НАРОДНА УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ

В. В. Аніщенко

МАТЕМАТИКА.
ПІДГОТОВКА ДО ОЛІМПІАДИ

Цикл уроків для вчителів і учнів 5-6 класів

Видавництво НУА

НАРОДНА УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ

В. В. Аніщенко

МАТЕМАТИКА.
ПІДГОТОВКА ДО ОЛІМПІАДИ

Цикл уроків для вчителів і учнів 5-6 класів

Харків
Видавництво НУА
2021

УДК 51(075.4)

А67

Затверджено на засіданні кафедри
інформаційних технологій та математики
Народної української академії
Протокол №2 від 6 вересня 2021 р.

Рецензент канд. фіз.-математичних наук, доц. Данилевич С. Б.

Аніщенко, Вікторія Вікторівна.

А67 Математика. Підготовка до олімпіади : цикл уроків для вчителів і учнів 5-6 класів / В. В. Аніщенко; Нар.укр.акад. [каф. інформ. технологій та математики]. – Харків: Вид-во НУА, 2021. – с.

Посібник містить конспекти уроків з 12 традиційних олімпіадних тем. Теми уроків не залежні одна від одної, тому можуть вивчаться в зручному порядку. До змісту уроків входять рекомендації проведення, основні теоретичні відомості до поданої теми, методичні рекомендації до розв'язування задач, задачі для самостійного розв'язку, тести з вибором правильної відповіді, таблиця для самооцінки учнів. Наприкінці кожного уроку до всіх задач і тестів подані розв'язки та роздатковий матеріал.

Посібник адресовано учням 5-6 класів для допомоги в засвоєнні ідей і методів розв'язку олімпіадних задач, а також самостійної підготовки до математичних конкурсів на дистанційному навчанні. Посібник може бути корисним вчителям математики, які можуть використовувати поданий матеріал в роботі з учнями, зацікавлених математикою, в математичних кружках, а також всім, хто цікавиться математикою.

Складено відповідно рекомендацій Центру методичної та аналітичної роботи КВНЗ «Харківська академія неперервної освіти».

УДК 51(075.4)

ЗМІСТ

Урок № 1. Відсотки

«Математика поступається своїми фортецями лише сильним та сміливим».
А.П. Конфорович.

Мета уроку: формування вміння розв’язувати задачі на відсотки
Завдання:
предметні: закріпити вміння розв'язувати задачі на відсотки високого рівня;
комунікативні: розвивати навчальне співробітництво;
регулятивні: закріпити вміння аналізувати, порівнювати, робити висновки, створити умови для прояву ініціативи та самостійності;
пізнавальні: закріпити навички роботи з інформацією;
особистісні: сприяти вихованню позитивного ставлення до навчальної праці, формуванню самостійності в навчально-пізнавальній діяльності, розширити кругозір і науковий світогляд

Рекомендації до уроку
I. Повторити визначення і позначення відсотка
II.Розібрати задачі №1-8
III. На вибір виконати завдання для самостійного розв’язку або виконати тести, відповіді записати в таблицю
IV. Зробити самоаналіз

Хід уроку

I. Визначення та позначення відсотка
Слово "відсоток" походить від латинського слова procentum, що буквально означає "сота частина". **Відсотком** називається одна сота частина числа або величини
Позначення:%
1% = 1/100 = 0,01 (записати в зошит)
- *Як записати десятковий дріб за допомогою відсотків?*
Треба помножити цей дріб на 100 та приписати знак %
Наприклад.
0,4 × 100 = 40% (записати в зошит)
0,54 × 100 = 54% (записати в зошит)
- *Як перевести відсотки в десятковий дріб?*
Треба число відсотків поділити на 100
Наприклад.
32% = 32: 100 = 0,32 (записати в зошит)

6% = 6: 100 = 0,06 (записати в зошит)

Щоб знайти відсоток від числа, треба:
1) записати відсотки звичайним або десятковим дробом;
2) помножити дане число на цей дріб.
I спосіб. Запишемо відсотки у вигляді звичайного дробу:
18% від 300, або 18 / 100 від 300 буде 18·300 / 100 = 54.
II спосіб. Запишемо відсотки у вигляді десяткового дробу:
18% від 300 або 0,18·300 = 54.
Щоб знайти число за його відсотком, треба:
1) висловити відсотки звичайної чи десятковим дробом;
2) розділити дане число на отриману дріб.
Знайти таке число, 16% якого дорівнюють 4.
4: 16/100 = 4·100 / 16 = 100/4 = 25, або 4: 0,16 = 25.
II. Задачі
Задача 1. *У драмгуртку кількість хлопчиків становить 80% від числа дівчаток. Скільки відсотків становить число дівчаток від кількості хлопчиків у цьому гуртку?*
Розв'язок
I спосіб. Число хлопчиків складають 80% від числа дівчаток (100%). Визначимо, скільки відсотків складають 100% від 80%:
100/80 = 100 × 100/80% = 125%.
II спосіб. Число хлопчиків (m) складають 80% від числа дівчаток (d), звідси, m = 0,8d. Звідси d = 1,25m, тобто число дівчаток становить 125% від числа хлопчиків.
III спосіб. На 10 дівчаток припадає 8 хлопчиків, число дівчаток становить 10/8 або 125% від числа хлопчиків.

