НАРОДНАЯ УКРАИНСКАЯ АКАДЕМИЯ

В. Г. Михайленко, Е. В. Свищева, А. Ю. Петрова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ПРАКТИКУМ

Издательство НУА

НАРОДНАЯ УКРАИНСКАЯ АКАДЕМИЯ

В. Г. Михайленко, Е. В. Свищева, А. Ю. Петрова

Л И Н Е Й Н А Я   А Л Г Е Б Р А

П Р А К Т И К У М

Издание третье, исправленное

Харьков
Издательство НУА
2019

УДК 512.64(075.8+0.76)
М69

Утверждено на заседании
кафедры информационных технологий и математики
Протокол №6 от 21.01.2019

Р е ц е н з е н т канд. физ.-мат. наук, доц. С. Б. Данилевич

Пропонований навчальний посібник, містить задачі, які належать до розділу лінійна алгебра. На початку кожного розділу подано необхідні короткі теоретичні відомості (означення, формули і т. ін.). Більшість задач супроводжуються вказівками щодо їх розв'язання. У багатьох випадках детально розбираються типові приклади. По кожному розділу наводяться економічні приклади.

Михайленко, Виталий Григорьевич.

М69 Линейная алгебра : практикум / В. Г. Михайленко, Е. В. Свищева, А. Ю. Петрова ; Нар. укр. акад., [каф. информ. технологий и математики]. – 3-е изд., испр. – Харьков : Изд-во НУА, 2019. – 80 с.

Предлагаемое учебное пособие содержит задачи, относящиеся к разделу линейная алгебра. В начале каждого раздела приведены необходимые краткие теоретические сведения (определения, формулы и т. д.). Большинство задач снабжены указаниями по их решению. Во многих случаях подробно разбираются типовые примеры. По каждому разделу приводятся экономические примеры.

УДК 512.64(075.8+076)

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие охватывает следующие разделы курса «Математика для экономистов»: векторная алгебра, аналитическая геометрия и матричная алгебра.

В начале каждого параграфа приводятся сведения из теории (формулы, определения и другие краткие пояснения), необходимые для решения задач, после чего приводятся подробные решения типовых задач. В конце каждого параграфа предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Такое построение учебного пособия позволяет использовать его как для работы под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения указанных разделов курса «Математика для экономистов».

Учитывая, что учебное пособие предназначено для студентов-экономистов, в нем рассматривается значительное число задач с экономическим смыслом.

I. ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1. Линейные действия над векторами

1. n-мерным вектором $\vec{a}$ называется упорядоченный набор из n вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, называемых координатами или компонентами вектора $\vec{a}$.

$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – координатная форма записи вектора $\vec{a}$.

Иногда векторы записываются в виде упорядоченных столбцов (векторы-столбцы): $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Вектор, все координаты которого равны нулю, называется нулевым вектором: $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. При записи нулевого вектора стрелка часто опускается. Записи $\vec{a} = \vec{0}$ и $\vec{a} = 0$ – эквивалентны.

Векторы удобно представлять (особенно в двух- и трехмерных пространствах) в виде направленных отрезков. Если $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – начало, а $B(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – конец вектора $\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)$.

2. Вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ равен вектору $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, если $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. Последнее часто кратко записывают так: $a_i = b_i$, $i = \overline{1,n}$.

3. Произведение вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на скаляр (число) k есть вектор $k\vec{a} = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$. Векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$, если $k \neq 0$, называются коллинеарными. Вектор $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ называется противоположным вектору $\vec{a}$.

4. Условие коллинеарности векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

5. Сумма векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ есть вектор $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$; разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть вектор $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)$.

6. Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ называется вектор $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_m\vec{a}_m$; при этом числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$ называются коэффициентами линейной комбинации.

7. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ называются линейно зависимыми, если хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных или, что то же самое, если существуют числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_m\vec{a}_m = 0$.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ называются ***линейно независимыми***, если равенство $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_m\vec{a}_m = 0$ возможно только при $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$ или, что то же самое, если ни один из векторов не является линейной комбинацией остальных.

8. Если $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ – концы отрезка AB, а точка $M(x, y, z)$ делит этот отрезок в отношении $\frac{AM}{MB} = \lambda$, то координаты этой точки:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Если $M(x, y, z)$ – середина отрезка AB, то $\lambda = 1$ и

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Пример 1. Записать в координатной форме вектор $\overrightarrow{AB}$, если $A(2, 1, –3)$, $B(5, –2, 4)$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (5 – 2, –2 – 1, 4 – (–3)) = (3, –3, 7)$.

Пример 2. Коллинеарны ли векторы $\vec{a} = (4, –1, 3)$ и $\vec{b} = (8, –2, –6)$?

Решение. Так как $\frac{a_1}{b_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{a_2}{b_2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$, $\frac{a_3}{b_3} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$,

то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3}$. Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

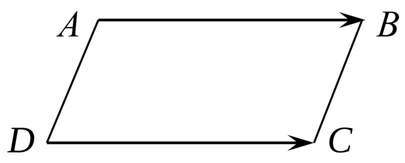
Пример 3. Даны точки $A(2, –1, 4)$, $B(x, 2, 1)$, $C(3, y, –1)$ и $D(–1, 3, –2)$. При каких значениях x и y векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ будут коллинеарными?

Решение. $\overrightarrow{AB} = (x – 2, 3, –3)$, $\overrightarrow{CD} = (–4, 3 – y, –1)$. Эти векторы будут коллинеарными при условии, что $\frac{x-2}{-4} = \frac{3}{3-y} = \frac{-3}{-1}$. Следовательно, должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{-4} = 3, \\ \frac{3}{3-y} = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = -12, \\ 3 - y = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -10, \\ y = 2. \end{cases}$$

Пример 4. $A(3, –1, 2)$, $B(–2, 3, 4)$ и $C(1, 2, –3)$ – три последовательные вершины параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины D.

Решение. Обозначим координаты вершины D через x, y и z. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB} = (-5, 4, 2)$ и $\overrightarrow{DC} = (1 - x, 2 - y, -3 - z)$.



Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны, то

$$\begin{cases} -5 = 1 - x, \\ 4 = 2 - y, \\ 2 = -3 - z; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = -2, \\ z = -5; \end{cases} \Rightarrow D(6, -2, -5).$$

Пример 5. Даны векторы $\vec{a} = (2, 3, -4, 1)$ и $\vec{b} = (-1, 2, 2, -3)$. Найти вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Решение. $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (4, 6, -8, 2) + (3, -6, -6, 9) = (7, 0, -14, 11)$.

Пример 6. Показать, что векторы $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 0, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 3, 0)$ и $\vec{a}_4 = (1, 2, 3, 4)$ линейно независимы.

Решение. Составим линейную комбинацию векторов и приравняем ее нулю: $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3 + k_4\vec{a}_4 = (k_1, 0, 0, 0) + (k_2, 2k_2, 0, 0) +$

$+ (k_3, 2k_3, 3k_3, 0) + (k_4, 2k_4, 3k_4, 4k_4) =$

$= (k_1 + k_2 + k_3 + k_4, 2k_2 + 2k_3 + 2k_4, 3k_3 + 3k_4, 4k_4) = 0$,

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0, \\ 2k_2 + 2k_3 + 2k_4 = 0, \\ 3k_3 + 3k_4 = 0, \\ 4k_4 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0, \\ k_2 = 0, \\ k_3 = 0, \\ k_4 = 0. \end{cases}$$

Так как линейная комбинация этих векторов обращается в нуль только при условии $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, то векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ – линейно независимы.

Пример 7. Даны точки $A(2, -3, 1)$ и $B(12, 7, 11)$. Найти точку $M(x, y, z)$, делящую отрезок AB в отношении $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{2}{3}$.

Решение. В нашем случае $\lambda = \dfrac{2}{3}$. Следовательно:

$$x = \frac{2 + \frac{2}{3} \cdot 12}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{30}{3}}{\frac{5}{3}} = 6; \quad y = \frac{-3 + \frac{2}{3} \cdot 7}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1; \quad z = \frac{2 + \frac{2}{3} \cdot 11}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{25}{3}}{\frac{5}{3}} = 5.$$

Значит, $M(6, 1, 5)$.

Пример 8. Предприятие выпускает четыре вида продукции. Производственные мощности предприятия позволяют выпускать в сутки 300 ед. продукции первого вида, 460 ед. продукции второго, 540 ед. третьего и 260 ед. четвертого вида. После проведенной модернизации производства производственные мощности предприятия увеличились на 20%. Сколько единиц каждого вида продукции в состоянии выпускать предприятие после реконструкции?

Решение. Запишем объем суточного выпуска (до реконструкции) всех видов продукции в виде вектора $\vec{a} = (300, 460, 540, 260)$. Так как после реконструкции производственные мощности предприятия увеличились на 20%, то предприятие увеличило суточный выпуск продукции в 1,2 раза. Следовательно, объем выпуска каждого вида продукции может быть получен как

$1{,}2\cdot\vec{a} = 1{,}2\cdot(300, 460, 540, 260) = (360, 552, 648, 312)$.

Значит, после реконструкции предприятие в состоянии выпускать 360 ед. продукции первого вида, 552 ед. – второго, 648 ед. – третьего и 312 ед. четвертого вида.

2. Скалярное произведение векторов

1. Скалярным произведением векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется число, обозначаемое $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$, равное сумме произведений одноименных координат:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + \ldots + a_n\cdot b_n.$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a});$$

$$(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c});$$

$$(k_1\vec{a}, k_2\vec{b}) = k_1k_2(\vec{a}, \vec{b}).$$

2. Под длиной вектора $\vec{a}$ понимается число, обозначаемое a или $|\vec{a}|$, равное: $a = |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$.

3. Расстояние между точками $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ определяется как длина вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots (b_n - a_n)^2}.$$

4. Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол φ $(0 \le \varphi \le \pi)$, косинус которого определяется равенством: $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{a \cdot b}$.

5. Для скалярного произведения векторов справедливо равенство:

$$(\vec{a},\vec{b}) = a \cdot b \cdot \cos\varphi.$$

6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ортогональными (перпендикулярными), если $(\vec{a},\vec{b}) = 0$.

Пример 9. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ = (2, –1, 0, 3, –5) и $\vec{b}$ = (1, 2, 4, –3, 2).

Решение.

$(\vec{a},\vec{b}) = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) + (-5) \cdot 2 = 2 - 2 - 9 - 10 = -19$.

Пример 10. Вычислить скалярное произведение ($\vec{a}$, $\vec{b}$), если $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, m = 1, n = 2, $\widehat{\vec{m}\,\vec{n}} = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Используя свойства скалярного произведения, получаем:

$$(\vec{a},\vec{b}) = (2\vec{m} - 3\vec{n}, \vec{m} + 2\vec{n}) = (2\vec{m}, \vec{m}) + (2\vec{m}, 2\vec{n}) + (-3\vec{n}, \vec{m}) + (-3\vec{n}, 2\vec{n}) =$$
$$= 2 \cdot (\vec{m}, \vec{m}) + 4 \cdot (\vec{m}, \vec{n}) - 3 \cdot (\vec{n}, \vec{m}) - 6 \cdot (\vec{n}, \vec{n}) = 2m^2 + (\vec{m}, \vec{n}) - 6n^2 =$$
$$= 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} - 6 \cdot 2^2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 24 = -21.$$

Пример 11. Найти длину вектора $\vec{a}$ = (3, 2, 1, –1, –1).

Решение. $a = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16} = 4$.

Пример 12. Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}$, если m = 2, n = 3, $\widehat{\vec{m}\,\vec{n}} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Решение. Вычислим $(\vec{a},\vec{a}) = a^2$. $(\vec{a},\vec{a}) = (3\vec{m} - \vec{n}, 3\vec{m} - \vec{n}) = (3\vec{m}, 3\vec{m}) +$

$$+ (3\vec{m}, -\vec{n}) + (-\vec{n}, 3\vec{m}) + (-\vec{n}, -\vec{n}) = 9 \cdot (\vec{m}, \vec{m}) - 3 \cdot (\vec{m}, \vec{n}) - 3 \cdot (\vec{n}, \vec{m}) + (\vec{n}, \vec{n}) =$$
$$= 9m^2 - 6 \cdot (\vec{m}, \vec{n}) + n^2 = 9 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + 3^2 = 36 - 36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 = 63.$$

Следовательно, $a = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{63}$.

Пример 13. Есть ли среди векторов $\vec{a}_1 = (2, -1, 3, 0, 2)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 2, 4, -1)$ и $\vec{a}_3 = (0, 2, -1, 1, 4)$ ортогональные?

Решение. Вычислим скалярные произведения этих векторов:

$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 2 - 1 + 6 + 0 - 2 = 5 \neq 0$; $(\vec{a}_1, \vec{a}_3) = 0 - 2 - 3 + 0 + 8 = 3 \neq 0$;

$(\vec{a}_2, \vec{a}_3) = 0 + 2 - 2 + 4 - 4 = 0$. Векторы $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ ортогональные.

Пример 14. Найти угол между векторами $\vec{a} = (2, -1, 2)$ и $\vec{b} = (2, 4, 4)$.

Решение. Найдем косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{a \cdot b} = \frac{2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 4}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{4+16+16}} = \frac{4-4+8}{3 \cdot 6} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos \frac{4}{9}$.

Пример 15. Найти длины сторон треугольника ABC и угол $\angle BAC$, зная координаты его вершин: $A(3, -5, 2)$, $B(4, -6, 2)$, $C(4, -7, 4)$.

Решение. Введем в рассмотрение векторы:

$\overrightarrow{AB} = (4 - 3, -6 - (-5), 2 - 2) = (1, -1, 0)$,

$\overrightarrow{AC} = (4 - 3, -7 - (-5), 4 - 2) = (1, -2, 2)$,

$\overrightarrow{BC} = (4 - 4, -7 - (-6), 4 - 2) = (0, -1, 2)$.

Находим длины сторон треугольника:

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Угол $\angle BAC = \varphi$ образован векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Поэтому,

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{AB \cdot AC} = \frac{1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = \angle BAC = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

3. Векторное произведение векторов (в R^3)

1. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ который:

а) перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) направлен так, что если смотреть с его конца, то поворот первого вектора (т. е. вектора $\vec{a}$) ко второму (т. е. к вектору $\vec{b}$) на кратчайший угол φ проходит против часовой стрелки;

в) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними, т. е. $c = \left|[\vec{a}, \vec{b}]\right| = a \cdot b \cdot \sin\varphi$.

Для векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ используется также обозначение $\vec{a} \times \vec{b}$.

2. Основные свойства векторного произведения векторов:

а) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$,

б) $[k_1\vec{a}, k_2\vec{b}] = k_1 k_2 [\vec{a}, \vec{b}]$,

в) $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$,

г) если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$. В частности, $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$.

3. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в координатной форме: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Для вычисления векторного произведения векторов удобно пользоваться следующей таблицей:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ & + \quad - & + \quad - & + \quad - & & \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

4. Площадь параллелограмма $S_{парал.}$, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ численно равна длине вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$:

$$S_{парал.} = \left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|.$$

5. Площадь треугольника $S_{треуг.}$, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S_{треуг.} = \frac{1}{2}\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|.$$

Пример 16. Вычислить векторное произведение векторов $\vec{a}$ = (2, –1, 3) и $\vec{b}$ = (3, 2, –4).

Решение.

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}=$$

$$=\big((-1)\cdot(-4)-3\cdot 2, 3\cdot 3-2\cdot(-4), 2\cdot 2-(-1)\cdot 3\big)=(4-6, 9+8, 4+3)=(-2, 17, 7).$$

Пример 17. Вычислить векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{m}+5\vec{n}$ и $\vec{b}=3\vec{m}-\vec{n}$.

Решение. Используя свойства векторного произведения векторов получаем: $[\vec{a},\vec{b}]=\left[2\vec{m}+5\vec{n}, 3\vec{m}-\vec{n}\right]=\left[2\vec{m}, 3\vec{m}\right]+\left[2\vec{m}, -\vec{n}\right]+\left[5\vec{n}, 3\vec{m}\right]+\left[5\vec{n}, -\vec{n}\right]$.

Так как $\left[2\vec{m}, 3\vec{m}\right]=0$ и $\left[5\vec{n}, -\vec{n}\right]=0$, то

$$[\vec{a},\vec{b}]=-2\cdot\left[\vec{m},\vec{n}\right]+15\cdot\left[\vec{n},\vec{m}\right]=2\cdot\left[\vec{n},\vec{m}\right]+15\cdot\left[\vec{n},\vec{m}\right]=17\cdot\left[\vec{n},\vec{m}\right].$$

Пример 18. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = (–3, 2, 5) и $\vec{b}$ = (1, 3, –2).

Решение. Сначала вычислим векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=(-4-15, 5-6, -9-2)=(-19, -1, -11).$$

$$S_{парал.}=\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=\sqrt{(-19)^2+(-1)^2+(-11)^2}=\sqrt{361+1+121}=\sqrt{483}.$$

Пример 19. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}-\vec{n}$, если m = 1, n = 2, $\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}=\dfrac{\pi}{6}$.

