	0,37	0,3726	0,67	0,3187	0,97	0,2492
0,08	0,3977	0,38	0,3712	0,68	0,3166	0,98	0,2468
0,09	0,3973	0,39	0,3697	0,69	0,3144	0,99	0,2444
0,10	0,3970	0,40	0,3683	0,70	0,3123	1,00	0,2420
0,11	0,3965	0,41	0,3668	0,71	0,3101	1,01	0,2396
0,12	0,3961	0,42	0,3653	0,72	0,3079	1,02	0,2371
0,13	0,3956	0,43	0,3637	0,73	0,3056	1,03	0,2347
0,14	0,3951	0,44	0,3621	0,74	0,3034	1,04	0,2323
0,15	0,3945	0,45	0,3605	0,75	0,3011	1,05	0,2299
0,16	0,3939	0,46	0,3589	0,76	0,2989	1,06	0,2275
0,17	0,3932	0,47	0,3572	0,77	0,2966	1,07	0,2251
0,18	0,3925	0,48	0,3555	0,78	0,2943	1,08	0,2227
0,19	0,3918	0,49	0,3538	0,79	0,2920	1,09	0,2203
0,20	0,3910	0,50	0,3521	0,80	0,2897	1,10	0,2179
0,21	0,3902	0,51	0,3503	0,81	0,2874	1,11	0,2155
0,22	0,3894	0,52	0,3485	0,82	0,2850	1,12	0,2131
0,23	0,3885	0,53	0,3467	0,83	0,2827	1,13	0,2107
0,24	0,3876	0,54	0,3448	0,84	0,2803	1,14	0,2083
0,25	0,3867	0,55	0,3429	0,85	0,2780	1,15	0,2059
0,26	0,3857	0,56	0,3410	0,86	0,2756	1,16	0,2036
0,27	0,3847	0,57	0,3391	0,87	0,2732	1,17	0,2012
0,28	0,3836	0,58	0,3372	0,88	0,2709	1,18	0,1989
0,29	0,3825	0,59	0,3352	0,89	0,2785	1,19	0,1965

Продолжение прил. 2

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
1,20	0,1942	1,60	0,1109	2,00	0,0540	2,40	0,0224
1,21	0,1919	1,61	0,1092	2,01	0,0529	2,41	0,0219
1,22	0,1895	1,62	0,1074	2,02	0,0519	2,42	0,0213
1,23	0,1872	1,63	0,1057	2,03	0,0508	2,43	0,0208
1,24	0,1849	1,64	0,1040	2,04	0,0498	2,44	0,0203
1,25	0,1826	1,65	0,1023	2,05	0,0488	2,45	0,0198
1,26	0,1804	1,66	0,1006	2,06	0,0478	2,46	0,0194
1,27	0,1781	1,67	0,0989	2,07	0,0468	2,47	0,0189
1,28	0,1758	1,68	0,0973	2,08	0,0459	2,48	0,0184
1,29	0,1736	1,69	0,0957	2,09	0,0449	2,49	0,0180
1,30	0,1714	1,70	0,0940	2,10	0,0440	2,50	0,0175
1,31	0,1691	1,71	0,0925	2,11	0,0431	2,51	0,0171
1,32	0,1669	1,72	0,0909	2,12	0,0422	2,52	0,0167
1,33	0,1647	1,73	0,0893	2,13	0,0413	2,53	0,0163
1,34	0,1626	1,74	0,0878	2,14	0,0404	2,54	0,0158
1,35	0,1604	1,75	0,0863	2,15	0,0396	2,55	0,0154
1,36	0,1582	1,76	0,0848	2,16	0,0387	2,56	0,0151
1,37	0,1561	1,77	0,0833	2,17	0,0379	2,57	0,0147
1,38	0,1539	1,78	0,0818	2,18	0,0371	2,58	0,0143
1,39	0,1518	1,79	0,0804	2,19	0,0363	2,59	0,0139
1,40	0,1497	1,80	0,0790	2,20	0,0355	2,60	0,0136
1,41	0,1476	1,81	0,0775	2,21	0,0347	2,61	0,0132
1,42	0,1456	1,82	0,0761	2,22	0,0339	2,62	0,0129
1,43	0,1435	1,83	0,0748	2,23	0,0332	2,63	0,0126
1,44	0,1415	1,84	0,0734	2,24	0,0325	2,64	0,0122
1,45	0,1394	1,85	0,0721	2,25	0,0317	2,65	0,0119
1,46	0,1374	1,86	0,0707	2,26	0,0310	2,66	0,0116
1,47	0,1354	1,87	0,0694	2,27	0,0303	2,67	0,0113
1,48	0,1334	1,88	0,0681	2,28	0,0297	2,68	0,0110
1,49	0,1315	1,89	0,0669	2,29	0,0290	2,69	0,0107
1,50	0,1295	1,90	0,0656	2,30	0,0283	2,70	0,0104
1,51	0,1276	1,91	0,0644	2,31	0,0277	2,71	0,0101
1,52	0,1257	1,92	0,0632	2,32	0,0270	2,72	0,0099
1,53	0,1238	1,93	0,0620	2,33	0,0264	2,73	0,0096
1,54	0,1219	1,94	0,0608	2,34	0,0258	2,74	0,0093
1,55	0,1200	1,95	0,0596	2,35	0,0252	2,75	0,0091
1,56	0,1182	1,96	0,0584	2,36	0,0246	2,76	0,0088
1,57	0,1163	1,97	0,0573	2,37	0,0241	2,77	0,0086
1,58	0,1145	1,98	0,0562	2,38	0,0235	2,78	0,0084
1,59	0,1127	1,99	0,0551	2,39	0,0229	2,79	0,0081