Задача 2. *Торговець продав книгу зі знижкою 5% від призначеної ціни і отримав 14% прибутку. Скільки відсотків прибутку планував отримати торговець після продажу книги?*
Розв'язок
Нехай торговець планував продати книгу за а грн., Тоді він продав її за
(1 - 0,05) а = 0,95а грн. Ця сума склала 100 + 14 = 114 (%) ціни, за яку продавець сам купив книгу і яка становила 0,95а / 1,14 = 5/6 а грн. Підрахуємо дохід, який планував отримати торговець (у відсотках):
а: 5/6 а • 100 = 120 (%).
Торговець планував отримати 120 - 100 = 20% доходу.

Задача 3. *Ціну картоплі підвищили на 20%. Через деякий час ціну знизили на 20%. Коли картопля коштувала дешевше: до підвищення або після зниження?*
Розв'язок
Якщо ціну картоплі до підвищення прийняти за 100 частин, то після

підвищення вона склала 120 частин, а після зниження на 20% ціна зменшилася на 120 • 20: 100 = 24 частини і стала дорівнювати 120 - 24 = 96 частин, тобто склала 96% вихідної ціни.
Обчислення простіше було провести так: 1,2 • 0,8 = 0,96.
(Обов'язково розберіться, чому помножити на 1,2 - значить збільшити на 20%, а помножити на 0,8 - значить зменшити на 20%.)
Відповідь. Після зниження ціни картопля стала на 4% дешевше, ніж до підвищення.

Задача 4. *Перший множник збільшили на 50%, а другий множник зменшили на 50%. Як змінився добуток?*
Розв'язок
Нехай x – 1 множник, y - 2 множник. Збільшивши x на 50%, отримаємо 1,5x. Зменшивши y на 50%, отримаємо 0,5y. Добуток перетворився в
1,5x • 0,5y = 0,75xy, що становить 75% первісного добутку xy.
Відповідь. Добуток зменшився на 25%.

Задача 5. *В одному магазині ціни зменшили на 10%, а потім ще на 10% (від нового рівня). А в іншому ціни просто відразу знизили на 20%. Що вигідніше для покупця?*
Розв'язок
Зменшити число на 10% - те ж саме, що помножити його на 0,9; зменшити на 20% - помножити на 0,8. Таким чином, якщо x - початкова ціна товару, то після зниження в першому магазині вона стане дорівнювати
0,9 • 0,9 • x = 0,81x, в той час як у другому магазині - 0,8x.
Відповідь. Вигідніше робити покупки в другому магазині.

Задача 6. *Навесні Обломов зменшив у вазі 25%, за літо додав 20%, восени схуд на 10%, а за зиму додав 20%. Схуд він або погладшав за рік?*
Розв'язок
Якщо прийняти за x початкову вагу Обломова, то до кінця весни Обломов важив 0,75x, до кінця літа - 1,2 • 0,75x, до кінця осені - 0,9 • 1,2 • 0,75x, а до кінця року -
1,2 • 0,9 • 1,2 • 0,75x = 0,972x <x.
Відповідь. Схуд.

Задача 7. *Вода Тихого Океану містить 3,5% солі (за вагою). Скільки прісної води треба додати до 40 кг такої води, щоб вміст солі в суміші склав 0,5%?*
Розв'язок
Для початку знайдемо масу солі в 40 кг морської води. Вона дорівнює 40: 100 • 3,5 = 1,4 кг. Стільки ж солі вийде і в суміші, яку нам потрібно отримати (адже додаємо ми прісну воду). Знайдемо масу m цієї суміші, знаючи, що 0,5% від неї рівні 1,4 кг: m: 100 • 0,5 = 1,4.

Звідси m = 280. Таким чином, потрібно додати 240 літрів прісної води.

Задача 8. *Яке найменше число учасників може бути в гуртку левітації, якщо хлопчиків в ньому менше 50%, але більше 40%?*

Розв'язок

Позначимо загальне число учасників гуртка буквою n, а число хлопчиків серед них - буквою m. Тоді за умовою $40 < (m / n) \cdot 100 < 50$,
тобто $2m < n < 2{,}5m$. Очевидно, при m = 1 і при m = 2 цілого значення n, що задовольняє цим нерівностям, не існує. При m = 3 таке значення вже є. Це n = 7. При m> 3 значення n, очевидно, більше 7.