Решение. $[\vec{a},\vec{b}]=[3\vec{m}+\vec{n}, 2\vec{m}-\vec{n}]=6[\vec{m},\vec{m}]-3[\vec{m},\vec{n}]+2[\vec{n},\vec{m}]-[\vec{n},\vec{n}]$.

Так как $6[\vec{m},\vec{m}]=0$ и $[\vec{n},\vec{n}]=0$, то $[\vec{a},\vec{b}]=3[\vec{n},\vec{m}]+2[\vec{n},\vec{m}]=5[\vec{n},\vec{m}]$.

$$S_{треуг.}=\frac{1}{2}\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=\frac{1}{2}\left|5[\vec{n},\vec{m}]\right|=\frac{5}{2}\left|[\vec{n},\vec{m}]\right|=\frac{5}{2}\cdot n\cdot m\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{5}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

Пример 20. Найти площадь треугольника ABC, если известны координаты его вершин: A(1, –1, 2), B(–3, 2, –1), C(4, 2, 1).

Решение. Можно считать, что треугольник ABC построен на векторах $\overrightarrow{AB}=(-4,3,-3)$ и $\overrightarrow{AC}=(3,3,-1)$. Вычислим векторное произведение этих векторов: $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix} -4 & 3 & -3 & -4 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(-3+9,-9-4,-12-9)=(6,-13,-21)$.

Теперь найдем площадь треугольника ABC:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-13)^2+(-21)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{36+169+441}=\sqrt{646}.$$

4. Смешанное произведение векторов (в $\mathbf{R}^3$)

1. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, обозначаемое $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ и определяемое формулой:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right).$$

2. Объем параллелепипеда ($V_{пар.}$), построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ определяется формулой: $V_{пар.}=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|.$

3. Объем пирамиды $V_{пир.}$, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$V_{пир.}=\frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|.$$

4. Условие компланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0.$$

Векторы называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости.

Пример 21. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}=(2,-1,3)$, $\vec{b}=(1,4,-2)$ и $\vec{c}=(-3,2,5)$.

Решение. Сначала вычислим векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=(2-12,3+4,8+1)=(-10,7,9).$$

Теперь вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)=(-10)\cdot(-3)+7\cdot2+9\cdot5=30+14+45=89.$$

Пример 22. $A(3, –2, 5)$, $B(1, 3, –2)$, $C(0, 1, 1)$ и $D(–4, 0, –3)$ – вершины пирамиды $ABCD$. Найти ее объем.

Решение. Можно считать, что пирамида $ABCD$ построена на векторах $\overrightarrow{AB}=(-2, 5, -7)$, $\overrightarrow{AC}=(-3, 3, -4)$ и $\overrightarrow{AD}=(-7, 2, -8)$. Вычислим векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -7 & -2 & 5 & -7 \\ -3 & 3 & -4 & -3 & 3 & -4 \end{vmatrix}=(-20+21, 21-8, -6+15)=(1, 13, 9),$$

а затем смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left([\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}], \overrightarrow{AD}\right)=1\cdot(-7)+13\cdot 2+9\cdot(-8)=-7+26-72=-53.$$

Теперь найдем объем пирамиды $ABCD$:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot|-53|=\frac{53}{6}=8\frac{5}{6}.$$

Пример 23. Лежат ли точки $A(3, –1, 2)$, $B(–2, 2, 5)$, $C(1, 4, 2)$ и $D(0, 1, –2)$ в одной плоскости?

Решение. Если точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, то векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ – компланарны. В этом случае смешанное произведение векторов должно быть равным нулю. Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}=(-5, 3, 3)$, $\overrightarrow{AC}=(-2, 5, 0)$ и $\overrightarrow{AD}=(-3, 2, -4)$:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix} -5 & 3 & 3 & -5 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & 0 & -2 & 5 & 0 \end{vmatrix}=(-15, -6, -19),$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(-15, -6, -19)\cdot(-3, 2, -4)=45-12+76=109\neq 0.$$

Следовательно, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ не компланарны и, значит, точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.

ЗАДАНИЯ

1.1. Найти вектор $k\vec{a}$:

а) $k = 2$, $\vec{a} = (2, –1, 3, 0, 4)$;	г) $k = 0{,}5$, $\vec{a} = (2, 3, 4, 0, –1)$;
б) $k = –3$, $\vec{a} = (–3, 0, 2, –1, 5)$;	д) $k = 2{,}5$, $\vec{a} = (1{,}5; 2{,}3; –0{,}4; –1{,}2)$;
в) $k = –1{,}5$, $\vec{a} = (4, 1, 0, –2, 3)$;	е) $k = –1{,}3$, $\vec{a} = (2{,}1; –1{,}2; –0{,}3; 3{,}4)$.

1.2. Найти вектор $\vec{c} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$:

а) $k_1 = 2$, $k_2 = -3$, $\vec{a} = (-1, 2, 0, 3, 5)$, $\vec{b} = (2, -1, -2, 4, -3)$;

б) $k_1 = -1$, $k_2 = 2$, $\vec{a} = (5, -1, 2, -4, 3)$, $\vec{b} = (2, 0, 3, -2, 5)$;

в) $k_1 = -1{,}5$, $k_2 = 2{,}3$, $\vec{a} = (2, 0, -1, -2, 4)$, $\vec{b} = (1, -2, 0, 3, -4)$;

г) $k_1 = 0{,}3$, $k_2 = -2{,}2$, $\vec{a} = (3{,}1; -1{,}2; 0; 2{,}5)$, $\vec{b} = (0{,}4; -1{,}2; -0{,}5; 3{,}1)$.

1.3. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

а) $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-2, -4, 6)$;

б) $\vec{a} = (2, 0, -1)$, $\vec{b} = (-4, 0, 2)$;

в) $\vec{a} = (0, 2, -1, 3)$, $\vec{b} = (0, -6, 3, -9)$;

г) $\vec{a} = (1, -2, 3, 2)$, $\vec{b} = (4, -8, 12, 8)$.

1.4. При каких значениях y и z векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ будут коллинеарными?

а) $A(1, 3, 2)$, $B(2, 1, -1)$, $C(3, 2, -2)$, $D(-1, y, z)$;

б) $A(2, y, z)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(1, -2, 1)$, $D(0, 2, -1)$;

в) $A(-1, 2, z)$, $B(1, y, 1)$, $C(0, 2, 3)$, $D(5, -2, 1)$;

г) $A(4, 3, 1)$, $B(0, 0, 2)$, $C(3, y, 2)$, $D(-1, 2, z)$.

1.5. Зная координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$, найти координаты его четвертой вершины:

а) $A(2, -1, 3)$, $B(0, 2, 5)$, $C(3, 1, 2)$;

б) $B(-1, -2, 1)$, $C(4, 1, -2)$, $D(5, 4, 2)$;

в) $A(3, 1, 1)$, $C(2, 3, -4)$, $D(-1, 1, 5)$;

г) $A(4, 2, 0)$, $B(3, 0, -4)$, $D(2, -2, 1)$.

1.6. Найти координаты середин сторон треугольника ABC:

а) $A(2, 1, 1)$, $B(0, 3, 5)$, $C(4, -1, 3)$;

б) $A(1, 2, 3)$, $B(7, 4, -1)$, $C(3, -8, 5)$.

1.7. На отрезке AB найти точку C, делящую отрезок AB в отношении $\frac{AC}{CB} = \lambda$:

а) $A(2, -1, 0)$, $B(5, 2, 3)$, $\lambda = \frac{1}{2}$; б) $A(1, 2, -3)$, $B(6, 7, 2)$, $\lambda = \frac{3}{2}$.

1.8. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы:

а) $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 0)$, $\vec{c} = (0, 0, 1)$;

б) $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$;

в) $\vec{a} = (1, 0, -1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 0, 2)$, $\vec{c} = (1, 2, 3, 4)$;

г) $\vec{a} = (2, -2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 0, 2, 0)$, $\vec{c} = (0, 2, -2, 0)$.

1.9. Вычислить скалярные произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = (2, -5, 4)$, $\vec{b} = (3, 1, 5)$;

б) $\vec{a} = (0, 2, -3)$, $\vec{b} = (-1, 2, -2)$;

в) $\vec{a} = (-1, 2, 1, 0)$, $\vec{b} = (2, 3, -1, 4)$;

г) $\vec{a} = (3, -1, 4, 3)$, $\vec{b} = (-1, 3, -3, 2)$;

д) $\vec{a} = (2, 0, -1, 3, 5)$, $\vec{b} = (1, 5, 4, 2, 3)$;

е) $\vec{a} = (1, 2, 0, 3, -1)$, $\vec{b} = (0, 2, 1, -2, 3)$.

1.10. Вычислить скалярные произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, $m = 1$, $n = 2$, $\widehat{\vec{m}\,\vec{n}} = \frac{\pi}{3}$;

б) $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, $m = \sqrt{2}$, $n = 1$, $\widehat{\vec{m}\,\vec{n}} = \frac{\pi}{4}$;

в) $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, $\vec{b} = 5\vec{m} + 3\vec{n}$, $m = 2$, $n = \sqrt{3}$, $\widehat{\vec{m}\,\vec{n}} = \dfrac{\pi}{6}$;

г) $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + \vec{n}$, $m = 1$, $n = 3$, $\widehat{\vec{m}\,\vec{n}} = \dfrac{2\pi}{3}$.

1.11. Есть ли среди векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ и $\vec{a}_4$ ортогональные?

а) $\vec{a}_1 = (2, –1, 3, 0)$, $\vec{a}_2 = (–1, 1, –1, –2)$, $\vec{a}_3 = (1, –1, –1, 3)$,

$\vec{a}_4 = (2, 1, 1, 0)$;

б) $\vec{a}_1 = (2, 2, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, –1, 2, 1)$, $\vec{a}_3 = (0, 1, –1, 1)$,

$\vec{a}_4 = (2, –1, –2, 3)$;

в) $\vec{a}_1 = (2, 2, 1, 0, 3, –1)$, $\vec{a}_2 = (–1, 0, 2, 1, –1, 2)$,

$\vec{a}_3 = (2, 3, 1, 2, 2, –4)$, $\vec{a}_4 = (3, 2, –1, 1, 0, 2)$.

1.12. Найти длины векторов:

а) $\vec{a} = (–4, 2, –2, 1)$;

б) $\vec{a} = (4, 3, –3, 1)$;

в) $\vec{a} = (3, –1, 1, –1, 2)$;

г) $\vec{a} = (–1, 1, 2, –3, 3, –6)$;

д) $\vec{a} = (–1, 3, –1, –3, 0, 3, 5)$.

1.13. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = (0, 1, –1, 0, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 3, 1, 1, 2, 0)$;

б) $\vec{a} = (3, 2, 1, 1, 1, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, –1, 1, 0, –1)$.

1.14. Найти длины сторон и угол A треугольника ABC:

а) $A(3, 1, 2)$, $B(5, –1, 3)$, $C(3, 0, 3)$;

б) $A(–1, 2, –2)$, $B(1, 2, 0)$, $C(–1, 1, –1)$;

в) $A(2, 2, –1)$, $B(2, 5, –1)$, $C(6, 2, –1)$;

г) $A(0, 1, 2)$, $B(2, –1, 3)$, $C(0, 2, 1)$.

1.15. На оси 0*z* найти точку, равноудаленную от точек *A* и *B*:

а) *A*(1, –2, 1), *B*(2, 1, 5); б) *A*(3, –1, 4), *B*(1, 3, –2).

1.16. Вычислить векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a}$ = (1, 2, 3), $\vec{b}$ = (–2, 1, 4); б) $\vec{a}$ = (2, –3, 1), $\vec{b}$ = (0, 2, –3);

в) $\vec{a}$ = (1, –1, 2), $\vec{b}$ = (–3, 3, –6); г) $\vec{a}$ = (2, 0, –3), $\vec{b}$ = (–4, 0, 6).

1.17. Вычислить векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$; б) $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 5\vec{n}$;

в) $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$; г) $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$.

1.18. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a}$ = (1, 2, –4), $\vec{b}$ = (3, 0, 1); б) $\vec{a}$ = (1, –3, 1), $\vec{b}$ = (2, –1, 3);

в) $\vec{a}$ = (2, –3, 5), $\vec{b}$ = (1, –1, 3); г) $\vec{a}$ = (3, –1, 5), $\vec{b}$ = (2, –1, 3).

1.19. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, $m = 1$, $n = 1$, $\widehat{\vec{m}\,\vec{n}} = \dfrac{\pi}{6}$;

б) $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$, $m = 1$, $n = 2$, $\widehat{\vec{m}\,\vec{n}} = \dfrac{\pi}{4}$;

в) $\vec{a} = 5\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $m = 2$, $n = 1$, $\widehat{\vec{m}\,\vec{n}} = \dfrac{\pi}{3}$;

г) $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $m = 3$, $n = 2$, $\widehat{\vec{m}\,\vec{n}} = \dfrac{\pi}{6}$.

1.20. Найти площадь треугольника *ABC*, зная координаты его вершин:

а) *A*(3, 4, –1), *B*(–1, 1, 2), *C*(2, 0, –5);

б) $A(-1, 2, 3)$, $B(2, 1, 5)$, $C(-7, 3, 4)$;

в) $A(-1, 0, -1)$, $B(0, 2, -3)$, $C(4, 4, 1)$;

г) $A(-3, 5, -4)$, $B(2, 0, 3)$, $C(3, 4, -1)$.

1.21. Найти объем пирамиды, зная координаты ее вершин:

а) $A(3, -1, 2)$, $B(2, 2, 0)$, $C(-2, 3, 4)$, $D(1, 1, 8)$;

б) $A(4, 5, 2)$, $B(3, 0, 1)$, $C(-1, 4, 2)$, $D(5, 7, 8)$;

в) $A(1, 3, 5)$, $B(0, 2, 0)$, $C(5, 7, 9)$, $D(0, 4, 6)$;

г) $A(3, 1, -2)$, $B(-4, 0, 3)$, $C(1, 5, -1)$, $D(1, -1, 1)$.

1.22. Компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

а) $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (3, 4, 2)$, $\vec{c} = (1, 2, 3)$;

б) $\vec{a} = (4, -2, 6)$, $\vec{b} = (1, 4, 2)$, $\vec{c} = (1, 4, 2)$;

в) $\vec{a} = (1, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$, $\vec{c} = (4, 1, 2)$;

г) $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 3, 1)$, $\vec{c} = (3, 1, -1)$.

1.23. При каком значении x векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будут компланарными:

а) $\vec{a} = (x, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, -5, 4)$, $\vec{c} = (3, 2, -3)$;

б) $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (3, x, 0)$, $\vec{c} = (1, -1, 2)$;

в) $\vec{a} = (0, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, $\vec{c} = (2, x, 3)$.

1.24. Лежат ли точки A, B, C и D в одной плоскости?

а) $A(1, 1, 2)$, $B(3, -2, 4)$, $C(-5, 2, 4)$, $D(3, 3, -1)$;

б) $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$, $D(2, 0, 1)$;

в) $A(2, 7, -3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(-3, -4, 5)$, $D(-2, 3, -4)$.

1.25. При каком значении α точки A, B, C и D лежат в одной плоскости?

а) $A(\alpha, 1, -2)$, $B(-3, 4, 1)$, $C(1, 5, 2)$, $D(2, 2, -5)$;

б) $A(-1, 1, 2)$, $B(1, \alpha, -1)$, $C(0, 3, 1)$, $D(2, 4, -2)$;

в) $A(2, 1, 3)$, $B(5, 3, 2)$, $C(6, 0, \alpha)$, $D(3, -2, 0)$;

г) $A(-1, 2, 3)$, $B(3, 1, 2)$, $C(1, 5, -2)$, $D(2, \alpha, 0)$.

II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Аналитическая геометрия на плоскости

1. Уравнения линии.

1) $y = f(x)$ – уравнение линии в явном виде (форме).

2) $g(x, y) = 0$ – уравнение линии в неявном виде (форме).

3) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ – уравнение линии в параметрическом виде (форме).

4) Координаты точек пересечения линий $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ находятся из уравнений $f_1(x) = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$.

5) Координаты точек пересечения линий $g_1(x, y) = 0$ и $g_2(x, y) = 0$ находятся как решения системы уравнений $\begin{cases} g_1(x, y) = 0, \\ g_2(x, y) = 0. \end{cases}$

Если эта система уравнений не имеет вещественных решений – линии не пересекаются.

2. Прямая.

1) $ax + by + c = 0$ – общее уравнение прямой.

2) Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

a) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, если $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$;

b) $x = x_1$, если $x_1 = x_2$;

c) $y = y_1$, если $y_1 = y_2$.

3) $y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом k ($k = \operatorname{tg}\varphi$, где φ – угол наклона прямой к оси $0x$).

4) $y - y_0 = k_0(x - x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_0, y_0)$ в данном направлении $k_0 = \operatorname{tg}\varphi_0$.

5) $y - y_0 = k(x - x_0)$ – уравнение пучка прямых с центром в точке $A(x_0, y_0)$, k – любое.

6) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \rho = 0$ – нормальное уравнение прямой (ρ – расстояние от начала координат до прямой, α – угол, образованный перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую, и положительным направлением оси $0x$).

7) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ – уравнение прямой в отрезках на осях (|a| и |b| длины отрезков, отсекаемых прямой на осях $0x$ и $0y$, соответственно).

8) $|x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - \rho| = d(A)$ – расстояние точки $A(x_0,\ y_0)$ от прямой $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \rho = 0$.

9) $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = d(A)$ – расстояние точки $A(x_0,\ y_0)$ от прямой $ax + by + c = 0$.

10) Тангенс угла θ между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ определяется равенством: $\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

11) $k_1 = k_2$ – условие параллельности прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$.

12) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ – условие параллельности прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

13) $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ – условие перпендикулярности прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

14) $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ – условие перпендикулярности прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

15) $ax+by+c \geq 0$, $ax+by+c \leq 0$ – полуплоскости, порожденные прямой $ax+by+c=0$ (полуплоскости, на которые прямая $ax+by+c=0$ делит (разбивает) координатную плоскость $x0y$).

3. Кривые второго порядка.

1) $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ – уравнение окружности радиуса r с центром в точке $C(a, b)$.

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – каноническое уравнение эллипса (a и b – полуоси эллипса).

3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – каноническое уравнение гиперболы (a и b – полуоси гиперболы).

4) $y=\pm\frac{b}{a}x$ – асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

5) $y^2=2px$ – каноническое уравнение параболы, ось которой совпадает с осью $0x$ (p – параметр параболы).

6) $x^2=2py$ – каноническое уравнение параболы, ось которой совпадает с осью $0y$.

Пример 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

а) $A(1, –1)$, $B(–1, 2)$, б) $A(2, 2)$, $B(2, –3)$, в) $A(2, 3)$, $B(–1, 3)$.

Решение. а) Так как $x_1=1\neq x_2=-1$ и $y_1=-1\neq y_2=2$ то уравнение искомой прямой:

$$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y+1}{2+1}\Rightarrow\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}\Rightarrow 3(x-1)=-2(y+1)\Rightarrow 3x+2y-1=0.$$

б) В этом случае $x_1=x_2=2$. Следовательно, уравнение искомой прямой: $x-2=0$.

в) Здесь $y_1=y_2=3$. Значит, $y-3=0$ – уравнение искомой прямой.

Пример 2. Найти точку пересечения прямых $3x – y – 1 = 0$ и $x + 3y – 7 = 0$.

Решение. Для нахождения координат точки пересечения данных прямых необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases}3x-y-1=0,\\x+3y-7=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3x-1,\\x+3y-7=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3x-1,\\x+3(3x-1)-7=0;\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=3x-1,\\10x-10=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2,\\x=1.\end{cases}$$ Точка пересечения прямых $A(1, 2)$.

Пример 3. Есть ли среди прямых: $3x-5y+2=0$, $5x-3y+1=0$, $3x + 5y – 1 = 0$, $x+2y-3=0$, $2x+y+3=0$, $2x+4y-5=0$ параллельные и перпендикулярные?

Решение. Найдем угловые коэффициенты данных прямых:

$$k_1 = \frac{3}{5},\ k_2 = \frac{5}{3},\ k_3 = -\frac{3}{5}, k_4 = -\frac{1}{2}, k_5 = -2, k_6 = -\frac{1}{2}.$$

Так как $k_4 = k_6 = -\frac{1}{2}$, то прямые: $x + 2y – 3 = 0$ и $2x + 4y - 5 = 0$ параллельные. Принимая во внимание, что $k_2 = \frac{-1}{k_3} = \frac{5}{3}$, заключаем, что прямые: $5x - 3y + 1 = 0$ и $3x + 5y – 1 = 0$ – перпендикулярные.

Пример 4. Найти угол между прямыми: $x – 2y – 4 = 0$ и $3x – y + 5 = 0$.

Решение. Найдем тангенс угла θ между этими прямыми, приняв во внимание, что $k_1 = \frac{1}{2},\ k_2 = 3$:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1.$$ Следовательно, $\theta = \mathrm{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Пример 5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, –3)$ параллельно прямой $3x + 4y - 5 = 0$.

Решение. Угловой коэффициент заданной прямой: $k = -\frac{3}{4}$. Из условия параллельности прямых следует, что угловой коэффициент искомой прямой $k_0 = -\frac{3}{4}$. Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, приняв во внимание, что $x_0 = 2,\ y_0 = -3,\ k_0 = -\frac{3}{4}$, получаем:

$$y + 3 = -\frac{3}{4}(x - 2) \Rightarrow 4(y + 3) = -3(x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y + 12 = -3x + 6 \Rightarrow 3x + 4y + 6 = 0.$$

Уравнение искомой прямой: $3x + 4y + 6 = 0$.

Пример 6. $A(3, –1)$, $B(2, 1)$, $C(0, –4)$ – вершины треугольника ABC. Написать уравнение высоты BD.

Решение. Высота BD перпендикулярна стороне AC, поэтому $k_{BD} = \frac{-1}{k_{AC}}$,

(k_{BD} и k_{AC} – угловые коэффициенты прямых *BD* и *AC*, соответственно). Используя уравнение прямой, проходящей через две точки, напишем уравнение стороны *AC*:

$$\frac{x-3}{0-3}=\frac{y+1}{-4+1} \;\Rightarrow\; \frac{x-3}{-3}=\frac{y+3}{-3} \;\Rightarrow\; x-3=y+1 \;\Rightarrow\; y=x-4.$$

Следовательно, $k_{AC}=1$ и $k_{BD}=\dfrac{-1}{k_{AC}}=-1$.

Для написания уравнения высоты *BD* воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, приняв во внимание, что $x_0=2$, $y_0=1$, $k_0=-1$:

$$y-1=-1(x-2) \;\Rightarrow\; x+y-3=0.$$

Уравнение высоты *BD*: $x+y-3=0$.

<u>Пример 7.</u> Найти расстояние точки *A*(2, 1) от прямой $3x+4y-15=0$.

<u>Решение.</u> Используя формулу $d(A)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ для нахождения расстояния *d*(*A*) точки $A(x_0, y_0)$ от прямой $ax+by+c=0$ получаем:

$$d(A)=\frac{|3\cdot 2+4\cdot 1-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{25}}=\frac{5}{5}=1.$$

<u>Пример 8.</u> Найти расстояние точки *A*(– 4, – 2) от прямой, проходящей через точки *B*(– 2, – 6) и *C*(1, – 2).

<u>Решение.</u> Напишем уравнение прямой, проходящей через точки *B* и *C*:

$$\frac{x+2}{1+2}=\frac{y+6}{-2+6} \;\Rightarrow\; \frac{x+2}{3}=\frac{y+6}{4} \;\Rightarrow\; 4x+8=3y+18 \;\Rightarrow\; 4x-3y-10=0.$$

Теперь найдем расстояние точки А от этой прямой:

$$d(A)=\frac{|4\cdot(-4)-3\cdot(-2)-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-16+6-10|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|-20|}{\sqrt{25}}=\frac{20}{5}=4.$$

Пример 9. Построить полуплоскость $2x + 3y - 6 \le 0$.

Решение. Прямая $2x + 3y - 6 = 0$ пересекает оси координат в точках $A(3, 0)$ и $B(0, 2)$ $\left(\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}\right)$. Построим эту прямую (рис. 1). Прямая разбила координатную плоскость $x0y$ на две полуплоскости. Для того чтобы определить, точки какой из полученных полуплоскостей удовлетворяют условию $2x + 3y - 6 \le 0$, возьмем «пробную» точку $O(0, 0)$ (в качестве такой точки можно брать любую точку не лежащую на прямой. Удобнее всего брать начало координат $O(0, 0)$). Подставляя координаты «пробной» точки $O(0, 0)$ в левую часть неравенства, получаем: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$.

Следовательно, начало координат $O(0, 0)$ принадлежит заданной полуплоскости. Значит, полуплоскостью

$$2x + 3y - 6 \le 0$$

является нижняя полуплоскость (на рис. 1 полуплоскость обозначена штриховкой).

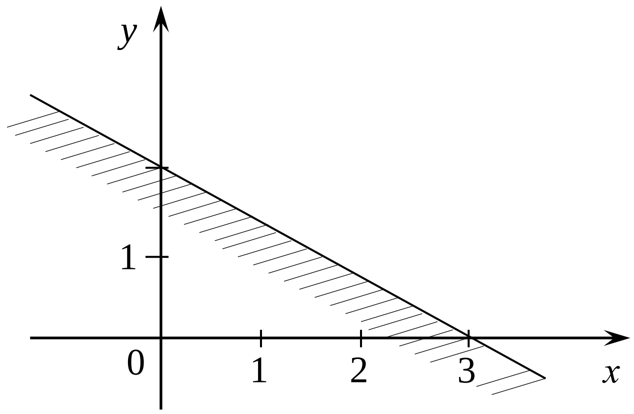


Рис. 1

Пример 10. Построить множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям: $\begin{cases} 2x + 3y - 6 \ge 0, \\ 5x + 4y - 20 \le 0, \\ 2x - y + 2 \ge 0. \end{cases}$

Решение. Так как каждое неравенство определяет полуплоскость, то множество точек, координаты которых удовлетворяют одновременно всем неравенствам, является пересечением этих плоскостей. Строим прямые (1): $2x + 3y - 6 = 0$, (2): $5x + 4y - 20 = 0$ и (3): $2x - y + 2 = 0$ и стрелкой указываем, какая именно полуплоскость определяется соответствующим неравенством.

Пересечение плоскостей на рис. 2 обозначено штриховкой.

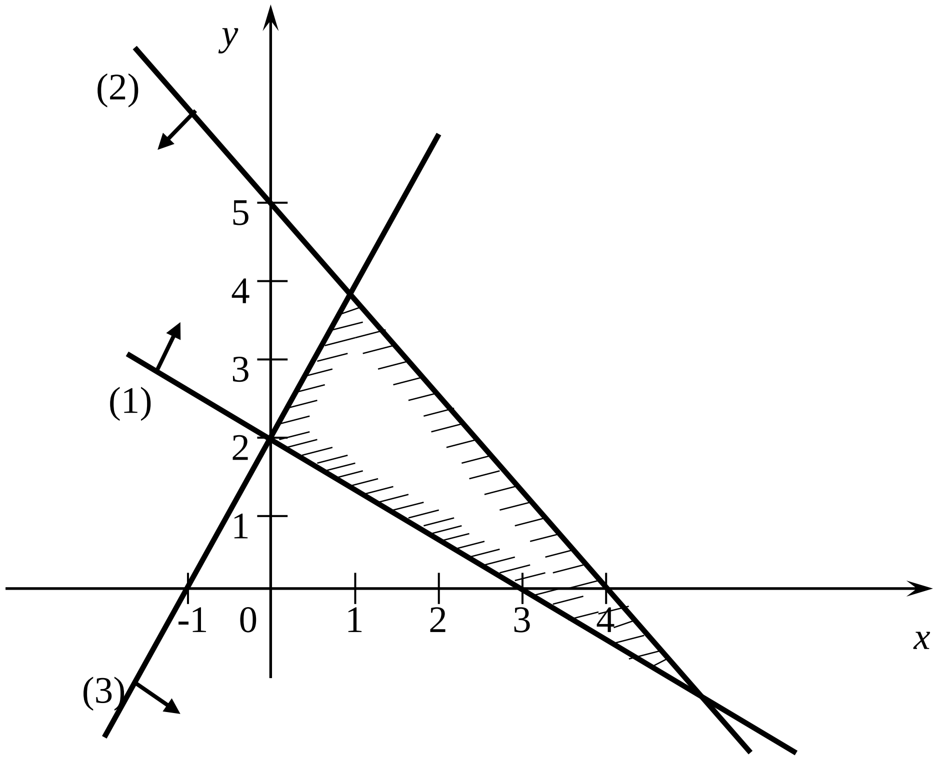


Рис. 2

<u>Пример 11.</u> Написать уравнение окружности, диаметром которой является отрезок АВ, если $A(-1, 1)$, $B(5, -7)$.

<u>Решение.</u> Пусть точка $C(x, y)$ – центр окружности. Так как AB является диаметром окружности, то точка C (центр окружности) делит отрезок AB пополам. Поэтому координаты точки $C(x, y)$ будут следующими: $x = \frac{-1+5}{2} = 2$, $y = \frac{1-7}{2} = -3$, т. е. $C(2, -3)$. Отрезок AC является радиусом искомой окружности. Поэтому

$$r = AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

Следовательно, уравнение искомой окружности:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25.$$

ЗАДАНИЯ

2.1. Написать уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

а) $A(1, -1)$, $B(2, -2)$; б) $A(3, 0)$, $B(0, 3)$; в) $A(-1, 2)$, $B(-3, -4)$;

г) $A(5, -1)$, $B(-2, 4)$; д) $A(1, 3)$, $B(1, 5)$; е) $A(2, -4)$, $B(5, -4)$.

2.2. Найти координаты точек пересечения прямых:

а) $3x - 2y - 6 = 0$, $x - 5y + 11 = 0$; б) $2x + 3y - 8 = 0$, $4x - y - 2 = 0$;

в) $3x - 2y - 1 = 0$, $x + 3y - 4 = 0$; г) $x + 2y + 3 = 0$, $3x + 4y - 12 = 0$.

2.3. Найти координаты вершин треугольника ABC, зная уравнения его сторон:

а) AB: $x + 2y - 5 = 0$, BC: $2x + y - 4 = 0$, AC: $8x + 7y - 4 = 0$;

б) AB: $3x - y - 3 = 0$, BC: $x - y - 1 = 0$, AC: $x + y - 5 = 0$;

в) AB: $3x + 4y - 11 = 0$, BC: $x + 7y + 2 = 0$, AC: $5x + y + 10 = 0$;

г) AB: $2x - 3y + 5 = 0$, BC: $x + y - 10 = 0$, AC: $2x + 7y - 25 = 0$.

2.4. Есть ли среди данных прямых параллельные или перпендикулярные?

а) $2x + 3y - 1 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$, $3x + 2y + 4 = 0$, $4x + 6y + 5 = 0$;

б) $3x + 4y + 5 = 0$, $4x + 3y - 2 = 0$, $4x - 3y + 2 = 0$, $x + 0{,}75y + 1 = 0$;

в) $x - 2y + 3 = 0$, $3x + 6y - 7 = 0$, $3x - 6y + 5 = 0$, $2x + y - 1 = 0$;

г) $2x - y + 5 = 0$, $x - 0{,}5y + 2 = 0$, $2x + 4y - 5 = 0$, $4x - 2y - 3 = 0$.

2.5. Построить прямые:

а) $2x + 3y - 6 = 0$; б) $3x - 2y - 6 = 0$; в) $x - 2y + 5 = 0$;

г) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{5} = 1$; д) $2x + 4 = 0$; е) $3y + 4 = 0$.

2.6. Найти угол между прямыми:

а) $2x - y + 3 = 0$, $2x + y - 3 = 0$; б) $2x - y - 5 = 0$, $y = \dfrac{1}{3}x$;

в) $x - 3y - 6 = 0$, $4x + 3y - 24 = 0$; г) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - 2 = 0$, $\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} + 1 = 0$.

2.7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$ параллельно данной прямой:

а) $A(1, -2)$, $2x + 3y - 2 = 0$; б) $A(5, 1)$, $4x - 5y + 3 = 0$;

в) $A(-2, 3)$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + 1 = 0$; г) $A(4, -2)$, $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} - 2 = 0$.

2.8. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$ перпендикулярно данной прямой:

а) $A(2, 1)$, $x + 2y - 1 = 0$; б) $A(3, -5)$, $3x - y + 2 = 0$;

в) $A(-1, 1)$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + 4 = 0$; г) $A(-2, -1)$, $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} - 1 = 0$.

2.9. Написать уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых (1) и (2) параллельно и перпендикулярно прямой (3):

а) (1): $2x + y - 3 = 0$, (2): $x - 2y + 1 = 0$, (3): $x + y + 5 = 0$;

б) (1): $x - y + 2 = 0$, (2): $x + 3y - 2 = 0$, (3): $2x + y - 1 = 0$;

в) (1): $3x + 4y + 1 = 0$, (2): $x - 3y - 4 = 0$, (3): $2x + 3y - 5 = 0$;

г) (1): $2x - y - 4 = 0$, (2): $x - y - 3 = 0$, (3): $3x - 4y + 2 = 0$.

2.10. В треугольнике ABC известны координаты вершин A, B, C. Написать уравнение высоты AD, опущенной из вершины A на сторону BC:

а) $A(3, -5)$, $B(-2, 1)$, $C(4, 3)$; б) $A(-2, -1)$, $B(-1, 2)$, $C(1, 4)$;

в) $A(2, 3)$, $B(6, -4)$, $C(-2, 1)$; г) $A(-1, 5)$, $B(5, 4)$, $C(3, -2)$.

2.11. Используя данные задачи 2.10., написать уравнение медианы AE треугольника ABC. (Вначале найти координаты точки E).

2.12. Написать уравнение касательной к окружности $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 8$ в точке $A(3, -2)$.