Продолжение прил. 2

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
2,80	0,0079	3,10	0,0033	3,40	0,0012	3,70	0,0004
2,81	0,0077	3,11	0,0032	3,41	0,0012	3,71	0,0004
2,82	0,0075	3,12	0,0031	3,42	0,0012	3,72	0,0004
2,83	0,0073	3,13	0,0030	3,43	0,0011	3,73	0,0004
2,84	0,0071	3,14	0,0029	3,44	0,0011	3,74	0,0004
2,85	0,0069	3,15	0,0028	3,45	0,0010	3,75	0,0004
2,86	0,0067	3,16	0,0027	3,46	0,0010	3,76	0,0003
2,87	0,0065	3,17	0,0026	3,47	0,0010	3,77	0,0003
2,88	0,0063	3,18	0,0025	3,48	0,0009	3,78	0,0003
2,89	0,0061	3,19	0,0025	3,49	0,0009	3,79	0,0003
2,90	0,0060	3,20	0,0024	3,50	0,0009	3,80	0,0003
2,91	0,0058	3,21	0,0023	3,51	0,0008	3,81	0,0003
2,92	0,0056	3,22	0,0022	3,52	0,0008	3,82	0,0003
2,93	0,0055	3,23	0,0022	3,53	0,0008	3,83	0,0003
2,94	0,0053	3,24	0,0021	3,54	0,0008	3,84	0,0003
2,95	0,0051	3,25	0,0020	3,55	0,0007	3,85	0,0002
2,96	0,0050	3,26	0,0020	3,56	0,0007	3,86	0,0002
2,97	0,0048	3,27	0,0019	3,57	0,0007	3,87	0,0002
2,98	0,0047	3,28	0,0018	3,58	0,0007	3,88	0,0002
2,99	0,0046	3,29	0,0018	3,59	0,0006	3,89	0,0002
3,00	0,0044	3,30	0,0017	3,60	0,0006	3,90	0,0002
3,01	0,0043	3,31	0,0017	3,61	0,0006	3,91	0,0002
3,02	0,0042	3,32	0,0016	3,62	0,0006	3,92	0,0002
3,03	0,0040	3,33	0,0016	3,63	0,0005	3,93	0,0002
3,04	0,0039	3,34	0,0015	3,64	0,0005	3,94	0,0002
3,05	0,0038	3,35	0,0015	3,65	0,0005	3,95	0,0002
3,06	0,0037	3,36	0,0014	3,66	0,0005	3,96	0,0002
3,07	0,0036	3,37	0,0014	3,67	0,0005	3,97	0,0002
3,08	0,0035	3,38	0,0013	3,68	0,0005	3,98	0,0002
3,09	0,0034	3,39	0,0013	3,69	0,0004	3,99	0,0001