Відповідь. 7.

ІІІ. Задачі для самостійного розв'язування

Задача №1

Заробітна плата робітника в грошовому виразі зросла на 20% і одночасно з цим на 20% знизилися ціни на продукти харчування та інші товари. На скільки збільшилася реальна заробітна плата?

Задача №2

Ринкова ціна картоплі в зв'язку з похмурої погодою підвищилася на 20%. Через деякий час ціна картоплі знизилася на 20%. Коли картопля коштувала дешевше: до підвищення або після зниження?

Задача №3

На скільки % збільшиться площа прямокутника, якщо довжину прямокутника збільшити на 20%, а ширину на 10%.

Задача №4

Радіус кола збільшили на 20%. На скільки % збільшилася площа кола?

Задача №5

Розкладіть 80 зошитів на дві стопки так, щоб число зошитів однієї з них склало 60% числа зошитів іншого стопки.

Задача №6

Як зміниться ціна товару, якщо спочатку її збільшили на 100%, а потім зменшили на 50%?

Задача №7

Алик, Боря і Вася збирали гриби. Боря зібрав грибів на 20% більше, ніж Алик, але на 20% менше, ніж Вася. На скільки відсотків більше, ніж Алик, зібрав грибів Вася?

Задача №8

М.В. Ломоносов витрачав один грошик на хліб і квас. Коли ціни зросли на 20%, на той же грошик він купляв півхліба і квас. Чи вистачить того ж грошика хоча б на квас, якщо ціни ще раз виростуть на 20%?

Задача №9

Пройшовши половину шляху, катер збільшив швидкість на 25% і тому прибув на півгодини раніше. Скільки часу він рухався?

Задача №10

У вересні проїзний квиток на метро коштував 800 грн. У жовтні вартість квитка збільшили, в результаті чого число проданих квитків зменшилася на 25%, а виручка від їх продажу зменшилася на 6,25%. Скільки став коштувати проїзний квиток в жовтні?

Таблиця для відповідей:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*

Тести. Завдання на відсотки

Задача 1. Ціна на черевики становила 2000 грн. Спочатку вона збільшилася на 10%, а потім знизилася на 20%. Знайдіть нову ціну на черевики.

Виберіть відповідь:

1) 1760 грн
2) 1640 грн
3) 1780 грн
4) 1800 грн
5) 1500 грн
6) 1820 грн

Задача 2. Спочатку товар подешевшав на 10%, потім подорожчав на 40% і став коштувати 504 грн. Знайдіть початкову вартість товару.

Виберіть відповідь:

1) 400 грн.
2) 360 грн.
3) 380 грн.
4) 300 грн.
5) 420 грн.
6) 410 грн.

Задача 3. Ціна на товар спочатку збільшилася на 20%, а потім знизилася на 20%. На скільки відсотків і як змінилася ціна на товар в підсумку?

Виберіть відповідь:

1) Знизилася на 4%
2) Знизилася на 10%
3) Не змінилася
4) Виросла на 4%
5) Виросла на 10%
6) Знизилася на 6%

Задача 4. Ціна на товар спочатку зросла на 20%, потім двічі знизилася на 10%. На скільки % і як змінилася ціна в порівнянні з початковою?

Виберіть відповідь:

1) Знизилася на 2,8%
2) Не змінилася
3) Знизилася на 2%
4) Виросла на 2,8%
5) Виросла на 2%
6) Виросла на 3,2%

Задача 5. Штани подорожчали на 25%. На скільки % потрібно знизити їх ціну до початкової?
Виберіть відповідь:

1) На 20%	4) На 25%
2) На 15%	5) На 15,5%
3) На 18%	6) На 22%

Задача 6. Довжина прямокутника збільшилася на 30%, а ширина на 5%. Як збільшилася його площа?
Виберіть відповідь:

1) На 36,5%	4) На 25%
2) На 35%	5) На 25,5%
3) На 40%	6) На 38,5%

Задача 7. У Ані на 70% більше марок, ніж у Петі, а у Сергія на 30% більше марок, ніж у Петі. Скільки марок у Сергія, якщо всього у них разом 120 марок?
Виберіть відповідь:

1) 39	4) 42
2) 36	5) 45
3) 24	6) 30

Задача 8. Три ящика наповнені горіхами. У другому ящику на 10% більше горіхів, ніж в першому і на 30% більше, ніж в третьому. Скільки горіхів в першому ящику, якщо в першому ящику на 80 горіхів більше, ніж в третьому?
Виберіть відповідь:

1) 520	4) 575
2) 440	5) 676
3) 470	6) 530

IV. Самооцінка учня:

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вдалося отримати результат (рішення, відповідь)?										
Правильно чи з помилкою?										
Самостійно або з чиєюсь допомогою?										