2.13. Найти расстояние точки A от заданной прямой:

а) $A(1, -2)$; $3x + 4y - 15 = 0$; б) $A(4, -3)$; $4x - 3y + 25 = 0$;

в) $A(-2, 1)$; $2x + 5y - 1 = 0$; г) $A(2, 3)$; $8x - 6y + 10 = 0$;

д) $A(-3, 2)$; $x - 2y + 7 = 0$; е) $A(-1, 2)$; $9x + 12y - 35 = 0$.

2.14. Найти расстояние точки C от прямой, проходящей через точки A и B:

а) $A(1, 5)$, $B(–3, 2)$, $C(–1, –3)$; б) $A(–2, 1)$, $B(4, 9)$, $C(1, –2)$;

в) $A(3, –2)$, $B(0, 2)$, $C(–5, 1)$; г) $A(2, 2)$, $B(–2, –2)$, $C(–5, 4)$.

2.15. Найти длины высот параллелограмма $ABCD$, зная уравнения его сторон:

а) AB: $3x + 4y – 11 = 0$, BC: $4x + 3y – 10 = 0$,
CD: $3x + 4y + 14 = 0$, AD: $8x + 6y – 25 = 0$;

б) AB: $8x – 6y + 2 = 0$, BC: $3x + 4y – 18 = 0$,
CD: $4x – 3y + 11 = 0$, AD: $6x + 8y – 6 = 0$.

2.16. Построить множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $2x-5y+10\ge 0$; б) $3x-2y+12\ge 0$; в) $3x+4y-12\le 0$;

г) $2x-3y-6\le 0$; д) $2x+3y\ge 0$; е) $5x-2y\le 0$.

2.17. Построить множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $\begin{cases} 2x-y+4\ge 0, \\ 3x+2y-6\le 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+4\le 0, \\ 2x-3y-6\ge 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+3y+6\ge 0, \\ 3x-y-3\le 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} -5x+3y-15\ge 0, \\ 3x+5y-15\ge 0, \\ y\le 6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x-2y+4\le 0, \\ 2x+y-4\ge 0, \\ x-y-4\le 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x+y-3\le 0, \\ 3x+2y-6\ge 0, \\ 2x-y-4\le 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x-2y+4\ge 0, \\ x+y-4\le 0, \\ 4x+3y-24\le 0, \\ x\ge 0, \quad y\ge 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x-2y+4\ge 0, \\ x+y-5\le 0, \\ x-y-3\le 0, \\ x\ge 0, \quad y\ge 0; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x-y+3\ge 0, \\ x-4y+20\ge 0, \\ 5x-4y-20\ge 0, \\ x\ge 0, \quad y\ge 0. \end{cases}$

2. Аналитическая геометрия в пространстве

1. Уравнения поверхности и линии.

1) $z = f(x, y)$ – уравнение поверхности в явном виде (форме).

2) $g(x, y, z) = 0$ – уравнение поверхности в неявном виде (форме).

3) $\begin{cases} g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ – уравнение линии, образованной пересечением поверхностей $g_1(x, y, z) = 0$ и $g_2(x, y, z) = 0$.

4) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ – параметрические уравнения линии.

2. Плоскость.

1) $ax + by + cz + d = 0$ – общее уравнение плоскости, $\vec{n}=(a,b,c)$ – вектор нормали к плоскости.

2) $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n}=(a,b,c)$ – вектор нормали.

3) Углом между плоскостями $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ и $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$ называется угол φ, образованный векторами нормалей $\vec{n}_1=(a_1,b_1,c_1)$ и $\vec{n}_2=(a_2,b_2,c_2)$ к этим плоскостям:

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{n_1\cdot n_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

4) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ – условие параллельности плоскостей $a_1x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

5) $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ – условие перпендикулярности плоскостей $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Это условие может быть записано в более компактном виде: $(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=0$, где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ векторы нормалей к соответствующим плоскостям.

6) Расстояние точки $A(x_0, y_0, z_0)$ от плоскости $ax + by + cz + d = 0$:

$$d(A)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Пример 12. Есть ли среди плоскостей (1): $x + 2y - 3z + 4 = 0$, (2): $2x - 3y + z - 5 = 0$, (3): $2x + 4y - 6z + 1 = 0$, (4): $x + y + z - 3 = 0$ – параллельные и перпендикулярные?

Решение. Легко видеть, что условия параллельности выполняются только для (1) и (3) плоскостей: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6}$. Следовательно, плоскости (1) и (3) – параллельные.

Проверим наличие перпендикулярных плоскостей. Приняв во внимание, что: $\vec{n}_1 = (1, 2, -3)$, $\vec{n}_2 = (2, -3, 1)$, $\vec{n}_3 = (2, 4, -6)$, $\vec{n}_4 = (1, 1, 1)$ и

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot 1 = 2 - 6 - 3 = -7 \neq 0,$$

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_3) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-6) = 2 + 8 + 18 = 28 \neq 0,$$

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_4) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = 1 + 2 - 3 = 0,$$

$$(\vec{n}_2, \vec{n}_3) = 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot (-6) = 4 - 12 - 6 = -14 \neq 0,$$

$$(\vec{n}_2, \vec{n}_4) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 - 3 + 1 = 0,$$

$$(\vec{n}_3, \vec{n}_4) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + (-6) \cdot 1 = 2 + 4 - 6 = 0,$$

заключаем, что перпендикулярными будут плоскости: (1) и (4); (2) и (4); (3) и (4).

Пример 13. Найти угол между плоскостями $x + 2y - 2z + 5 = 0$ и $x + y - 9 = 0$.

Решение. Так как $\vec{n}_1 = (1, 2, -2)$, $\vec{n}_2 = (1, 1, 0)$, $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1 + 2 = 3$,

$$n_1 = \sqrt{1 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3, \quad n_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

то $\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{n_1 \cdot n_2} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Следовательно, угол между плоскостями $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Пример 14. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1, 3, 5)$ параллельно плоскости $3x + 2y - z - 5 = 0$.

Решение. Вектор нормали заданной плоскости $\vec{n} = (3, 2, -1)$, очевидно, будет вектором нормали и искомой плоскости. Поэтому, используя уравнение плоскости, проходящей через данную точку, получаем:

$$3(x + 1) + 2(y - 3) - 1(z - 5) = 0 \;\Rightarrow\; 3x + 3 + 2y - 6 - z + 5 = 0 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $3x + 2y - z + 2 = 0$ – уравнение искомой плоскости.

Пример 15. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, -1, 3)$, $B(4, 1, -2)$ и $C(0, 4, 1)$.

Решение. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB} = (4-2, 1-(-1), -2-3) = = (2, 2, -5)$ и $\overrightarrow{AC} = (0-2, 4-(-1), 1-3) = (-2, 5, -2)$. Очевидно, эти векторы лежат в искомой плоскости. Так как вектор $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, то он перпендикулярен и искомой плоскости, и, следовательно, является вектором нормали этой плоскости, т. е.

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & -2 & -2 & 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4 + 25, 10 + 4, 10 + 4) = (21, 14, 14).$$

Теперь воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку (т. к. каждая из точек A, B и C принадлежит искомой плоскости, то для написания уравнения можно брать любую из них. Возьмем, например, точку A): $21(x-2) + 14(y+1) + 14(z-3) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3(x-2) + 2(y+1) + 2(z-3) = 0 \Rightarrow 3x - 6 + 2y + 2 + 2z - 6 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3x + 2y + 2z - 10 = 0$ – уравнение искомой плоскости.

Пример 16. Найти расстояние точки $A(1, 3, -4)$ от плоскости $x + 2y - -2z - 21 = 0$.

Решение. Используя формулу расстояния точки от плоскости, получаем:

$$d(A) = \frac{|1\cdot 1 + 2\cdot 3 - 2\cdot(-4) - 21|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 + 6 + 8 - 21|}{\sqrt{9}} = \frac{|-6|}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

3. Прямая.

1) $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$ – общие уравнения прямой.

2) $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ – канонические уравнения прямой, $\vec{s} = (l, m, n)$ – направляющий вектор прямой, $A(x_0, y_0, z_0)$ – точка, через которую проходит прямая.

3) $\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \\ z = nt + z_0, \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой, $\vec{s} = (l, m, n)$ – направляющий вектор прямой, $A(x_0, y_0, z_0)$ – точка, через которую проходит прямая.

4) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.

5) Углом между двумя прямыми называется угол φ, образованный направляющими векторами $\vec{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ и $\vec{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ этих прямых:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{s_1 \cdot s_2} = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

6) $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$ – условие параллельности двух прямых, направляющими векторами которых являются векторы $\vec{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ и $\vec{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$.

7) $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ – условие перпендикулярности двух прямых, направляющие векторы которых $\vec{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ и $\vec{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$.

8) $\vec{s}_1 \vec{s}_2 \overrightarrow{A_1 A_2} = 0$ – условие пересечения прямых ($\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ – направляющие векторы этих прямых, A_1 и A_2 – любые точки, лежащие соответственно на первой и второй прямых).

<u>Пример 17.</u> Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -1, 4)$ параллельно вектору $\vec{s} = (3, 2, -5)$.

<u>Решение.</u> Используя канонические уравнения прямой, получаем $\dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y + 1}{2} = \dfrac{z - 4}{-5}$.

<u>Пример 18.</u> Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A\,(-3, 1, 2)$ параллельно прямой:

а) $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 3}{5} = \dfrac{z - 4}{-3}$; б) $\begin{cases} x = 3t + 2, \\ y = 4t - 1, \\ z = -t + 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0, \\ 3x - y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$

Решение. а) Направляющий вектор заданной прямой $\vec{s}=(2,5,-3)$, очевидно, является направляющим вектором к искомой прямой. Поэтому: $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-2}{-3}$ – искомые уравнения.

б) Направляющий вектор заданной прямой $\vec{s}=(3,4,-1)$. Следовательно, уравнение искомой прямой $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-2}{-1}$.

в) Направляющим вектором искомой прямой будет вектор $\vec{s}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]$, где $\vec{n}_1=(1,2,-1)$ и $\vec{n}_2=(3,-1,2)$ – векторы нормалей к плоскостям $x+2y-z+4=0$ и $3x-y+2z-7=0$, образующим заданную прямую:

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(4-1,-3-2,-1-6)=(3,-5,-7).$$

Поэтому, уравнения искомой прямой следующие: $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z-2}{-7}$.

Пример 19. Написать уравнения прямой, проходящей через точки $A(2, 3, -5)$ и $B(-3, 1, 4)$.

Решение. Используя уравнения прямой, проходящей через две точки получаем:

$$\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-3}{1-3}=\frac{z+5}{4+5} \quad\Rightarrow\quad \frac{x-2}{-5}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+5}{9}.$$

Пример 20. Написать канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} x+2y-3z-5=0, \\ 2x-3y+4z+4=0. \end{cases}$$

Решение. Найдем направляющий вектор данной прямой

$$\vec{s}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=(8-9,-6-4,-3-4)=(-1,-10,-7).$$

Чтобы написать канонические уравнения прямой необходимо еще найти какую-нибудь точку на этой прямой. В качестве такой точки $A(x_0, y_0, z_0)$ возьмем, например ту, у которой $z_0 = 0$, т. е. $A(x_0, y_0, 0)$. Тогда ее координаты x_0 и y_0 обязаны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{cases} x_0+2y_0-5=0, \\ 2x_0-3y_0+4=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=5-2y_0, \\ 2x_0-3y_0+4=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=5-2y_0, \\ 2(5-2y_0)-3y_0+4=0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 5 - 2y_0, \\ 10 - 4y_0 - 3y_0 + 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 5 - 2y_0, \\ -7y_0 = -14. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 2. \end{cases}$$

Следовательно, точка $A(1, 2, 0)$ принадлежит заданной прямой. Теперь напишем канонические уравнения этой прямой:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-10} = \frac{z}{-7} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{10} = \frac{z}{7}.$$

Пример 21. Написать параметрические уравнения прямой

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{4}.$$

Решение. Обозначив каждое из соотношений через t, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} = t, \\ \dfrac{y+5}{3} = t, \\ \dfrac{z-1}{4} = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3 = 2t, \\ y+5 = 3t, \\ z-1 = 4t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t-3, \\ y = 3t-5, \\ z = 4t+1. \end{cases}$$

Пример 22. Найти угол между прямыми: а) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-4}{2}$ и $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-5}{3}$; б) $\begin{cases} 2x - y + z - 5 = 0, \\ 3x + 2y - z + 4 = 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - z + 3 = 0. \end{cases}$

Решение. а) Так как $\vec{s}_1 = (1, -2, 2)$ и $\vec{s}_2 = (4, 0, 3)$, то

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 4 - 2\cdot 0 + 2\cdot 3}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{16+9}} = \frac{4+6}{3\cdot 5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\frac{2}{3}.$$

б) Сначала найдем направляющие векторы заданных прямых:

$$\vec{s}_1 = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \left|\begin{array}{cccccc} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right| = (1-2, 3+2, 4+3) = (-1, 5, 7).$$

$$\vec{s}_2 = [\vec{n}_3, \vec{n}_4] = \left|\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right| = (-2+3, 6+1, -1-4) = (1, 7, -5).$$

Теперь найдем косинус угла между заданными прямыми:

$$\cos\varphi = \frac{-1\cdot 1 + 5\cdot 7 - 7\cdot 5}{\sqrt{1+25+49}\cdot\sqrt{1+49+25}} = \frac{-1+35-35}{\sqrt{75}\cdot\sqrt{75}} = \frac{-1}{75} = 0{,}0133.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos(-0{,}0133) = \pi - \arccos 0{,}0133$.

Пример 23. Есть ли среди прямых $\frac{x+2}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{3}$, $\frac{x-1}{2}=$ $=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-1}$ и $\frac{x+4}{-2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-2}{1}$ пересекающиеся?

Решение. Проверим, пересекаются ли первая и вторая прямые. Так как $\vec{s}_1=(1,-2,3)$, $\vec{s}_2=(2,1,-1)$, $A_1(-2,-3,1)$, $A_2(1,-2,2)$, то: $\overrightarrow{A_1A_2}=(3,1,1)$,

$$[\vec{s}_1,\vec{s}_2]=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-1,7,5) \text{ и } \vec{s}_1\vec{s}_2\overrightarrow{A_1A_2}=-3+7+5=9\neq 0.$$

Следовательно, первая и вторая прямые не пересекаются.

Проверим, пересекаются ли первая и третья прямые. В данном случае $\vec{s}_1=(1,-2,3)$, $\vec{s}_3=(-2,-1,1)$, $A_1(-2,-3,1)$, $A_3(-4,-4,2)$, то $\overrightarrow{A_1A_3}=(-2,-1,1)$,

$$[\vec{s}_1,\vec{s}_3]=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(1,-7,-5), \quad \vec{s}_1\vec{s}_3\overrightarrow{A_1A_3}=-2+7-5=0.$$

Значит, первая и третья прямые пересекаются.

Вторая и третья прямые не пересекаются, так как они параллельные (их направляющие векторы $\vec{s}_2=(2,1,-1)$ и $\vec{s}_3=(-2,-1,1)$ коллинеарны: $\vec{s}_2=-\vec{s}_3$).

4. Прямая и плоскость.

1) Углом между прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью $ax+$ $+by+cz+d=0$ называется угол φ, образованный направляющим вектором прямой $\vec{s}=(l,m,n)$ и его проекцией на плоскости:

$$\sin\varphi=\frac{a\cdot l+b\cdot m+c\cdot n}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

2) $\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$ – условие перпендикулярности прямой и плоскости.

3) $a\cdot l+b\cdot m+c\cdot n=0$ – условие параллельности прямой и плоскости.

Пример 24. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

а) $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -t + 2, \end{cases}$ и $2x + 3y - 4z - 5 = 0$;

б) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ и $x - 2y + 3z - 2 = 0$.

Решение. а) Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости необходимо решить систему уравнений, составленную из уравнений прямой и плоскости: $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -t + 2, \\ 2x + 3y - 4z - 5 = 0. \end{cases}$

Полученная система решается очень просто. Подставляя в уравнение плоскости уравнения прямой, получаем:

$$2(2t+1) + 3(3t-2) - 4(-t+2) - 5 = 0, \quad \Rightarrow \quad 17t - 17 = 0, \quad \Rightarrow \quad t = 1.$$

Следовательно, координаты точки пересечения такие: $x = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $y = 3 \cdot 1 - 2 = 1$, $z = -1 + 2 = 1$, т. е. точкой пересечения данной прямой и плоскости будет точка $A(3, 1, 1)$.

б) Вначале перейдем от канонических к параметрическим уравнениям прямой: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{1} = t, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = t, \\ \dfrac{y+1}{2} = t, \\ \dfrac{z-3}{1} = t, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = 2t - 1, \\ z = t + 3. \end{cases}$

Далее аналогично заданию а):

$$(3t+1) - 2(2t-1) + 3(t+3) - 2 = 0, \quad \Rightarrow \quad 2t + 10 = 0, \quad \Rightarrow \quad t = -5.$$

Следовательно, координаты точки пересечения такие: $x = 3 \cdot (-5) + 1 = -14$, $y = 2 \cdot (-5) - 1 = -11$, $z = -5 + 3 = -2$, т. е. $A(-14, -11, -2)$ – точка пересечения прямой и плоскости.