Приложение 3

Таблица значений интеграла вероятностей $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,30	0,1179	0,60	0,2257	0,90	0,3159
0,01	0,0040	0,31	0,1217	0,61	0,2291	0,91	0,3186
0,02	0,0080	0,32	0,1255	0,62	0,2324	0,92	0,3212
0,03	0,0120	0,33	0,1293	0,63	0,2357	0,93	0,3238
0,04	0,0160	0,34	0,1331	0,64	0,2389	0,94	0,3264
0,05	0,0199	0,35	0,1368	0,65	0,2422	0,95	0,3289
0,06	0,0239	0,36	0,1406	0,66	0,2454	0,96	0,3315
0,07	0,0279	0,37	0,1443	0,67	0,2486	0,97	0,3340
0,08	0,0319	0,38	0,1480	0,68	0,2517	0,98	0,3365
0,09	0,0359	0,39	0,1517	0,69	0,2549	0,99	0,3389
0,10	0,0398	0,40	0,1554	0,70	0,2580	1,00	0,3413
0,11	0,0438	0,41	0,1591	0,71	0,2611	1,01	0,3438
0,12	0,0478	0,42	0,1628	0,72	0,2642	1,02	0,3461
0,13	0,0517	0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,3485
0,14	0,0557	0,44	0,1700	0,74	0,2703	1,04	0,3508
0,15	0,0596	0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3531
0,16	0,0636	0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554
0,17	0,0675	0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577
0,18	0,0714	0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599
0,19	0,0753	0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621
0,20	0,0793	0,50	0,1915	0,80	0,2881	1,10	0,3643
0,21	0,0832	0,51	0,1950	0,81	0,2910	1,11	0,3665
0,22	0,0871	0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3686
0,23	0,0910	0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708
0,24	0,0948	0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729
0,25	0,0987	0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749
0,26	0,1026	0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,3770
0,27	0,1064	0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,3790
0,28	0,1103	0,58	0,2190	0,88	0,3106	1,18	0,3810
0,29	0,1141	0,59	0,2224	0,89	0,3133	1,19	0,3830

Продолжение прил. 3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,20	0,3849	1,60	0,4452	2,00	0,4772	2,40	0,4918
1,21	0,3869	1,61	0,4463	2,01	0,4778	2,41	0,4920
1,22	0,3883	1,62	0,4474	2,02	0,4783	2,42	0,4922
1,23	0,3907	1,63	0,4484	2,03	0,4788	2,43	0,4925
1,24	0,3925	1,64	0,4495	2,04	0,4793	2,44	0,4927
1,25	0,3944	1,65	0,4505	2,05	0,4798	2,45	0,4929
1,26	0,3962	1,66	0,4515	2,06	0,4803	2,46	0,4931
1,27	0,3980	1,67	0,4525	2,07	0,4808	2,47	0,4933
1,28	0,3997	1,68	0,4535	2,08	0,4812	2,48	0,4934
1,29	0,4015	1,69	0,4545	2,09	0,4817	2,49	0,4936
1,30	0,4032	1,70	0,4554	2,10	0,4821	2,50	0,4938
1,31	0,4049	1,71	0,4564	2,11	0,4825	2,51	0,4939
1,32	0,4066	1,72	0,4573	2,12	0,4830	2,52	0,4941
1,33	0,4082	1,73	0,4582	2,13	0,4834	2,53	0,4943
1,34	0,4099	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,54	0,4945
1,35	0,4115	1,75	0,4599	2,15	0,4842	2,55	0,4946
1,36	0,4131	1,76	0,4608	2,16	0,4846	2,56	0,4948
1,37	0,4147	1,77	0,4616	2,17	0,4850	2,57	0,4949
1,38	0,4162	1,78	0,4625	2,18	0,4854	2,58	0,4951
1,39	0,4177	1,79	0,4633	2,19	0,4857	2,59	0,4952
1,40	0,4192	1,80	0,4641	2,20	0,4861	2,60	0,4953
1,41	0,4207	1,81	0,4649	2,21	0,4864	2,61	0,4955
1,42	0,4222	1,82	0,4656	2,22	0,4868	2,62	0,4956
1,43	0,4236	1,83	0,4664	2,23	0,4871	2,63	0,4957
1,44	0,4251	1,84	0,4671	2,24	0,4875	2,64	0,4959
1,45	0,4265	1,85	0,4676	2,25	0,4878	2,65	0,4960
1,46	0,4279	1,86	0,4686	2,26	0,4881	2,66	0,4961
1,47	0,4292	1,87	0,4693	2,27	0,4884	2,67	0,4962
1,48	0,4306	1,88	0,4699	2,28	0,4887	2,68	0,4963
1,49	0,4319	1,89	0,4706	2,29	0,4890	2,69	0,4964
1,50	0,4332	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,70	0,4965
1,51	0,4345	1,91	0,4719	2,31	0,4896	2,71	0,4966
1,52	0,4357	1,92	0,4726	2,32	0,4898	2,72	0,4967
1,53	0,4370	1,93	0,4732	2,33	0,4901	2,73	0,4968
1,54	0,4382	1,94	0,4738	2,34	0,4904	2,74	0,4969
1,55	0,4394	1,95	0,4744	2,35	0,4906	2,75	0,4970
1,56	0,4406	1,96	0,4750	2,36	0,4909	2,76	0,4971
1,57	0,4418	1,97	0,4756	2,37	0,4911	2,77	0,4972
1,58	0,4429	1,98	0,4761	2,38	0,4913	2,78	0,4973
1,59	0,4441	1,99	0,4767	2,39	0,4916	2,79	0,4973