Відповіді до задач:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
50%	**4%**	**32%**	**44%**	**50; 30**	**Залишиться без змін**	**50%**	**Вистачить**	**4,5 год.**	**1000 грн.**

Відповіді до тестів:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1)	**1)**	**1)**	**1)**	**1)**	**1)**	**1)**	**1)**

Розв'язки до задач

Задача №2.
Розв'язок: Нехай початкова вартість картоплі 1, після підвищення цін на 20% ціна картоплі стала 1,2. Після зниження на 20% вартість картоплі стала рівною 0, 96, тобто в порівнянні з початковою ціною знизилася на 4%.

Задача №3
Розв'язок: Нехай *а*, *в* вимірювання прямокутника тоді його площа буде дорівнювати *ав*. Площа зміненого прямокутника буде дорівнює
1,2*а* х1,1*в* = 1,32*ав*, тобто площа збільшилася на 32%.

Задача №4
Розв'язок: Радіус збільшився в 1,2 рази, площа в 1,44 рази, тобто на 44%

Задача №5
Вказівка. Складіть і вирішите рівняння $x + 0{,}6x = 80$.
Відповідь. В одній стопці 50 зошитів, в іншій - 30.

Задача №6
Відповідь. Ціна залишиться без змін, бо спочатку її помножать на 2, а потім розділять на 2.

Задача №7
Розв'язок: Боря зібрав грибів на 20% більше, ніж Алик, тобто Боря зібрав в 1,2 рази більше грибів, ніж Алик. Оскільки Боря зібрав на 20% менше грибів, ніж Вася, то Боря зібрав 0,8 від зібраного Васею кількості грибів, тобто Вася зібрав в 1: 0,8 = 1,25 рази більше, ніж Боря. Враховуючи, що Боря зібрав в 1,2 рази більше, ніж Алик, робимо висновок: Вася зібрав грибів в 1,2 • 1,25 = 1,5 рази більше, ніж Алик.
Зверніть увагу: висловлювання «число *x* на 20% менше числа *y*» і «число *y* на

20% більше числа *x*» мають різне значення!
Відповідь. На 50%.

Задача№8

Вказівка. Приймемо грошик за одиницю, вартість хліба позначимо літерою x, а вартість квасу - буквою y. Складемо рівняння:
$x + y = 1$ - до підвищення цін,
$1{,}2\ (0{,}5x + y) = 1$ - після підвищення.
Значить, $0{,}6x + 1{,}2y = 1$.
Тепер легко знайти x і y, а потім порахувати $1{,}2 \cdot 1{,}2y$ - вартість квасу після двох підвищень цін.
Відповідь. Досить.

Задача №9

Рішення. Нехай t - час, витрачений катером на першу половину шляху. Другу половину шляху він йшов зі швидкістю, в 1,25 рази більшою запланованої, а значить, витратив в 1,25 рази менше часу, тобто $t / 1{,}25 = 0{,}8t$. Складемо рівняння:
$0{,}8t = t - 1/2$.
Звідси $t = 2{,}5$. Таким чином, першу половину шляху катер пройшов за 2,5 години, а другу - за 2 години.
Відповідь. 4,5 години.

Задача №10

Рішення. Нехай до підвищення ціни було продано n квитків, а виручка склала s грн. Тоді $800n = s$.
Нехай x грн. - нова ціна квитка. Оскільки після підвищення ціни було продано $0{,}75n$ квитків, а виручка склала $s - 0{,}0625s = 0{,}9375s$ грн., то
$0{,}75nx = 0{,}9375s = 0{,}9325 \cdot 800n$.
отже, $x = 0{,}9375 \cdot 800 : 0{,}75 = 1000$.
Відповідь. 1000 грн.

Урок № 2. Тема. Принцип Діріхле

Мета уроку:
• *освітня:* познайомити учнів з узагальненим принципом Діріхле і типами задач, що розв'язуються цим методом.
• *розвиваюча*: через розв'язування задач за допомогою методу Діріхле розвивати вміння аналізувати, систематизувати, узагальнювати.
• *виховна:* за допомогою організації заняття виховувати посидючість, наполегливість в досягненні мети, інтерес до математики.
Завдання:
комунікативні: розвивати вміння точно і грамотно висловлювати свої думки, відстоювати свою точку зору.
регулятивні: сформувати розуміння відмінності інтуїтивних міркувань від доведення; розвивати вміння розрізняти в завданні умову і висновок.
пізнавальні: зрівнювати характеристики об'єктів по одній або декількох ознакам; виявляти подібності та відмінності об'єктів, при розпливчастих формулюваннях отримувати деяку достовірну інформацію, познайомитися з методом оцінки і навчитися користуватися деякими властивостями нерівностей.
особистісні: формування стійкої мотивації до аналізу; стійкої мотивації до вивчення і закріплення нового; навичок самоаналізу і самоконтролю.