Пример 25. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(-3, 5, 2)$ на плоскость $2x + 6y - z + 3 = 0$.

Решение. Так как искомая прямая должна быть перпендикулярна плоскости, то вектор нормали плоскости $\vec{n} = (2, 6, -1)$ будет и направляющим вектором этой прямой. Поэтому, $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-5}{6}=\dfrac{z-2}{-1}$ – канонические уравнения искомой прямой.

Пример 26. Найти проекцию точки $A(1,-1,6)$ на плоскости $x+2y-$ – $3z-9=0$.

Решение. Проекцией точки A на плоскости является точка пересечения перпендикуляра, опущенного из точки A на заданную плоскость. Уравнения перпендикуляра (см. пример 25): $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-6}{-3}$. Теперь найдем точку пересечения этого перпендикуляра с заданной плоскостью (см. пример 24б). Переходим к параметрическим уравнениям перпендикуляра:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-6}{-3}=t, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=t+1, \\ y=2t-1, \\ z=-3t+6, \end{cases}$$

и находим координаты точки пересечения перпендикуляра с заданной плоскостью, т. е. координаты проекции точки A на плоскости:

$$(t+1)+2(2t-1)-3(-3t+6)-9=0, \quad \Rightarrow \quad 14t-28=0, \quad \Rightarrow \quad t=2.$$

$$x=2+1=3, \quad y=2\cdot 2-1=3, \quad z=-3\cdot 2+6=0.$$

Следовательно, проекцией точки A на заданной плоскости будет точка $B(3, 3, 0)$.

Пример 27. Найти проекцию точки $A(3,-2,-2)$ на прямой

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-4}{3}.$$

Решение. Легко видеть, что проекцией точки A на прямой будет точка пересечения этой прямой с плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно заданной прямой. Напишем уравнение этой плоскости:

$$2(x-3)-1(y+2)+3(z+2)=0, \quad \Rightarrow \quad 2x-y+3z-2=0.$$

Теперь найдем точку пересечения этой плоскости с заданной прямой:

$$\begin{cases} 2x-y+3z-2=0, \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x-y+3z-2=0, \\ x=2t+1, \\ y=-t-2, \\ z=3t+4, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2(2t+1)-(-t-2)+3(3t+4)-2=0, \quad \Rightarrow \quad 14t+14=0, \quad \Rightarrow \quad t=-1.$$

Значит, $x = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$, $y = -(-1) - 2 = -1$, $z = 3 \cdot (-1) + 4 = 1$, т. е. проекцией точки A на заданной прямой будет точка В(– 1, – 1, 1).

Пример 28. Найти угол между прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{-2}$ и плоскостью $x - y - 4z + 5 = 0$.

Решение. Направляющий вектор прямой $\vec{s} = (2, 1, -2)$, вектор нормали к плоскости $\vec{n} = (1, -1, -4)$. Поэтому

$$\sin\varphi = \frac{1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-4)}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+1+16}} = \frac{2-1+8}{3\sqrt{18}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, угол между прямой и плоскостью $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

ЗАДАНИЯ

2.18. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\vec{n}$:

а) $A(2, -1, 4)$, $\vec{n} = (1, 3, -2)$; б) $A(0, 2, -3)$, $\vec{n} = (3, -2, 1)$;

в) $A(-1, 2, 5)$, $\vec{n} = (2, 0, -1)$; г) $A(0, 5, 0)$, $\vec{n} = (-1, 1, 2)$.

2.19. Есть ли среди плоскостей параллельные и перпендикулярные?

а) $x + y + z - 3 = 0$, $x - 2y + z - 5 = 0$, $x + y + 2z - 1 = 0$,
$2x - 4y + 2z + 3 = 0$;

б) $x + 2y - 3z + 5 = 0$, $2x + 4y + 6z - 3 = 0$, $-3x - 6y + 9z + 1 = 0$,
$x + y + z - 2 = 0$;

в) $2x - y + z - 3 = 0$, $2x + y - 3z + 7 = 0$, $4x + 2y - 6z - 1 = 0$,
$x + 3y + z + 2 = 0$;

г) $x - 3y + 2z - 1 = 0$, $2x - 6y + 4z + 1 = 0$, $x + y + z - 3 = 0$,
$x - y - 2z + 5 = 0$.

2.20. Написать уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости:

а) $A(2, 3, -4)$, $3x - y + z - 1 = 0$; б) $A(-1, 5, -3)$, $x - 2y + 3z + 5 = 0$;

в) $A(3, -2, 6)$, $2x + z - 4 = 0$; г) $A(1, -1, -5)$, $3x + 5 = 0$.

2.21. Найти угол между плоскостями:

а) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $2x - y + 2z + 5 = 0$;

б) $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$, $x + 3y - 2 = 0$;

в) $x + 20y + 7z - 12 = 0$, $x - 4y - 8z + 12 = 0$;

г) $4x - 8y + z - 1 = 0$, $6x + 2y - z + 4 = 0$.

2.22. Найти расстояние точки от плоскости:

а) $A(1, 2, -2)$, $2x - 2y + z - 9 = 0$; б) $A(2, -1, 3)$, $3x - 4y + 5 = 0$;

в) $A(1, 3, -1)$, $11x + 2y - 10z - 15 = 0$; г) $A(3, 4, -2)$, $4x + 3 = 0$.

2.23. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки A, B и C:

а) $A(1, 3, -2)$, $B(3, -1, 4)$, $C(0, 2, -5)$;

б) $A(3, 5, -1)$, $B(2, -4, 3)$, $C(1, 1, 1)$;

в) $A(3, 1, -4)$, $B(-2, -4, 1)$, $C(1, 5, 0)$;

г) $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$.

2.24. Написать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A параллельно вектору $\vec{s}$:

а) $A(3, -1, 2)$, $\vec{s} = (1, 2, 5)$; б) $A(0, 2, -4)$, $\vec{s} = (3, -1, 2)$;

в) $A(3, 8, -6)$, $\vec{s} = (1, 0, 0)$; г) $A(1, -3, 5)$, $\vec{s} = (0, 2, 3)$.

2.25. Написать уравнения прямой, проходящей через точку A параллельно заданной прямой:

а) $A(5,-1,6)$, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$; б) $A(3,0,4)$, $\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+4}{2}$;

в) $A(0,2,-5)$, $\begin{cases} 3x+2y-z-1=0, \\ -x+3y+2z-3=0; \end{cases}$ г) $A(4,2,-1)$, $\begin{cases} 2x-3y+z-5=0, \\ x+2y-3z+7=0; \end{cases}$

д) $A(1,-3,2)$, $\begin{cases} x=t+1, \\ y=2t-3, \\ z=4t+2; \end{cases}$ е) $A(4,2,-3)$, $\begin{cases} x=-2t+5, \\ y=t+4, \\ z=3t+1. \end{cases}$

2.26. Написать уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

а) $A(2,-5,6)$, $B(3,4,-1)$; б) $A(-1,5,8)$, $B(2,-6,7)$;

в) $A(1,2,-4)$, $B(3,5,-4)$; г) $A(3,0,1)$, $B(3,0,2)$.

2.27. Написать канонические уравнения прямой:

а) $\begin{cases} 2x-y+3z-8=0, \\ -x+y+2z+1=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3y-z+4=0, \\ 2x-y-z+1=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x-6y+z-1=0, \\ x-2y+5=0. \end{cases}$

2.28. Написать параметрические уравнения прямой:

а) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$; б) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+5}{2}$; в) $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y-4}{7}=\dfrac{z-5}{0}$;

г) $\begin{cases} 2x+y+z-5=0, \\ x-2y+3z+4=0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x-2y+z+1=0, \\ x+y-2z+3=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-y+3z-6=0, \\ 2x+y-z+3=0. \end{cases}$

2.29. Найти угол между прямыми:

а) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$ и $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-5}{11}$;

б) $\dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{-4}$ и $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-8}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$;

в) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+2}{-1}$ и $\begin{cases} 2x+y-z-10=0, \\ x-2y+z-2=0; \end{cases}$

г) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ и $\begin{cases} x+y-2z+1=0, \\ 2x-3y+z-5=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = -2t+3, \\ z = -t-1, \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -t, \\ y = 2t+5, \\ z = 2t-3. \end{cases}$

2.30. Пересекаются ли прямые?

а) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-1}$ и $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$;

б) $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-10}{2}$ и $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+14}{3}$;

в) $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = t-1, \\ z = t+3, \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -t+4, \\ y = 3t-1, \\ z = 2t; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = -3t+2, \\ y = t-1, \\ z = 5, \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -3t, \\ y = t+3, \\ z = -t-1. \end{cases}$

2.31. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

а) $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = t-3, \\ z = -t+2, \end{cases}$
$2x - y + z - 1 = 0$;

б) $\begin{cases} x = -t+3, \\ y = 3t-2, \\ z = 1, \end{cases}$
$x + 2y - 3z - 1 = 0$;

в) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{2}$,
$x - 3y + 2z - 3 = 0$;

г) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+5}{1}$,
$3x + 4y + z - 3 = 0$;

д) $\begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ x - y + z - 1 = 0, \end{cases}$
$2x - y + z - 2 = 0$;

е) $\begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0, \\ x - y + 2z - 5 = 0, \end{cases}$
$2x + y - z - 1 = 0$.

2.32. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A на заданную плоскость:

а) $A(3,\, 2,\, -4)$, $x - y + 2z - 5 = 0$;

б) $A(0,\, 2,\, 5)$, $3x + y + 2z - 5 = 0$;

в) $A(2,\, -1,\, 6)$, $2x + y + 4 = 0$;

г) $A(-1,\, 1,\, 1)$, $y - z - 2 = 0$.

2.33. Найти проекцию точки A на прямой:

а) $A(1,\, 2,\, -1)$, $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{2}$;

б) $A(2,\, -1,\, 0)$, $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-3}{2}$;

в) $A(1, -1, 2)$, $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t - 3, \\ z = -t + 2; \end{cases}$ г) $A(2, -2, 4)$, $\begin{cases} x = t - 1, \\ y = 2t + 3,, \\ z = 3t - 2. \end{cases}$.

2.34. Найти угол между прямой и плоскостью:

а) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{0}$,

$x + 2y - z + 4 = 0$;

б) $\dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+4}{1}$,

$4x + 3z - 2 = 0$;

в) $\begin{cases} x = t + 2, \\ y = 2t - 3, \\ z = -2t + 1, \end{cases}$

$2x - y + 2z - 3 = 0$;

г) $\begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = 2, \\ z = 4t + 3, \end{cases}$

$x + 2y - 2z + 5 = 0$.

III. МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

1. Матрицы и действия над ними

1. Матрицы.

Произвольную систему m чисел, записанных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов, называют ***матрицей*** размерности (размера) m на n. Числа, из которых составлена матрица, называются ее элементами. Матрицы обычно обозначаются большими буквами A, B, C, …, а их элементы – малыми: a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, …. Первый индекс элемента матрицы указывает номер строки, в которой находится данный элемент, второй индекс – номер столбца. Так элемент a_{ij} расположен на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы A. Матрица A размерности m на n записывается так:

$$A = A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Такая запись матрицы A называется развернутой.

Сокращенные формы записи:

$$A = (a_{ij}); \qquad A = [a_{ij}]; \qquad A_{mn} = (a_{ij})_{mn}; \qquad A_{mn} = [a_{ij}]_{mn}.$$

Если у матрицы A_{mn} число строк не равно числу столбцов, т. е. $m \neq n$, то матрицу A называют ***прямоугольной***; если же $m = n$ – ***квадратной*** матрицей n-го порядка.

Матрица, состоящая из одной строки (столбца) называется ***матрицей-строкой*** (***матрицей-столбцом***) или ***вектор-строкой*** (***вектор-столбцом***).

Если все элементы матрицы A равны нулю, т. е. $a_{ij} = 0$ для всех $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, то матрица называется ***нулевой***.

Элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} квадратной матрицы n-го порядка называются ***диагональными***, а вся их совокупность – ***главной диагональю*** или просто ***диагональю*** матрицы A.

Если у квадратной матрицы A все внедиагональные элементы равны нулю, т. е. $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$, то матрица называется ***диагональной***.

Если у диагональной матрицы $a_{ii} = 1$ для всех $i = \overline{1,n}$, то матрица называется ***единичной*** матрицей порядка n. Единичные матрицы обозначают буквой E (или E_n). Так, $E = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

Если все элементы квадратной матрицы, расположенные выше (ниже) диагонали, равны нулю, то матрица называется ***треугольной*** или ***нижнетреугольной*** (***верхнетреугольной***).

Так, матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ являются треугольными, причем: A – нижнетреугольная, B – верхнетреугольная.

Если у матрицы A поменять местами строки и столбцы, то полученная матрица называется ***транспонированной*** матрицей (по отношению к матрице A) и обозначается одним из следующих символов: A^{T}, A^*, A'.

Например: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} = A^* = A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Действия над матрицами.

1) Матрицы A и B называют ***равными*** и пишут $A = B$, если:

а) эти матрицы одной размерности: $A = A_{mn}$, $B = B_{mn}$;

б) $a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

2) Для матриц одинаковой размерности определена операция (действие) ***сложения***: $A = A_{mn} = (a_{ij})_{mn}$, $B = B_{mn} = (b_{ij})_{mn}$;

$$A + B = A_{mn} + B_{mn} = (a_{ij} + b_{ij})_{mn}, \quad i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}.$$

Разность матриц $A = A_{mn}$ и $B = B_{mn}$ определяется так:

$$A - B = A_{mn} - B_{mn} = (a_{ij} - b_{ij})_{mn}, \quad i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}.$$

3. Под ***произведением*** матрицы A ***на число*** α или числа α на матрицу A понимают матрицу, обозначаемую αA, элементы которой получаются умножением всех элементов матрицы A на число α:

$$A\cdot\alpha = \alpha\cdot A = (\alpha\cdot a_{ij}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

4. Если число столбцов матрицы $A = A_{mk}$ равно числу строк матрицы $B = B_{kn}$, то тогда (и только тогда!) определяется ***произведение матрицы*** A_{mk} ***на матрицу*** B_{kn}:

$$A_{mk}\cdot B_{kn} = C_{mn} = (c_{ij})_{mn}.$$

Элемент c_{ij} матрицы $C = AB$ вычисляется как скалярное произведение i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik}\cdot b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}\cdot b_{sj},\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Если A и B – квадратные матрицы одного порядка, то в этом случае имеют смысл произведения AB и BA. Необходимо помнить, что в общем случае $AB \neq BA$. Если же $AB = BA$, то такие квадратные матрицы называют ***перестановочными*** или ***коммутативными***.

Матрицы A и E одного порядка – коммутативны, причем $AE = EA = A$.

Если матрицы A и B одного порядка и $A\cdot B = E$, то матрица B называется ***обратной матрицей*** матрицы A и обозначается A^{-1}. Имеют место равенства:

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E;\qquad \left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

5. Для операций (действий) сложения и умножения матриц справедливы следующие свойства:

$$(A_{mn} + B_{mn}) + C_{mn} = A_{mn} + (B_{mn} + C_{mn}) = A_{mn} + B_{mn} + C_{mn},$$

$$(A_{mk}\cdot B_{ks})\cdot C_{sn} = A_{mk}\cdot(B_{ks}\cdot C_{sn}) = A_{mk}\cdot B_{ks}\cdot C_{sn},$$

$$(A_{mk} + B_{mk})\cdot C_{kn} = A_{mk}\cdot C_{kn} + B_{mk}\cdot C_{kn},$$

$$A_{mk}\cdot(B_{kn} + C_{kn}) = A_{mk}\cdot B_{kn} + A_{mk}\cdot C_{kn}.$$

6. Если A – квадратная матрица n-го порядка, $X \neq 0$ – n-мерный вектор-столбец (матрица-столбец), λ – некоторое число и $AX = \lambda X$, то X называется ***собственным вектором***, а λ – ***собственным значением*** (числом) матрицы A.

3. Технологическая матрица.

Предположим, что некоторое предприятие из m видов ресурсов (сырья) производит n видов продукции. Обозначим через a_{ij} норму расхода i-го вида ресурса на производство единицы j-го вида продукции и рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})$, которая называется ***технологической матрицей***.

Каждая строка этой матрицы описывает расход соответствующего ресурса на производство одной единицы каждого вида продукции.

Каждый столбец этой матрицы описывает расход всех видов ресурсов на производство одной единицы соответствующего вида продукции, т. е. j-тый столбец матрицы A описывает j-ю технологию переработки ресурсов.

Если требуется произвести x_1 единиц продукции первого вида, x_2 ед. второго, …, x_n ед. n-го вида продукции, то используя технологическую матрицу легко подсчитать расход всех видов ресурсов для выполнения данного плана. Для этого нужно записать этот план в виде вектора-столбца $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и вычислить вектор-столбец AX. Каждая координата этого вектора-столбца указывает расход соответствующего вида ресурса.