Продолжение прил. 3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,80	0,4974	3,10	0,4990	3,40	0,4997	3,70	0,4999
2,81	0,4975	3,11	0,4991	3,41	0,4997	3,71	0,4999
2,82	0,4976	3,12	0,4991	3,42	0,4997	3,72	0,4999
2,83	0,4976	3,13	0,4991	3,43	0,4997	3,73	0,4999
2,84	0,4977	3,14	0,4992	3,44	0,4997	3,74	0,4999
2,85	0,4978	3,15	0,4992	3,45	0,4997	3,75	0,4999
2,86	0,4979	3,16	0,4992	3,46	0,4997	3,76	0,4999
2,87	0,4979	3,17	0,4992	3,47	0,4997	3,77	0,4999
2,88	0,4980	3,18	0,4993	3,48	0,4998	3,78	0,4999
2,89	0,4981	3,19	0,4993	3,49	0,4998	3,79	0,4999
2,90	0,4981	3,20	0,4993	3,50	0,4998	3,80	0,4999
2,91	0,4982	3,21	0,4993	3,51	0,4998	3,81	0,4999
2,92	0,4982	3,22	0,4994	3,52	0,4998	3,82	0,4999
2,93	0,4983	3,23	0,4994	3,53	0,4998	3,83	0,4999
2,94	0,4984	3,24	0,4994	3,54	0,4998	3,84	0,4999
2,95	0,4984	3,25	0,4994	3,55	0,4998	3,85	0,5000
2,96	0,4985	3,26	0,4995	3,56	0,4998	3,86	0,5000
2,97	0,4985	3,27	0,4995	3,57	0,4998	3,87	0,5000
2,98	0,4986	3,28	0,4995	3,58	0,4998	3,88	0,5000
2,99	0,4986	3,29	0,4995	3,59	0,4998	3,89	0,5000
3,00	0,4986	3,30	0,4995	3,60	0,4998	3,90	0,5000
3,01	0,4987	3,31	0,4995	3,61	0,4998	3,91	0,5000
3,02	0,4987	3,32	0,4996	3,62	0,4998	3,92	0,5000
3,03	0,4988	3,33	0,4996	3,63	0,4998	3,93	0,5000
3,04	0,4988	3,34	0,4996	3,64	0,4999	3,94	0,5000
3,05	0,4989	3,35	0,4996	3,65	0,4999	3,95	0,5000
3,06	0,4989	3,36	0,4996	3,66	0,4999	3,96	0,5000
3,07	0,4989	3,37	0,4996	3,67	0,4999	3,97	0,5000
3,08	0,4990	3,38	0,4996	3,68	0,4999	3,98	0,5000
3,09	0,4990	3,39	0,4997	3,69	0,4999	3,99	0,5000

Приложение 4

Таблица значений χ^2 для различных значений уровней значимости α и числа степеней свободы ν