Рекомендації до уроку
I. Познайомитись з поняттям «принцип Діріхле»
II. На прикладах розібрати методи розв'язування задач №1-12
III. На вибір виконати завдання для самостійного розв'язку або виконати тести, відповіді записати в таблицю
IV. Зробити самоаналіз

Хід уроку

I. Принцип Діріхле
Розглянемо **Задачу 1.** *Довести, що з числа будь-яких 13 учнів знайдуться що найменше 2 учні, чиї місяці народження співпадуть.*

- *Як, на вашу думку, ми можемо відповісти на це питання?*
- *Логічний прийом, який був використаний при розв'язку цієї задачі, називається **принципом Діріхле.***

Діріхле Петер Август Лежен (1805-1859) - німецький математик, іноземний член Петербурзької Академії наук, член багатьох академій. Діріхле - автор багатьох досягнень в області математики, одна з його заслуг - принцип доведення, названий його ім'ям.

<u>Принцип Діріхле полягає в наступному</u>*: **«Якщо в n кліток посадити m зайців де n менше m , то знайдеться хоча б одна клітка, в якій знаходиться не менше ніж двох зайців»**.*

Ще застосовується таке формулювання:

***«Нехай в n клітках сидять m зайців, причому n> m. Тоді знайдеться хоча б одна порожня клітка »**.*

На перший погляд, незрозуміло, чому це абсолютно очевидне твердження, є потужним математичним методом розв'язку задач, причому найрізноманітніших. Вся справа в тому, що в кожній конкретній задачі нелегко зрозуміти, що ж тут виступає в ролі «зайців», а що - в ролі «кліток». І чому треба, щоб «зайців» було більше, ніж «кліток». Вибір «зайців» і «кліток» часто неочевидний. Далеко не завжди за умовою задачі можна визначити, що слід застосувати принцип Діріхле. Головне достоїнство даного методу розв'язку в тому, що він дає неконструктивний розв'язок, спроба ж дати конструктивний розв'язок призводить до великих труднощів.

Розв'язок запропонованої задачі.

Кількість місяців - клітки, кількість учнів - зайці.

Дійсно, так як кількість місяців в році 12, то з 13 учнів знайдеться принаймні 2 учні з однаковим місяцем народження.

Серед задач такого типу зустрічаються більш складні і тому ми розглянемо *<u>узагальнений принцип Діріхле</u>*:

«***Якщо в клітки посадити kn+1 зайців, то знайдеться хоча б одна клітка, в якій знаходиться не менше ніж k+1 зайців***».

Доведемо узагальнений принцип Діріхле.

Доказ від супротивного. Припустимо, що не знайдеться такої клітки. Звідси, в кожній клітці знаходиться не більше ніж k зайців. Тоді в n клітках не більше ніж kn зайців. Але, за умовою, у нас було $kn+1$ зайців. Вийшло протиріччя, значить наше припущення невірно. Отже, знайдеться хоча б одна клітка, в якій знаходяться не менше ніж $kn+1$ заєць.

Твердження принципу Діріхле можна розділити на умову і висновок. Покажемо це за допомогою таблиці - помічниці:

Умова		*Висновок*
n кліток	$kn+1$ зайців	Не меньше ніж $k+1$ заяц
…	…	…

Цю таблицю ми можемо використовувати при розв'язку задач.

II. Задачі

Задача 2. *У місті 15 шкіл. У них навчається 6015 школярів. У концертному залі 400 місць. Доведіть, що знайдеться школа, учні якої не помістяться в цьому залі.*

Розв'язок: Припустимо, що в кожній школі не більше 400 учнів. Значить, в 15 школах не більше 15*400=6000 школярів. Але, за умовою, в школах навчається 6015 учнів. Значить, знайдеться школа, в якій більше 400 учнів. Тому учні цієї школи не вмістяться в залі на 400 місць.

Таблиця наочно показує використання принципу Діріхле:

Умова		*Висновок*
n шкіл	$kn+1$ учнів	Не меньше ніж $k+1$ учнів
15 шкіл	$6015=(15\cdot 400+1)+14$ учнів	Не меньше ніж $400+1$ учнів

Отже, знайдеться школа, в якій більше 400 учнів, які не помістяться в цьому залі.

Задачі на принцип Діріхле умовно можна розділити на три типи:
1тип - «Скільки потрібно взяти? ..»,
2тип - «Доведіть, що знайдуться двоє ...»,
3 тип - Узагальнений принцип Діріхле відповідно до питання к задачі.
Кожен тип задач можна розв'язати з використанням таблиці - помічниці.

1тип «Скільки потрібно взяти? ..»