Если предприятие располагает b_i единиц i-го ресурса ($i = \overline{1, m}$), то для того, чтобы план X был выполнимым (допустимым), необходимо, чтобы выполнялось следующее неравенство $AX \le B$, где $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Если это векторное неравенство не выполняется, то это означает, что план X не может быть выполнимым при имеющихся запасах ресурсов B.

<u>Пример 1</u>. Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u> $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1+2 & -2+2 & 0-1 \\ 3+0 & 1+3 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример 2.</u> Найти матрицу $C = 2A + 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$C = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 18 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Вычислить произведение матриц $A\cdot B\cdot C$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим сначала $A\cdot B$: $A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 0 & 3\cdot(-1) + 0\cdot 2 & 3\cdot 2 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим $A\cdot B\cdot C$:

$$A\cdot B\cdot C = (A\cdot B)\cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 2 + 5\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + 6\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Предприятие производит четыре вида продукции, используя три вида ресурсов. Известна технологическая матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Какими объемами ресурсов должно располагать предприятие, чтобы быть в состоянии произвести 100 ед. продукции первого вида, 210 ед. – второго, 130 ед. – третьего и 90 ед. – четвертого?

Решение. Запишем план выпуска продукции в виде вектора-столбца $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 210 \\ 130 \\ 90 \end{pmatrix}$ и вычислим требуемые объемы ресурсов:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 210 \\ 130 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200+840+130+450 \\ 0+420+390+90 \\ 100+210+260+270 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1620 \\ 900 \\ 840 \end{pmatrix}.$$

Для выполнения плана X предприятию необходимы: 1620 ед. ресурсов первого вида, 900 ед. – второго и 840 ед. – третьего. Следовательно, для того, чтобы план X был выполнимым, предприятие должно располагать не менее чем: 1620 ед. ресурсов первого вида, 900 ед. – второго и 840 ед. – третьего.

Пример 5. Используя условия предыдущего примера, определить финансовые затраты на выполнение указанного плана, если стоимость одной единицы ресурсов первого вида – 20 ден. ед., второго вида – 40 ден. ед., третьего – 50 ден. ед.

Решение. Легко видеть, что затраты на выполнение плана могут быть найдены как произведение $C \cdot A \cdot X$, где $C = (20 \quad 40 \quad 50)$. Поэтому,

$$C \cdot A \cdot X = C \cdot (A \cdot X) = (20 \quad 40 \quad 50) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 210 \\ 130 \\ 90 \end{pmatrix} =$$

$$= (20 \quad 40 \quad 50) \cdot \begin{pmatrix} 1620 \\ 900 \\ 840 \end{pmatrix} = 32400 + 36000 + 42000 = 110400 \text{ (ден. ед.)}.$$

Пример 6. Проверить, есть ли среди векторов $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $AX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda_1 X_1,$

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda_2 X_2,$$

$$AX_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot X_3.$$

Собственным вектором матрицы A является только вектор X_3 (собственное число λ, отвечающее данному вектору, равно 4).

ЗАДАНИЯ

3.1 Найти сумму матриц A и B:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 4 \\ 8 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\sin^2\alpha & \cos^2\alpha \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1+t^2 & -2t \\ 1+t^3 & 3(t^2-t) \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2t & 1+t^2 \\ 3(t^2+t) & 1-t^3 \end{pmatrix}$.

3.2 Найти матрицу $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2$, $\beta = -3$.

б) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ -5 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $\alpha=-2$, $\beta=5$.

в) $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $\alpha=0{,}4$, $\beta=0{,}7$.

г) $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 8 & -2\\ 0 & 4 & -3 & 0\\ 3 & 2 & 6 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-6 & 4 & -12 & 3\\ 0 & -6 & 4 & 0\\ 4 & -3 & -9 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=0{,}3$, $\beta=0{,}8$.

3.3 Вычислить произведение AB и там, где это возможно, BA:

а) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 5\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

3.4 Найти все возможные произведения матриц A, B и C:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3.5 Выяснить, какие из векторов X_1, X_2, X_3 являются собственными векторами матрицы A:

а) $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3.6 Предприятие производит три вида продукции, используя два вида ресурсов. Известна технологическая матрица A. Определить объемы ресурсов, необходимые для производства X_1 ед. продукции первого вида, X_2 ед. – второго и X_3 – ед. третьего.

а) $A = \begin{pmatrix} 12 & 21 & 8 \\ 7 & 13 & 23 \end{pmatrix}$; $X_1 = 230$, $X_2 = 180$, $X_3 = 120$;

б) $A = \begin{pmatrix} 32 & 41 & 18 \\ 23 & 19 & 35 \end{pmatrix}$; $X_1 = 125$, $X_2 = 210$, $X_3 = 160$.

3.7 Предприятие производит четыре вида продукции, используя при этом три вида сырья. Известна технологическая матрица A и цены за одну единицу сырья каждого вида: y_1, y_2, y_3. Предприятие планирует произвести X_1 ед. продукции первого вида, X_2 ед. – второго, X_3 ед. – третьего и X_4 ед. – четвертого. Определить финансовые затраты предприятия на приобретение сырья, необходимого для выполнения плана.

а) $A = \begin{pmatrix} 11 & 21 & 7 & 5 \\ 15 & 12 & 20 & 9 \\ 7 & 13 & 10 & 12 \end{pmatrix}$; y_1 = 16 ден. ед., y_2 = 30 ден. ед.,

y_3 = 22 ден. ед., X_1 = 200 ед., X_2 = 100 ед., X_3 = 150 ед., X_4 = 220 ед;

б) $A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 21 & 17 \\ 12 & 14 & 16 & 21 \\ 20 & 15 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; y_1 = 20 ден. ед., y_2 = 25 ден. ед.,

y_3 = 18 ден. ед., X_1 = 250 ед., X_2 = 180 ед., X_3 = 300 ед., X_4 = 50 ед.

2. Определители и их свойства

1. Определители.

Каждой квадратной матрице A в соответствие ставится некоторое число, обозначаемое $|A|$ или $\det A$, которое называется ***определителем*** этой матрицы.

Определитель матрицы второго порядка: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель матрицы третьего порядка: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Определитель матрицы n-го порядка (определитель n-го порядка) есть число $|A|$, равное сумме попарных произведений элементов любой строки или столбца матрицы A на соответствующие им алгебраические дополнения:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\ .$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т. е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, который получается из определителя $|A|$ матрицы A путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца.

2. Основные свойства определителя:

1) если у определителя есть «нулевая» строка или столбец, то такой определитель равен нулю;
2) величина определителя не меняется при транспонировании, т. е. определитель транспонированной матрицы A^{T} равен определителю матрицы A:

$$|A^{\mathrm{T}}| = |A|;$$

3) при перестановке местами любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак;
4) общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя;
5) определитель, имеющий две одинаковые или пропорциональные строки (столбцы), равен нулю;
6) если одна из строк (столбцов) определителя является линейной комбинацией других ее строк (столбцов), то такой определитель равен нулю;
7) величина определителя не изменится, если ко всем элементам какой-нибудь строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое число;
8) сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна нулю.

3. Обратная матрица.

Если определитель $|A|$ квадратной матрицы A отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то у такой матрицы существует обратная матрица A^{-1}, которая может быть найдена следующим образом:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

Замечание. Приведенную выше формулу, как правило, используют для нахождения обратной матрицы для матриц 2-го и 3-го порядков. Для матриц более высоких порядков этой формулой не пользуются, т. к. ее применение становится очень трудоемким.

4. Решение систем уравнений по формулам Крамера и при помощи обратной матрицы.

Решение системы n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_n \end{cases}$$

в случае, когда определитель $|A|$ матрицы системы $A = (a_{ij})$ отличен от нуля ($|A| \neq 0$), может быть получено:

а) по формулам Крамера: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = \overline{1,n}$,

где $\Delta = |A|$, а Δ_j – определители, получаемые из определителя $|A|$ заменой j-го столбца на столбец правых частей $A_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$;

б) при помощи обратной матрицы: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}A$.

5. Собственные значения матрицы.

Если A – квадратная матрица, то уравнение $|A - \lambda E| = 0$ называется ***характеристическим уравнением*** матрицы A, а его корни (решения) λ_i – собственными значениями матрицы A.

6. Миноры *k*-го порядка. Ранг матрицы.

Минором k-го порядка матрицы A_{mn} называется определитель M_k k-го порядка, составленный из элементов этой матрицы, расположенных на пересечении произвольным образом выбранных k строк и k столбцов.

Рангом матрицы называется число, равное порядку наивысшего отличного от нуля минора k-го порядка этой матрицы. Для ранга матрицы A используется одно из следующих обозначений: r, $r(A)$, $rang\ A$.

$$r(A_{mn}) \le \min(m, n).$$

Если ранг матрицы равен r, то это означает, что среди миноров r-го порядка матрицы есть хотя бы один отличный от нуля, а все миноры более высоких порядков либо не существуют, либо равны нулю. При этом любой минор r-го порядка, если он отличен от нуля, называется ***базисным минором***.

Строки и столбцы матрицы, из элементов которых составлен базисный минор, называются ***базисными строками*** и ***базисными столбцами***. Базисные строки (столбцы) матрицы являются линейно независимыми строками (столбцами).

Любая строка (столбец) матрицы может быть представлена (представлен) в виде линейной комбинации базисных строк (столбцов) (теорема о базисном миноре).

Пример 7. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5-(-1)\cdot 3 = 10+3 = 13;$

б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot0\cdot(-2) + 3\cdot2\cdot3 + 4\cdot1\cdot(-1) - (-1)\cdot0\cdot3 - 3\cdot4\cdot(-2) - 2\cdot2\cdot1 =$
$0 + 18 - 4 - 0 + 24 - 4 = 34;$

в) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. Используя свойства определителя, преобразуем исходный определитель так, чтобы во втором столбце все элементы, кроме «1», стали нулями. С этой целью к четвертой строке прибавим вторую, предварительно умножив ее на (–2) (величина определителя при этом не изменится), и «раскроем» определитель по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 8 + 0 - 8 + 2 - 0 = -12.$$

Использованный прием называют вычислением определителя ***методом понижения порядка***.

Аналогичным образом вычисляются определители и более высоких порядков.

Пример 8. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Вначале проверим, существует ли у данной матрицы обратная:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - 9 - 2 - 0 = -10 \neq 0.$$

Значит, у данной матрицы существует обратная. Найдем ее. Ищем алгебраические дополнения исходной матрицы:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=5;\quad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-5;\quad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2;\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-4;\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3;\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1;\quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3.$$

Теперь записываем обратную матрицу: $A^{-1}=-\dfrac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}5 & -5 & -5\\ 2 & -4 & 2\\ -3 & 1 & -3\end{pmatrix}.$

Проверка: $$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\begin{pmatrix}5 & -5 & -5\\ 2 & -4 & 2\\ -3 & 1 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-10 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 0\\ 0 & 0 & -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, обратная матрица найдена верно.

Пример 9. Решить систему уравнений $\begin{cases}-x_1+2x_2+3x_3=0,\\ \quad 3x_2+2x_3=4,\\ x_1-x_2+x_3=-2,\end{cases}$

а) по правилу Крамера; б) при помощи обратной матрицы.

Решение. а) Определитель матрицы системы:

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-10\neq 0$$

(этот определитель был вычислен в примере 8).

Следовательно, можно использовать формулы Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0-8-12+18-8-0=-10 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-10}{-10} = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4+0+0-12-4-0=-20 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-20}{-10} = 2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 6+8+0-0-4-0=10 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{10}{-10} = -1.$$

Решение системы уравнений: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Проверка. Подставим найденное решение во все уравнения системы:

$-1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot(-1) = -1 + 4 - 3 = 0,$

$0\cdot 1 + 3\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 6 - 2 = 4,$

$1 - 2 - 1 = -2.$

б) Запишем систему в матричной форме ($AX = A_0$):

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица $A^{-1} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ является обратной к матрице системы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (см. пример 8), то $X = A^{-1} \cdot A_0 =$

$$= -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5\cdot 0 - 5\cdot 4 - 5\cdot(-2) \\ 2\cdot 0 - 4\cdot 4 + 2\cdot(-2) \\ -3\cdot 0 + 1\cdot 4 - 3\cdot(-2) \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Пример 10. Найти собственные значения матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=0$:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda-7=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=-1,\ \lambda_2=7.$$

Следовательно, собственные значения матрицы –1 и 7.

ЗАДАНИЯ

3.8 Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}1 & \sin\alpha\\ \sin\alpha & 1\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}125 & 50\\ 50 & 100\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}9 & -6 & 3\\ 6 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -3 & 1\\ -5 & 0 & 4 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 0\end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -3 & -1\\ 3 & -7 & -1 & 9\end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1\end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2\end{vmatrix}$.

3.9 Найти матрицу, обратную матрице A:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

3.10 Решить системы уравнений: а) по правилу Крамера; б) при помощи обратной матрицы:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$

3.11 Найти собственные значения матрицы A:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

1. Основные понятия.

1) Система линейных алгебраических уравнений, состоящая из m уравнений с n неизвестными (m и n – любые целые положительные числа), имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_m. \end{cases}$$

Такая форма записи СЛАУ называется ***развернутой***.

2) ***Матричная форма*** записи СЛАУ:

$$AX = A_0,$$

где A – матрица системы, X – матрица-столбец (n-мерный вектор-столбец),

A_0 – матрица-столбец (m-мерный вектор-столбец) правых частей системы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad A_0=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

3) ***Расширенной*** матрицей системы называется матрица $\overline{A}$, получаемая из матрицы A добавлением столбца A_0. При записи $\overline{A}$ столбец A_0 обычно отделяют вертикальной чертой:

$$\overline{A}=\left(A\middle|A_0\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & a_m \end{array}\right).$$

4) ***Векторная форма*** записи СЛАУ:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0 \quad \text{или кратко} \quad \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = A_0,$$

где A_j ($j=\overline{1,n}$) – m-мерные векторы-столбцы матрицы A:

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \; \dots, \; A_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \; \dots, \; A_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

5) ***Решением* СЛАУ** называется набор значений неизвестных x_1, x_2, …, x_n (n-мерный вектор-столбец X), который, будучи подставленным в уравнения системы, обращает их (все) в тождества.

СЛАУ, имеющая хотя бы одно решение, называется ***совместной***, в противном случае – ***несовместной***. Совместную систему, имеющую только одно (единственное) решение, называют ***определенной***, в противном случае (т. е., если решений больше одного) – ***неопределенной***.

6) Системы $AX = A_0$ и $BX = B_0$ называются ***эквивалентными***, если любое решение одной из них является решением и другой.

7) Если $m = n$ и $|A| \neq 0$, то система $AX = A_0$ является определенной и ее решение может быть получено:

а) по формулам Крамера: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1,n}$;

б) при помощи обратной матрицы: $X = A^{-1}A_0$.

8) В общем случае ($m < n,\ m = n,\ m > n$) система $AX = A_0$ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы $r = r(A)$ равен рангу расширенной матрицы системы $\bar{r} = r(\bar{A})$, т. е. $r = \bar{r}$ (теорема Кронекера-Капелли) и ее решение может быть получено методом полного исключения (метод Жордана – Гаусса).

Если $r = \bar{r} = n$, то система $AX = A_0$ – определенная; если $r = \bar{r} < n$ – неопределенная (если $r \neq \bar{r}$ – система несовместная).

9) ***Базисными неизвестными*** называются неизвестные, отвечающие базисным столбцам матрицы системы, т. е. столбцам, из элементов которых составлен базисный минор. Остальные неизвестные называются свободными.

При решении СЛАУ методом полного исключения базисными неизвестными выбирают «ведущие» неизвестные.

10) ***Общим решением*** $X_{\text{общ}}$ системы $AX = A_0$ называется такое решение, в котором базисные неизвестные выражены через свободные.

11) Если в общем решении $X_{\text{общ}}$ свободным неизвестным дать какие-нибудь числовые значения, то полученное решение называется ***частным решением***.

Если всем свободным неизвестным дать значения равные нулю, то такое частное решение называется ***базисным решением***.

12) Система уравнений $AX = 0$, т. е., если $A_0 = 0$, называется ***однородной***; если $A_0 \neq 0$ – ***неоднородной***. Однородная система уравнений всегда совместна, т. к. для такой системы всегда $r = \bar{r}$. Если $r = n$, то однородная система является определенной и ее единственное решение $X = 0$. Если $r < n$, то у однородной системы есть ненулевые решения.

2. Метод полного исключения (метод Жордана–Гаусса).

Основой метода полного исключения являются эквивалентные (элементарные) преобразования уравнений (матриц):

1) умножение (деление) обеих частей уравнений (строк расширенной матрицы системы) на любое, не равное нулю, число;

2) прибавление к одному уравнению системы (строке расширенной матрицы) любого другого ее уравнения (строки), умноженного на любое число.

Каждое из таких преобразований, а также любая их последовательность приводят к новой системе (матрице) эквивалентной исходной.