Число степеней свободы ν	Уровни значимости								
	α = 0,99	α = 0,95	α = 0,975	α = 0,95	α = 0,90	α = 0,80	α = 0,70	α = 0,50	α = 0,30
1	0,00016	0,00063	0,00098	0,0039	0,0158	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,0201	0,0404	0,0506	0,1026	0,2107	0,446	0,713	1,39	2,41
3	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,00	1,42	2,37	3,66
4	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,65	2,20	3,36	4,88
5	0,554	0,752	0,831	1,15	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06
6	0,872	1,13	1,24	1,64	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23
7	1,24	1,56	1,69	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38
8	1,65	2,03	2,18	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52
9	2,09	2,53	2,70	3,33	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,25	3,94	4,87	6,18	7,17	9,34	11,8
11	3,05	3,61	3,82	4,57	5,58	6,99	8,15	10,3	12,9
12	3,57	4,18	4,40	5,23	6,30	7,81	9,03	11,3	14,0
13	4,11	4,77	5,01	5,89	7,04	8,63	9,93	12,3	15,1
14	4,66	5,37	5,63	6,57	7,79	9,47	10,8	13,3	16,2
15	5,23	5,99	6,26	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,81	6,61	6,91	7,96	9,31	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,41	7,26	7,56	8,67	10,08	12,0	13,5	16,3	19,5
18	7,09	7,91	8,23	9,39	10,89	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,63	8,57	8,91	10,12	11,65	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,26	9,24	9,59	10,85	12,44	14,6	16,3	19,3	22,8
22	9,54	10,60	10,98	12,34	14,04	16,3	18,1	21,3	24,9
24	10,86	11,99	12,40	13,85	15,66	18,1	19,9	23,3	27,1
26	12,20	13,41	13,84	15,38	17,29	19,8	21,8	25,3	29,2
28	13,56	14,85	15,31	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4
30	14,95	16,31	16,79	18,49	20,60	23,4	25,5	29,3	33,5

Продолжение прил. 4

Число степеней свободы ν	Уровни значимости							
	α = 0,20	α = 0,10	α = 0,05	α = 0,025	α = 0,02	α = 0,01	α = 0,005	α = 0,001
1	1,64	2,71	3,84	5,02	5,41	6,63	7,88	10,83
2	3,22	4,61	5,99	7,38	7,82	9,21	10,6	13,82
3	4,64	6,25	7,81	9,35	9,84	11,34	12,8	16,27
4	5,99	7,78	9,49	11,14	11,67	13,28	14,9	18,47
5	7,29	9,24	11,07	12,83	13,39	15,09	16,7	20,52
6	8,56	10,64	12,59	14,45	15,03	16,81	18,5	22,46
7	9,80	12,02	14,07	16,01	16,62	18,48	20,3	24,32
8	11,0	13,36	15,51	17,53	18,17	20,09	22,0	26,12
9	12,2	14,68	16,82	19,02	19,68	21,67	23,6	27,88
10	13,4	15,99	18,31	20,48	21,16	23,21	25,2	29,59
11	14,6	17,28	19,68	21,92	22,62	24,73	26,8	31,26
12	15,8	18,55	21,03	23,34	24,05	26,22	28,3	32,91
13	17,0	19,81	22,36	24,74	25,47	27,69	29,8	34,53
14	18,2	21,06	23,68	26,12	26,87	29,14	31,3	36,12
15	19,3	22,31	25,00	27,49	28,26	30,58	32,8	37,70
16	20,5	23,54	26,30	28,85	29,63	32,00	34,3	39,25
17	21,6	24,77	27,59	30,19	31,00	33,41	35,7	40,79
18	22,8	25,99	28,87	31,53	32,35	34,81	37,2	42,31
19	23,9	27,20	30,14	32,85	33,69	36,19	38,6	43,82
20	25,0	28,41	31,41	34,18	35,02	37,57	40,0	45,32
22	27,3	30,81	33,92	36,78	37,66	40,29	42,8	48,27
24	29,6	33,20	36,42	39,36	40,27	42,98	45,6	51,18
26	31,8	35,56	38,88	41,92	42,86	45,64	48,3	54,05
28	34,0	37,92	41,34	44,46	45,42	48,28	51,0	56,89
30	36,2	40,26	43,77	46,98	47,96	50,89	53,7	59,70