Задача 3. *В мішку лежать кульки двох різних кольорів. Яке найменше число кульок потрібно вийняти з мішка, щоб серед них обов'язково виявилися два кульки одного кольору?*

Розв'язок: тут роль «зайців» грають кульки (*m=?*), роль «кліток» - кольори (*n=2*). Щоб $m>n$, тобто в одному ящику виявилося два предмета, їх повинно бути більше двох, тобто $m=3$

Задача 4. *В коробці лежать олівці: 7 червоних і 5 синіх. У темряві беруть олівці. Скільки олівців треба взяти, щоб серед них було не менше 2 червоних і не менше 3 синіх?*

Розв'язок: якщо припустити, що спочатку будуть попадатися тільки червоні олівці, то для того, щоб було не менше 3 синіх і не менше 2 червоних, потрібно взяти 7 (червоні) +3 (n) = 10.

2тип. «Доведіть, що знайдуться двоє ...»

Задача 5. *При якому найменшому кількості учнів школи серед них обов'язково знайдуться двоє, у яких день і місяць народження збігаються?*

Розв'язок: Днів у році $n = 365$ или 366,то за принципом Діріхле $m = 366$ або 367.

Задача 6. *У лісі росте мільйон ялинок. Відомо, що на кожній з них не більше 600 000 голок. Доведіть, що в лісі знайдуться хоча б дві ялинки з однаковим числом голок.*

Розв'язок: якщо припустити, що у всіх ялинок різна кількість голок, то таких ялинок 600 000 (це ящики, n = 600 000), а за умовою ялинок 1000 000 = m, то m> n, за принципом Діріхле знайдуться хоча б дві ялинки «в одному ящику», тобто з однаковою кількістю голок.

Умова		*Висновок*
n клеток	$m = kn + 1$ зайців	Не менше ніж $k + 1$ заяць
$n \leq 600\,000$ голок	m =1000 000= $1 \cdot 600\,000 + 400\,000$ ялинок	Не менше 1+ ніж1+1= 2 ялинки з однаковою кількістю голок

<u>3 тип. Узагальнений принцип Діріхле:</u> *якщо по n скриньках розкласти предмети, число яких m більше, ніж n* k (де k - натуральне число), то знайдеться скринька, в якій знаходяться більше k предметів.*

Задача 7. *У магазин привезли 25 ящиків з яблуками трьох сортів, причому в кожному ящику лежали яблука якогось одного сорту. Чи можна знайти 9 ящиків з яблуками одного сорту?*

Розв'язок: $25 : 3 = 8$ (ост.1). $25 = 8 \cdot 3$ +1. к $= 3$, $n = 8$, *m*>*n*, то за принципом Діріхле знайдється хоча б один ящик, в якому знаходяться більше, ніж *k*=*3* предметів, тобто 4 предмета.

Задача 8. *На майданчику 20 собак восьми різних порід. Доведіть, що серед них є не менше трьох собак однієї породи.*

Розв'язок: 20: 8 = 2 (ост. 4), 20 = 8 2 + 4. к = 2, n = 8, m> n, то за принципом Діріхле знайдуться хоча б три собаки однієї породи.

Умова		*Заключение*
n кліток	$m = kn + 1$ зайців	Не меньше ніж $k + 1$ заяц
$n \leq 8$ пород	m =20= $2 \cdot 8 + 4$ собак	Не меньше ніж 2+1= 3 собаки однієї породи

Принцип Діріхле можна використовувати в багатьох задачах замість доведення від супротивного. Часто це скорочує розв'язок і робить його прозорішим.

Задача 9. *У кошику лежать білі й чорні кульки, разом 100 штук. Яку найменшу кількість кульок потрібно вийняти наосліп, щоб серед них обов'язково виявилися дві кульки одного кольору?*

Розв'язок (без принципу Діріхле). Одразу ясно, що якщо витягнути тільки дві кульки, то вони можуть бути й різних кольорів. Отже, треба витягнути хоча б три кульки. Але чому трьох кульок вистачить?

Це можна *довести від супротивного.* Припустимо, трьох кульок недостатньо. Це означає, що ми можемо витягнути три кульки так, що серед них не буде двох кульок одного кольору. Але тоді ми можемо витягнути не більше одної білої і не більше одної чорної кульки, тобто разом – не більше двох кульок. Але ми витягуємо три. Суперечність.

Ми довели, що:

1) якщо витягнути дві кульки, вони можуть бути різних кольорів,

2) але серед трьох кульок обов'язково знайдуться дві кульки одного кольору.

Отже, в цій задачі *відповідь* – 3.

Зазначимо, що в наших міркуваннях ми не використовували кількість кульок у кошику, нам тільки важливо, щоб їх було не менше трьох.

Розв'язок перебором.

У цій задачі можна розглянути всі випадки кольорів кульок. Три кульки могли бути такими:

– біла, біла, біла;

– біла, біла, чорна;

–біла, чорна, чорна;

–чорна, чорна, чорна.

Бачимо, що в кожному з випадків є дві кульки одного кольору. Отже, трьох кульок вистачить.