Метод состоит из конечного числа однотипных шагов, каждый из которых заключается в следующем: выбирается некоторое уравнение системы, которое называется «ведущим» уравнением и некоторая неизвестная, которая называется «ведущей» неизвестной. В качестве ведущего уравнения можно выбирать любое уравнение системы, которое не было ведущим на предыдущих шагах, а в качестве ведущей неизвестной – любую неизвестную, которая входит в ведущее уравнение с коэффициентом, отличным от нуля. Коэффициент при ведущей неизвестной в ведущем уравнении называется ведущим коэффициентом (элементом). После этого при помощи элементарных преобразований ведущую неизвестную исключают из всех уравнений системы (кроме ведущего). Если при этом хотя бы одно из уравнений системы преобразуется в уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = a \quad (a \neq 0),$$

то это означает, что система несовместна (вычисления прекращаются).

Если же какие-то из уравнений системы преобразуются в уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0,$$

то такие уравнения удаляют из системы и переходят к следующему шагу.

Системы, получаемые после каждого шага, эквивалентны исходной.

В случае совместной системы, преобразования продолжают до тех пор, пока не получат систему эквивалентную исходной, в которой все уравнения уже были ведущими. Выбирая в качестве базисных неизвестных ведущие неизвестные (а свободными – все остальные неизвестные), из последней системы легко записывается общее решение (если система неопределенная) или единственное решение (если система определенная).

Так как все преобразования, которым подвергалось любое уравнение системы при решении ее методом полного исключения, проводятся только над коэффициентами этого уравнения и его правой частью, то это позволяет проводить все преобразования (вычисления) не с уравнениями системы, а со строками расширенной матрицы системы. Для контроля вычислений добавляют к расширенной матрице еще один столбец $\sum$ – столбец контрольных сумм. В этом столбце записываются суммы элементов каждой из строк расширенной матрицы.

Все данные записываются в виде таблицы, которую обычно называют «нулевой»:

A				A_0	$\sum$
a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	a_1	$\sum_1 = a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} + a_1$
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	a_2	$\sum_2 = a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2n} + a_2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	a_m	$\sum_m = a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn} + a_m$

Следует помнить:

1) на каждом шаге ведущий элемент выбирается из элементов таблицы (матрицы), расположенных до первой черты;

2) преобразования выполняются над всей строкой (включая элементы контрольного столбца $\sum$);

3) на каждом шаге сумма элементов любой строки, расположенных до двойной черты, должна совпадать с соответствующим числом контрольного столбца (числом, стоящим за двойной чертой);

4) если в какой-то строке сумма элементов до двойной черты не совпадает с числом, находящимся за двойной чертой, то в данной строке допущена ошибка, которую необходимо исправить, прежде чем переходить к дальнейшим вычислениям;

5) если в результате вычислений какая-нибудь строка таблицы станет нулевой (т. е. состоит только из нулей), то она вычеркивается;

6) если в какой-то строке в нуль обратятся только элементы, расположенные до первой черты, а остальные два элемента (элементы столбцов A_0 и $\sum$) равны между собой, но отличны от нуля, то все вычисления прекращаются, т. к. это означает, что система несовместна;

7) в случае совместной системы процесс вычислений заканчивается, если в последней таблице уже нет строк, которые не были ранее ведущими;

8) при выписывании ответа (общего решения) контрольный столбец не используется.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \quad - \quad x_5 + 2x_6 = -5, \\ x_1 \quad + \quad x_3 \quad + \quad x_5 + x_6 = 3. \end{cases}$$

Решение. Решаем систему табличным (матричным) вариантом метода полного исключения.

Составим начальную (нулевую) таблицу:

A						A_0	$\sum$
1	– 1	2	– 1	1	– 1	6	7
2	– 1	1	1	2	1	5	11
– 1	2	– 1	0	– 1	2	– 5	– 4
1	0	1	0	1	1	3	7

I шаг. Ведущим элементом первого шага удобно выбрать элемент «–1», стоящий в первой строке и четвертом столбце (в таблице он обведен кружком). Тем самым ведущей строкой I-го шага выбирается первая строка, а ведущим столбцом – четвертый столбец. Делим ведущую строку на ведущий элемент, т. е. на «–1», и полученную строку записываем в следующую таблицу (первой строкой). Ко второй строке прибавляем первую (ведущую) и результат также записываем в следующую таблицу (второй строкой). Третью и четвертую строки переписываем в следующую таблицу без изменений, т. к. элементы этих строк, стоящие в ведущем (четвертом) столбце – нули. В результате получаем следующую таблицу:

A						A_0	$\sum$
– 1	1	– 2	1	– 1	1	– 6	– 7
3	– 2	3	0	3	0	11	18
– 1	2	– 1	0	– 1	2	– 5	– 4
1	0	1	0	1	1	3	7

Проверяем правильность вычислений:

– 1 + 1 – 2 + 1 – 1 + 1 – 6 = – 7,

3 – 2 + 3 + 0 + 3 + 0 +11 = 18,

– 1 + 2 – 1 + 0 – 1 + 2 – 5 = – 4,

$1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 3 = 7.$

Так как суммы строк (до двойной черты) совпадают с соответствующими числами контрольного столбца (столбец за двойной чертой), то переходим ко второму шагу.

II шаг. Ведущим элементом второго шага удобно выбрать элемент «1» (в таблице обведен кружком), стоящий на пересечении четвертой строки и шестого столбца (тем самым на втором шаге четвертая строка и шестой столбец будут ведущими). Строим новую таблицу. В новую таблицу без изменения переносим вторую и четвертую строки предыдущей таблицы (т. к. четвертая строка является ведущей с ведущим элементом равным 1, а в ведущем столбце второй строки стоит ноль). Остальные строки преобразуем: четвертую (ведущую) строку умножим на (–1) и прибавим к первой, а затем ведущую (четвертую) строку умножим на (–2) и прибавим к третьей. Результаты записываем соответственно в первой и третьей строке в новой таблице. Получаем следующую таблицу:

– 2	1	– 3	1	– 2	0	– 9	– 14
3	– 2	3	0	3	0	11	18
– 3	2	– 3	0	– 3	0	– 11	– 18
1	0	1	0	1	1	3	7

Проверяем правильность вычислений:

$-2 + 1 - 3 + 1 - 2 + 0 - 9 = -14,$

$3 - 2 + 3 + 0 + 3 + 0 + 11 = 18,$

$-3 + 2 - 3 + 0 - 3 + 0 - 11 = -18,$

$1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 3 = 7.$

Суммы строк (до двойной черты) совпадают с контрольными числами.

Прежде чем перейти к третьему шагу, обратим внимание на то, что в полученной таблице вторая и третья строки пропорциональны (это означает, что соответствующие уравнения эквивалентны). Поэтому одну из этих строк, например третью, можно вычеркнуть.

– 2	1	– 3	1	– 2	0	– 9	– 14
3	– 2	3	0	3	0	11	18
1	0	1	0	1	1	3	7

III шаг. Так как все строки, кроме второй, уже были ведущими, то теперь ведущей строкой нужно выбирать вторую. В качестве ведущего элемента выберем «– 2» (в таблице обведен кружком). Таким образом, на третьем шаге ведущими будут: вторая строка и второй столбец.

Делим ведущую строку (вторую) на ведущий элемент (–2) и записываем ее второй строкой в следующую таблицу. После этого преобразованную ведущую строку умножаем на (–1), прибавляем к первой и результат тоже записываем в следующую таблицу (первой строкой). Третью строку переписываем без изменений, т. к. в ведущем (втором) столбце у нее 0.

Получаем:

– 1/2	0	– 3/2	1	– 1/2	0	– 7/2	– 5
– 3/2	1	– 3/2	0	– 3/2	0	– 11/2	– 9
1	0	1	0	1	1	3	7

Проверяем:

$$-\frac{1}{2}+0-\frac{3}{2}+1-\frac{1}{2}+0-\frac{7}{2}=-\frac{10}{2}=-5,$$

$$-\frac{3}{2}+1-\frac{3}{2}+0-\frac{3}{2}+0-\frac{11}{2}=-\frac{18}{2}=-9,$$

$$1 + 0 + 1 +0 + 1 + 1 + 3 = 7.$$

Суммы строк совпадают с контрольными числами.

Так как все строки уже были ведущими, то все преобразования закончены.

Последняя таблица соответствует следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 \quad - \quad \frac{3}{2}x_3 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 \qquad = -\frac{7}{2}, \\ -\frac{3}{2}x_1 + x_2 - \frac{3}{2}x_3 \quad - \quad \frac{3}{2}x_5 \qquad = -\frac{11}{2}, \\ \quad x_1 \quad + \quad x_3 \quad + \quad x_5 + x_6 = 3, \end{cases}$$

которая эквивалентна исходной.

Выбираем в качестве базисных неизвестных x_2, x_4 и x_6 (при этом x_1, x_3 и x_5 будут свободными) и выражаем их через свободные неизвестные.

Из второго уравнения $x_2=-\frac{11}{2}+\frac{3}{2}x_1+\frac{3}{2}x_3+\frac{3}{2}x_5$; из первого уравнения $x_4=-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_5$; из третьего $x_6 = 3 - x_1 - x_3 - x_5$.

Запишем теперь общее решение системы:

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{11}{2} + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 \\ -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_5 \\ 3 - x_1 - x_3 - x_5 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность полученного решения. Проверку будем производить упрощенно. Возьмем какое-нибудь частное решение (желательно, чтобы в этом решении все неизвестные были отличны от нуля). Дадим свободным неизвестным, например, такие значения: $x_1 = 1$, $x_3 = -1$ и $x_5 = 1$.

Тогда:

$$x_2 = -\frac{11}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = -4; \quad x_4 = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -4; \quad x_6 = 3 - 1 + 1 - 1 = 2.$$

Получили следующее частное решение, которое для удобства запишем в виде вектора-строки:

$$X_{\text{ч}} = (1, -4, -1, -4, 1, 2).$$

Подставим найденное частное решение в каждое из уравнений исходной системы:

$$\begin{cases} 1-(-4)+2\cdot(-1)-(-4)+1-2 = 1+4-2+4+1-2 = 6, \\ 2\cdot 1-(-4)+(-1)+(-4)+2\cdot 1+2 = 2+4-1-4+2+2 = 5, \\ -1+2\cdot(-4)-(-1) - 1+2\cdot 2 = -1-8+1 - 1+4 = -5, \\ 1 - 1 + 1 + 2 = 3. \end{cases}$$

Все уравнения исходной системы обратились в тождества. Следовательно, система решена верно.

Замечание. Базисное решение $X_{\text{баз}} = \left(0, -\frac{11}{2}, 0, -\frac{7}{2}, 0, 3\right)$ использовать для проверки не рекомендуется, т. к. наличие в нем нулей снижает достоверность проверки.

В заключение заметим, что при решении системы уравнений методом полного исключения, результаты преобразований удобно записывать так:

1	– 1	2	– 1	1	– 1	6	7
2	– 1	1	1	2	1	5	11
– 1	2	– 1	0	– 1	2	– 5	– 4
1	0	1	0	1	1	3	7
– 1	1	– 2	1	– 1	1	– 6	– 7
3	– 2	3	0	3	0	11	18
– 1	2	– 1	0	– 1	2	– 5	– 4
1	0	1	0	1	1	3	7
– 2	1	– 3	1	– 2	0	– 9	– 14
3	– 2	3	0	3	0	11	18
– 3	2	– 3	0	– 3	0	– 11	– 18
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~3~~	~~7~~
– 1/2	0	– 3/2	1	– 1/2	0	– 7/2	– 5
– 3/2	1	– 3/2	0	– 3/2	0	– 11/2	– 9
1	0	1	0	1	1	3	7

Из последней таблицы сразу выписывается общее решение:

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{11}{2} + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 \\ -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_5 \\ 3 - x_1 - x_3 - x_5 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Построить множество неотрицательных решений системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 4. \end{cases}$$

Решение. Найдем общее решение системы методом полного исключения:

3	2	– 1	1	– 2	3	6
2	– 1	2	1	– 1	3	6
1	1	2	– 1	1	4	8
1	3	– 3	0	– 1	0	0
2	– 1	2	1	– 1	3	6
3	0	4	0	0	7	14
– 1	– 3	3	0	1	0	0
1	– 4	5	1	0	3	6
3	0	4	0	0	7	14
0	– 3	13/3	0	1	7/3	14/3
0	– 4	11/3	1	0	2/3	4/3
1	0	4/3	0	0	7/3	14/3

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} - \frac{4}{3}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ \frac{2}{3} + 4x_2 - \frac{11}{3}x_3 \\ \frac{7}{3} + 3x_2 - \frac{13}{3}x_3 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку. Возьмем частное решение, в котором $x_2 = x_3 = 1$. Тогда:

$$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{3}{3} = 1, \quad x_4 = \frac{2}{3} + 4 \cdot 1 - \frac{11}{3} \cdot 1 = \frac{3}{3} = 1, \quad x_5 = \frac{7}{3} + 3 \cdot 1 - \frac{13}{3} \cdot 1 = \frac{3}{3} = 1.$$

Следовательно, $X_{\text{ч}} = (1, 1, 1, 1, 1)$. Подставляя это решение в каждое из уравнений системы, получаем:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 + 1 - 2 \cdot 1 = 3 + 2 - 1 + 1 - 2 = 3, \\ 2 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 1 + 1 - 1 = 2 - 1 + 2 + 1 - 1 = 3, \\ 1 + 1 + 2 \cdot 1 - 1 + 1 = 1 + 1 + 2 - 1 + 1 = 4. \end{cases}$$

Следовательно, общее решение найдено верно.

Теперь построим множество неотрицательных решений, т. е. решений, удовлетворяющих условию $X_{\text{общ}} \geq 0$:

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & - & \frac{4}{3}x_3 \\ & x_2 & \\ & & x_3 \\ \frac{2}{3} & + 4x_2 & - \frac{11}{3}x_3 \\ \frac{7}{3} & + 3x_2 & - \frac{13}{3}x_3 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{7}{3} - \frac{4}{3}x_3 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \\ \frac{2}{3} + 4x_2 - \frac{11}{3}x_3 \geq 0, \\ \frac{7}{3} + 3x_2 - \frac{13}{3}x_3 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7 - 4x_3 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \\ 2 + 12x_2 - 11x_3 \geq 0, \\ 7 + 9x_2 - 13x_3 \geq 0. \end{cases}$$

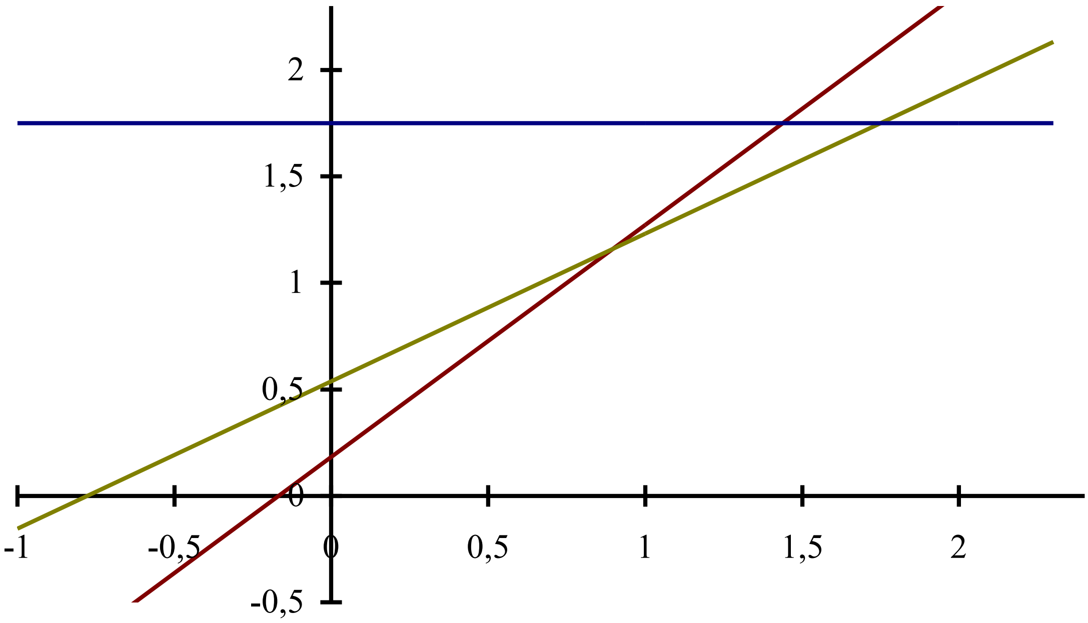


Рис. 3

На рис. 3 граница области (множества) неотрицательных решений обозначена штриховкой.

3. Приложения метода полного исключения.

1) Решение систем уравнений, отличающихся правыми частями.

Решать системы, отличающиеся только правыми частями, методом полного исключения можно одновременно. Для этого достаточно составить «нулевую» таблицу, состоящую из общей матрицы систем, а за чертой последовательно выписать столбцы правых частей всех систем. Для контроля вычислений за двойной чертой (в контрольном столбце) записываются суммы элементов каждой строки полученной таблицы. Преобразуя таблицу по методу полного исключения, следует помнить, что ведущий элемент выбирается из элементов матрицы системы (т. е. до черты). По последней таблице выписываются решения всех систем (используя первый столбец за чертой, выписывается решение первой системы; используя второй столбец – решение второй и т. д.).