Приложение 5

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n\text{-}1)$

γ / $k = n - 1$	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	3,08	6,31	12,71	31,8	63,7	63,7
2	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
3	1,638	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61
5	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
6	1,440	1,943	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40
8	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49
12	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
13	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
15	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96
18	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,325	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85
21	1,323	1,721	2,08	2,52	2,83	3,82
22	1,321	1,717	2,07	2,51	2,82	3,79
23	1,319	1,714	2,07	2,50	2,81	3,77
24	1,318	1,711	2,06	2,49	2,80	3,74
25	1,316	1,708	2,06	2,48	2,79	3,72
26	1,315	1,706	2,06	2,48	2,78	3,71
27	1,314	1,703	2,05	2,47	2,77	3,69
28	1,313	1,701	2,05	2,47	2,76	3,67
29	1,311	1,699	2,04	2,46	2,76	3,66
30	1,310	1,697	2,04	2,46	2,75	3,65
40	1,303	1,684	2,02	2,42	2,70	3,55
60	1,296	1,671	2,00	2,39	2,66	3,46
120	1,289	1,658	1,980	2,36	2,62	3,37
∞	1,282	1,645	1,960	2,33	2,58	3,29

Приложение 6

Значения β_α, удовлетворяющие уравнению

$$\mathrm{p}_\alpha = \mathrm{P}\left\{\frac{X_{(n)} - \bar{x}}{S_1} > \beta_\alpha\right\}$$

n \ p_α	0,10	0,05	0,01	n \ p_α	0,10	0,05	0,01
4	1,42	1,46	1,49	15	2,25	2,41	2,70
5	1,60	1,67	1,75	16	2,28	2,44	2,75
6	1,73	1,82	1,94	17	2,31	2,48	2,78
7	1,83	1,94	2,10	18	2,34	2,50	2,82
8	1,91	2,03	2,22	19	2,36	2,53	2,85
9	1,98	2,11	2,32	20	2,38	2,56	2,88
10	2,04	2,18	2,41	21	2,41	2,58	2,91
11	2,09	2,23	2,48	22	2,43	2,60	2,94
12	2,13	2,28	2,55	23	2,45	2,62	2,96
13	2,18	2,33	2,61	24	2,47	2,64	2,99
14	2,21	2,37	2,66	25	2,49	2,66	3,01

Приложение 7

Таблица критических значений D_{α}

n	$D_{0,10}$	$D_{0,05}$	n	$D_{0,10}$	$D_{0,05}$
3	0,636	0,708	23	0,247	0,275
4	0,565	0,624	24	0,242	0,269
5	0,509	0,563	25	0,238	0,264
6	0,468	0,519	26	0,233	0,259
7	0,436	0,483	27	0,229	0,254
8	0,410	0,454	28	0,225	0,250
9	0,387	0,430	29	0,221	0,246
10	0,369	0,409	30	0,218	0,242
11	0,352	0,391	31	0,214	0,238
12	0,338	0,375	32	0,211	0,234
13	0,325	0,361	33	0,208	0,231
14	0,314	0,349	34	0,205	0,227
15	0,304	0,338	35	0,202	0,224
16	0,295	0,327	36	0,199	0,221
17	0,286	0,318	37	0,196	0,218
18	0,278	0,309	38	0,194	0,215
19	0,271	0,301	39	0,191	0,213
20	0,265	0,294	40	0,189	0,210
21	0,259	0,287	50	0,170	0,177
22	0,253	0,281	100	0,121	0,134

Приложение 8

Критические точки F- распределения Фишера, уровень значимости α = 0,01

ν_1 – число степеней свободы числителя, ν_2 – число степеней свободы знаменателя

ν_2	ν_1										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18

ν_2	ν_1							
	15	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
3	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
4	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

Критические точки F- распределения Фишера, уровень значимости α = 0,05

ν_1 – число степеней свободы числителя, ν_2 – число степеней свободы знаменателя

ν_2	ν_1										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75

ν_2	ν_1							
	15	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	2,11	5,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,97	1,73
25	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

Михайленко Світлана Василівна
Свищова Євгенія Віталіївна
Янцевич Артем Артемович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

ПОСІБНИК

для самостійного вивчення дисципліни

(російською мовою)

В авторській редакції
Комп'ютерна верстка О. Ф. Волкова

Підписано до друку 28.01.2019. Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Гарнітура «Таймс».
Умов. друк. арк. 11,22. Обл.-вид. арк. 10,42.
Тираж 100 пр. Зам №

План 2018/2019 навч. р., поз. №2 в переліку робіт кафедри

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво № 1153 от 16.12.2002.

Надруковано у видавництві Народної української академії
Україна, 61000, Харків, МСП, вул. Лермонтовська, 27.