Зауважимо, що у таких задачах перебір буває дуже громіздкий, і його застосування зазвичай практично неможливе.

Розв'язок (із принципом Діріхле).

Тепер до цієї ж задачі застосуємо принцип Діріхле. А саме, за допомогою принципу Діріхле доведемо, що серед трьох кульок обов'язково знайдуться дві кульки одного кольору.

Кроликів, звичайно, в задачі немає. Але ми будемо вважати, що кролики – це кульки.

Цих «кроликів» ми збираємося розсаджувати по клітках... Тепер треба вибрати, що зробити з клітками.

Будемо міркувати так: принцип Діріхле стверджує, що за певних умов два кролики опиняться в одній клітці. А нам потрібно довести, що якщо ми витягнемо три кульки, то серед них будуть дві кульки одного кольору. Тому є сенс взяти за клітки *кольори кульок*. Витягуючи кульку, ми кладемо її у «клітку», що відповідає її кольору.

Білий колір Чорний колір 3кульки

Тепер зрозуміло, що якщо ми витягнемо три кульки, то за принципом Діріхле дві з них опиняться в одній клітці, тобто будуть одного кольору.

Міркування за допомогою принципу Діріхле виявляється простішим, ніж доведення від супротивного. Достатньо правильно знайти кроликів і клітки.

Але іноді в задачі далеко не відразу зрозуміло, що є клітками, а що – кроликами. Розв'яжемо, наприклад, таку задачку.

Задача 10. *В одному далекому північному лісі росте мільйон ялинок. Відомо, що на кожній з них – не більше 900000 голок. Доведіть, що в цьому лісі знайдуться дві ялинки з однаковою кількістю голок.*

Розв'язок. Міркуємо так. У принципі Діріхле два кролики опиняються в одній клітці. А нам треба довести, що знайдуться дві ялинки з однаковою кількістю голок.

Тому давай поставимо у відповідність кожній можливій *кількості голок на ялинці* одну клітку і розкладемо (звичайно, уявно!) наші ялинки по цих клітках – ялинку з N голками «посадимо» в N-у клітку.

Клітка для ялинок без голок (з 0 голок)	Клітка для ялинок з 1 голкою	Клітка для ялинок з 2 голками	. . .	Клітка для ялинок з 900000 голок

Тобто, кролики – це ялинки. Кліток всього 900001 (від 0 до 900000 голок), а кроликів- ялинок – мільйон. Отже, за принципом Діріхле в якійсь клітці опиняться два кролики, тобто дві ялинки. Це і буде означати, що у них однакова кількість голок.

Одна з особливостей принципу Діріхле полягає в тому, що доведення не конструктивне: ми *не шукали* у далекому північному лісі двох ялинок з однаковою кількістю голок, але ми точно знаємо, що вони там є! Тобто, доведення існування не дало нам змогу знайти об'єкт, існування якого ми довели.

Задача 11. *У математичному гуртку вчаться 15 школярів. Доведіть, що якісь двоє з них відзначають свій день народження в одному й тому ж місяці.*

Розв'язок. Нехай кролики – це учні, а клітки – місяці року (з січня по грудень). Рік складається з 12 місяців, а в гуртку – 15 кроликів... тобто 15 учнів. Посадимо кожного учня до клітки з назвою місяця, в якому він святкує свій день народження. За принципом Діріхле, в якійсь з кліток сидять 2 кролики. Тобто в якомусь місяці народилося хоча б два учні, що й потрібно було довести.

Ми розглянули задачі, в яких кролики і клітки (хоч і під іншими назвами) були *безпосередньо в умові. Іноді їх в умові задачі немає взагалі, проте якщо їх вдало ввести, то задача може стати простою вправою на принцип Діріхле. Ось, наприклад, така задачка.*

Задача 12. *У квадрат зі стороною 21 сантиметр кинули 99 точок. Доведіть, що якісь три з них можна накрити квадратом зі стороною 3 см.*

Розв'язок.

По-перше, що означають слова «кинули 99 точок»? Це означає «відмітили абияк, без усякого наперед заданого порядку». Наперед невідомо, як саме. Відомо тільки, що точок – 99, і що вімітили їх усі на квадраті зі стороною 21 сантиметр.

Ця задача на перший погляд не схожа на задачу на принцип Діріхле. Точки можна було б розглядати як кроликів, але тоді тут немає кліток. Тому клітки потрібно *створити.* Які клітки могли б допомогти в розв'язанні нашої задачі?

Було б добре, якби це були частини квадрата, причому розміру 3 х 3см^2. І щоб в якусь із них потрапило три точки. Нам потрібно, щоб клітки покривали весь квадрат, інакше у нас кролики-точки зможуть потрапляти повз клітки, а цього принцип Діріхле не допускає.