Пример 3. Решить системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \quad + \quad x_5 = 3, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \quad + \quad x_5 = 3. \end{cases}$$

Решение.

1	2	– 1	2	– 1	1	5	9
1	– 1	– 2	1	0	1	– 1	– 1
2	1	1	0	1	3	3	11
– 1	4	3	0	– 1	– 1	7	11
1	– 1	– 2	1	0	1	– 1	– 1
2	1	1	0	1	3	3	11
1	5	4	0	0	2	10	22
1	– 1	– 2	1	0	1	– 1	– 1
2	1	1	0	1	3	3	11
1	5	4	0	0	2	10	22
0	– 6	– 6	1	0	– 1	– 11	– 23
0	– 9	– 7	0	1	– 1	– 17	– 33

Используя первый столбец за чертой, получаем решение первой системы:

$$X^{(1)}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} 2 \;\; -5x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 + 6x_2 + 6x_3 \\ -1 + 9x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}.$$

Используя второй столбец за чертой, получаем решение второй системы:

$$X^{(2)}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} 10 \;\; -5x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -11 + 6x_2 + 6x_3 \\ -17 + 9x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}.$$

Проверка. Возьмем частное решение первой системы, положив $x_2 = 1$ и $x_3 = -1$. Получаем: $X_{\text{ч}}^{(1)} = (1, 1, -1, -1, 1)$. Подставляем это решение во все уравнения первой системы:

$$\begin{cases} 1 + 2\cdot 1 - (-1) + 2\cdot(-1) - 1 = 1 + 2 + 1 - 2 - 1 = 1, \\ 1 - 1 - 2\cdot(-1) - 1 = 1 - 1 + 2 - 1 = 1, \\ 2\cdot 1 + 1 - 1 + 1 = 2 + 1 - 1 + 1 = 3. \end{cases}$$

Следовательно, первая из систем решена верно.

Возьмем частное решение второй системы, положив $x_2 = x_3 = 1$. Получаем: $X_{\text{ч}}^{(2)} = (1, 1, 1, 1, -1)$. Подставляем это решение во все уравнения второй системы:

$$\begin{cases} 1 + 2\cdot 1 - 1 + 2\cdot 1 - (-1) = 1 + 2 - 1 + 2 + 1 = 5, \\ 1 - 1 - 2\cdot 1 + 1 = 1 - 1 - 2 + 1 = -1, \\ 2\cdot 1 + 1 + 1 - 1 = 2 + 1 + 1 - 1 = 3. \end{cases}$$

Следовательно, вторая из систем решена верно.

2) Нахождение обратной матрицы.

Для нахождения обратной матрицы n-го порядка методом полного исключения нужно составить следующую таблицу: записать исходную матрицу, за чертой записать единичную матрицу той же размерности и за двойной чертой – контрольный столбец. Затем преобразовать таблицу по методу полного исключения, выбирая на каждом шаге ведущий элемент из элементов (чисел), расположенных до черты.

Если при вычислении на каком-либо шаге все элементы какой-нибудь строки, стоящие до черты, обратятся в нуль, то это означает, что исходная матрица вырожденная и, значит, у нее не существует обратной (вычисления прекращаются).

Если же исходная матрица невырожденная, то выполнив n шагов и упорядочив строки последней таблицы так, чтобы часть таблицы, которая располагается до черты, образовывала единичную матрицу, за чертой получим искомую обратную матрицу.

После нахождения обратной матрицы необходимо выполнить проверку – умножить исходную матрицу на найденную, обратную. Если в вычислениях не было ошибки, то в результате умножения получится единичная матрица.

Пример 4. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

1	1	– 1	– 1	1	0	0	0	1
1	2	2	1	0	1	0	0	7
– 1	0	1	– 1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	3
1	1	– 1	– 1	1	0	0	0	1
0	1	3	2	– 1	1	0	0	6
0	1	0	– 2	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	3
1	0	– 2	– 1	1	0	0	– 1	– 2
0	0	2	2	– 1	1	0	– 1	3
0	0	– 1	– 2	1	0	1	– 1	– 2
0	1	1	0	0	0	0	1	3
1	0	0	3	– 1	0	– 2	1	2
0	0	0	– 2	1	1	2	– 3	– 1
0	0	1	2	– 1	0	– 1	1	2
0	1	0	– 2	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1/2	3/2	1	– 7/2	1/2
0	0	0	1	– 1/2	– 1/2	– 1	3/2	1/2
0	0	1	0	0	1	1	– 2	1
0	1	0	0	0	– 1	– 1	3	2

Из последней таблицы видно, что матрица невырожденная и для получения обратной матрицы необходимо упорядочить строки этой таблицы (поменять местами вторую и четвертую строки). Получаем:

1	0	0	0	1/2	3/2	1	– 7/2
0	1	0	0	0	– 1	– 1	3
0	0	1	0	0	1	1	– 2
0	0	0	1	– 1/2	– 1/2	– 1	3/2

Контрольный столбец не выписывали, т. к. он уже не нужен. Теперь на месте исходной матрицы (т. е. до черты) находится единичная матрица и, следовательно, за чертой – обратная:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 1 & -7/2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

<u>Проверка</u>.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 1 & -7/2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Значит, обратная матрица найдена верно.

3) Разложение векторов по базису.

Рангом множества векторов называется максимальное число линейно независимых векторов множества.

Любая система (подмножество) из *r* (*r* – ранг множества) линейно независимых векторов $\{\vec{a}_{S_1},\vec{a}_{S_2},\ldots,\vec{a}_{S_r}\}$ множества $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_m\}$ называется ***базисом*** этого ***множества***.

Представление вектора $\vec{a}_j$ $(j=\overline{1,m})$ множества $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_m\}$ в виде линейной комбинации векторов базиса множества:

$$\vec{a}_j=\beta_1\cdot\vec{a}_{S_1}+\beta_2\cdot\vec{a}_{S_2}+\ldots+\beta_r\cdot\vec{a}_{S_r}=\sum_{i=1}^{r}\beta_i\vec{a}_{S_i}$$

называется ***разложением вектора*** $\vec{a}_j$ ***по базису*** $\{\vec{a}_{S_1},\vec{a}_{S_2},\ldots,\vec{a}_{S_r}\}$.

При этом числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ называются ***координатами вектора*** $\vec{a}_j$ ***в этом базисе***, а сам вектор $\vec{a}_j$ в этом базисе в координатной форме записывается так: $\vec{a}_j = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$.

Любой вектор множества можно разложить по любому базису этого множества. Разложение вектора $\vec{a}_j$ по выбранному базису единственно.

Базисом n-мерного пространства называется любая система из n линейно независимых векторов этого пространства. Если $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ какой-нибудь базис n-мерного пространства, то любой вектор $\vec{a}$ этого пространства можно разложить по этому базису, т. е. представить его в виде:

$$\vec{a} = \beta_1 \cdot \vec{a}_1 + \beta_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \beta_n \cdot \vec{a}_n.$$

Такое представление вектора $\vec{a}$ в данном базисе единственно. В этом базисе вектор $\vec{a}$ в координатной форме записывается так:

$$\vec{a} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Пример 5. Определить какой-нибудь базис множества векторов:

$$\vec{a}_1 = (1, 1, 2, 2, 1, 1),\quad \vec{a}_2 = (2, 1, 0, 1, -1, 1),\quad \vec{a}_3 = (-1, -1, 1, -1, 1, 0),$$

$$\vec{a}_4 = (2, 1, 3, 2, 1, 2),\quad \vec{a}_5 = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$$

и разложить векторы множества по выбранному базису.

Решение. Составим таблицу, выписав векторы по столбцам, и заполним столбец контрольных сумм. После этого будем преобразовывать таблицу по методу полного исключения. «Нулевые» строки, которые могут появиться в процессе преобразований, из таблицы удаляются. В последней таблице будет находиться ответ на все поставленные вопросы.

1	2	– 1	2	1	5
1	1	– 1	1	0	2
2	0	1	3	1	7
2	1	– 1	2	0	4
1	– 1	1	1	0	2
1	1	0	2	1	5
0	1	– 1	0	0	0
1	1	– 1	1	0	2
1	– 1	1	1	0	2
2	1	– 1	2	0	4
1	– 1	1	1	0	2
1	1	0	2	1	5

0	– 1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	2
1	0	0	1	0	2
2	0	0	2	0	4
1	0	0	1	0	2
1	1	0	2	1	5
0	– 1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	2
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
0	1	0	1	1	3

В последней таблице остались три ненулевые строки. Выпишем эти строки и обведем кружками те элементы, которые были ведущими:

0	–1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1

Контрольный столбец не выписывали, т. к. он уже не нужен (свою роль он сыграл при вычислениях). Из этой таблицы видно, что векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_3$ и $\vec{a}_5$ – линейно независимы и, следовательно, могут быть выбраны в качестве базиса. Базисные векторы удобно взять в следующем порядке: $\vec{a}_3$ (единица на первом месте), $\vec{a}_1$ (единица на втором месте) и $\vec{a}_5$ (единица на последнем, третьем месте). При таком выборе базиса: $\{\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{a}_5\}$, в каждом столбце последней таблицы записаны разложения векторов по этому базису:

$$\vec{a}_1 = (0, 1, 0),\ \vec{a}_2 = (–1, 0, 1),\ \vec{a}_3 = (1, 0, 0),\ \vec{a}_4 = (0, 1, 1),\ \vec{a}_5 = (0, 0, 1).$$

<u>Проверка.</u> Для проверки используются разложения не базисных векторов (т. е. векторов $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_4$) и их представления в исходном базисе:

$$\vec{a}_2 = (-1, 0, 1) = -1\cdot\vec{a}_3 + 0\cdot\vec{a}_1 + 1\cdot\vec{a}_5 = -(-1, -1, 1, -1, 1, 0) +$$

$$+ (1, 0, 1, 0, 0, 1) = (1, 1, -1, 1, -1, 0) + (1, 0, 1, 0, 0, 1) = (2, 1, 0, 1, -1, 1),$$

$$\vec{a}_4 = (0, 1, 1) = 0\cdot\vec{a}_3 + 1\cdot\vec{a}_1 + 1\cdot\vec{a}_5 = (1, 1, 2, 2, 1, 1) + (1, 0, 1, 0, 0, 1) =$$

$$= (2, 1, 3, 2, 1, 2).$$

Совпадение векторов $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_4$ с их представлениями в исходном базисе, свидетельствует о том, что разложения векторов по базису $\{\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{a}_5\}$ найдены верно.

Пример 6. Образуют ли векторы $\vec{a}_1 = (1, 0, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (-1, 1, 0, 2)$, $\vec{a}_3 = (2, 0, 1, 1)$ и $\vec{a}_4 = (0, 1, 1, -1)$ базис в четырехмерном пространстве? Если да, то вектор $\vec{b} = (-3, 4, 4, 4)$ разложить по этому базису.

Решение. Если векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ и $\vec{a}_4$ образуют базис, то вектор $\vec{b}$ можно разложить по этому базису, т. е. представить вектор $\vec{b}$ в виде: $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4$, где x_1, x_2, x_3 и x_4 – координаты вектора в базисе $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$. Кроме того, такое представление единственно, т. е. x_1, x_2, x_3 и x_4 определяются однозначно. Следовательно, для ответа на поставленные вопросы необходимо решить систему уравнений:

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4 = \vec{b}\,.$$

Очевидно, столбцами матрицы системы будут векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ и $\vec{a}_4$, записанные как векторы-столбцы.

Решаем эту систему методом полного исключения. Составляем «нулевую» таблицу, записывая векторы по столбцам:

1	– 1	2	0	– 3	– 1
0	1	0	1	4	6
2	0	1	1	4	8
0	2	1	– 1	4	6
1	– 1	2	0	– 3	– 1
0	1	0	1	4	6
0	2	– 3	1	10	10
0	2	1	– 1	4	6
1	– 1	2	0	– 3	– 1
0	1	0	1	4	6
0	1	– 3	0	6	4
0	3	1	0	8	12
1	– 7	0	0	– 19	– 25
0	1	0	1	4	6
0	10	0	0	30	40
0	3	1	0	8	12

1	0	0	0	2	3
0	0	0	1	1	2
0	1	0	0	3	4
0	0	1	0	– 1	0

Из последней таблицы видно, что система имеет единственное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. Следовательно: 1) векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ и $\vec{a}_4$ образуют базис в четырехмерном пространстве; 2) разложение вектора $\vec{b}$ по этому базису следующее: $\vec{b} = (2, 3, -1, 1)$.

<u>Проверка.</u>

$$2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = 2\cdot(1, 0, 2, 0) + 3\cdot(-1, 1, 0, 2) - (2, 0, 1, 1) +$$

$$+ (0, 1, 1, -1) = (2, 0, 4, 0) + (-3, 3, 0, 6) + (-2, 0, -1, -1) +$$

$$+ (0, 1, 1, -1) = (-3, 4, 4, 4) = \vec{b}\,.$$

Замечание. Если бы система уравнений $\vec{a}_1x_1 + \vec{a}_2x_2 + \vec{a}_3x_3 + \vec{a}_4x_4 = \vec{b}$ оказалась несовместной или неопределенной, то это означало бы, что векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ и $\vec{a}_4$ базис в четырехмерном пространстве не образуют.

ЗАДАНИЯ

3.12. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -14, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_2 - x_3 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = -3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - x_6 = 6, \\ x_1 - x_3 + 2x_5 = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 5; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 \quad - \quad x_4 - x_5 = 0, \\ \quad x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 \quad + \quad x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 \quad - \quad x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

3.13. Построить множество неотрицательных решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \quad + \quad x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \quad = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \quad + \quad 2x_5 = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 \quad + \quad x_4 = 4, \\ x_1 \quad - \quad 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

Решить системы уравнений, отличающиеся правыми частями:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 \quad + \quad 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \quad - \quad x_5 = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 \quad + \quad 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \quad - \quad x_5 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -3. \end{cases}$$

3.15. Найти матрицу, обратную матрице A:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, г) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

д) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, е) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3.16. Определить какой-нибудь базис множества векторов и разложить векторы множества по выбранному базису:

а) $\vec{a}_1 = (1, –1, 2, 0)$,
$\vec{a}_2 = (3, 2, 1, 2)$,
$\vec{a}_3 = (2, –1, –1, 2)$,
$\vec{a}_4 = (1, 0, 2, 0)$,
$\vec{a}_5 = (1, 3, 2, 0)$,
$\vec{a}_6 = (2, 3, 1, 2)$;

б) $\vec{a}_1 = (2, 1, –1, 1)$,
$\vec{a}_2 = (1, 3, 2, –1)$,
$\vec{a}_3 = (–1, 0, –2, 3)$,
$\vec{a}_4 = (1, 2, 0, –1)$,
$\vec{a}_5 = (–2, 3, 6, –6)$,
$\vec{a}_6 = (–2, 4, 0, 3)$;

3.17. Образуют ли векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, базис в n-мерном пространстве? Если да, то вектор $\vec{b}$ разложить по этому базису:

а) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$,
$\vec{a}_2 = (1, 1, 0)$,
$\vec{a}_3 = (1, 0, 1)$,
$\vec{b} = (1, 2, 0)$;

б) $\vec{a}_1 = (1, –1, 2)$,
$\vec{a}_2 = (2, 1, –1)$,
$\vec{a}_3 = (0, 1, 2)$,
$\vec{b} = (–1, –1, 1)$;

в) $\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$,
$\vec{a}_2 = (2, 1, 2)$,
$\vec{a}_3 = (–1, 1, 1)$,
$\vec{b} = (0, –3, –2)$;

г) $\vec{a}_1 = (1, 2, –1, 1)$,
$\vec{a}_2 = (2, 1, –1, 2)$,
$\vec{a}_3 = (–1, 1, 2, –1)$,
$\vec{a}_4 = (0, 1, 1, 1)$,
$\vec{b} = (2, 2, 2, 1)$;

д) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$,
$\vec{a}_2 = (0, 1, 1, –1)$,
$\vec{a}_3 = (1, 1, –1, 0)$,
$\vec{a}_4 = (1, 2, 2, 0)$,
$\vec{b} = (1, 3, 1, 2)$;

е) $\vec{a}_1 = (1, 0, –1, 1)$,
$\vec{a}_2 = (–1, 1, 0, 1)$,
$\vec{a}_3 = (0, –1, 1, –1)$,
$\vec{a}_4 = (2, 0, 1, –1)$,
$\vec{b} = (2, 2, –1, 1)$.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

МИХАЙЛЕНКО Віталій Григорович
СВІЩОВА Євгенія Віталіївна
ПЕТРОВА Анжела Юріївна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

ПРАКТИКУМ

(російською мовою)

В авторській редакції
Компьютерний набір і верстка А. Ю. Петрова

Підписано до друку 25.01.2019 Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Гарнітура «Таймс».
Умов. друк. арк. 7,35 . Обл.-вид. арк. 6,42
Тираж 50 пр. Зам №

План 2018/19 навч. р., поз. № 3 в переліку робіт кафедри.

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво № 1153 від 16.12.2002.

Надруковано у видавництві Народної української академії
Україна, 61000, Харків, МСП, вул. Лермонтовська, 27.