Отже, розріжемо квадрат 21х 21см^2 на квадратики 3 х 3см^2 (прямими, паралельними сторонам квадрата). Маленьких квадратиків буде 7 х 7 = 49. Але 99=2 х 49+1, тобто, за принципом Діріхле, в якійсь з квадратиків 3 х 3потрапить хоча б три точки. Що і треба було довести.

Бачимо, що задачі можуть розв'язуватися за допомогою принципу Діріхле, навіть якщо в них спочатку немає ані «кроликів», ані «кліток». Їх можна ввести самому. Головне – спробувати зрозуміти, які кролики і клітки можуть допомогти розв'язати задачу.

Висновки:

Таким чином, застосовуючи даний метод, треба:

1) визначити, що зручно в завданні прийняти за «клітки», а що за «зайців»;

2) отримати «клітки». Найчастіше «кліток» менше (більше), ніж «зайців» на одну (або більше);

3) вибрати для розв'язку необхідне формулювання принципу Діріхле.

ІІІ. Задачі для самостійного розв'язування

<u>Задача 1.</u> Кіт Базиліо пообіцяв Буратіно відкрити велику таємницю, якщо він складе чудовий квадрат 6 × 6 з чисел +1, -1, 0 так, щоб всі суми по рядках, по стовпцях і по великих діагоналях були різні. Допоможіть Буратіно.

<u>Задача 2.</u> На залік прийшли 65 школярів. Їм запропонували 3 контрольні роботи. За кожну контрольну можно отримати одну з оцінок: 2, 3, 4 або 5. Чи вірно, що знайдуться два школяра, які отримали однакові оцінки за контрольну?

Задача 3. У школі 735 учнів. Чи можна стверджувати, що, принаймні, 3 учні повинні відзначати день свого народження в один день?

Задача 4. Чи вірно, що з 6-ти будь-яких цілих чисел, знайдуться два числа, різниця яких ділитися на 5?

Задача 5. У класі 30 учнів. Паша зробив 13 помилок, а решта менше. Довести, що якісь три учня зробили однакову кількість помилок.

Задача 6. У квадратному килимі зі стороною 1 м моль проїла 51 дірку (дірка - крапка). Доведіть, що деякою квадратної латкою зі стороною 20 см можна закрити не менше трьох дірок.

Таблиця для відповідей:

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***

IV. Тести *на принцип Діріхле*

1. У мішку лежать кульки 2-х різних кольорів (багато білих і багато чорних). Яку найменшу кількість кульок треба навмання вийняти з мішка, щоб серед них виявилися дві кульки одного кольору.

Виберіть відповідь:

А) 2 В) 5

Б) 3 Г) 6

2. У коробці лежать 10 червоних олівців, 8 синіх, 8 зелених і 4 жовтих. Навмання (довільно) з коробки виймають n олівців. Визначити найменше число олівців, які необхідно вийняти, щоб серед них було:

1) не менше 4 олівців одного кольору;

2) по одному олівцю кожного кольору;

3) хоча б 6 олівців синього кольору.

Виберіть відповідь:

А) 13 В) 28

Б) 27 Г) 30

3. У класі 27 учнів. Чи знайдеться місяць, в якому відзначають свої дні народження не менше, ніж три учня цього класу?

Виберіть відповідь:

А) Так В) не можливо
Б) Ні Г) інша відповідь

4. У темній кімнаті стоїть шафа, в якій лежить 24 чорних і 24 синіх шкарпетки. Яку мінімальну кількість шкарпеток потрібно взяти з шафи, щоб з них свідомо можна було скласти принаймні одну пару шкарпеток одного кольору?

А) 6 В) 2
Б) 5 Г) 3

5. Яку мінімальну кількість шкарпеток потрібно взяти, щоб свідомо можна було скласти хоча б одну пару чорних шкарпеток?

А) 24 В) 26
Б) 25 Г) 48

6. Як зміниться рішення задачі, якщо в ящику лежать 12 пар чорних і 12 пар синіх черевиків і потрібно скласти пару одного кольору (як в 4 задачі) і пару чорного кольору (як в 5 задачі)? (Черевики, на відміну від шкарпеток, бувають лівими і правими.)

А) 25 В) 25 ;37
Б) 37 Г) 30; 25

V. Самооцінка учня:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Вдалося отримати результат (рішення, відповідь)?						
Правильно чи з помилкою?						
Самостійно або з чиєюсь допомогою?						

Відповіді до задач:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Не можливо	**Вірно**	**Так**	**Вірно**		

Відповіді до тестів:

1	*2 1)*	*2 2)*	*2 3)*	*3*	*4*	*5*	*6*

Б)	**А)**	**Б)**	**В)**	**А)**	**Г)**	**В)**	**В)**

Розв'язки до задач

Задача 1.

Розв'язок. Припустимо, що квадрат складений. Тоді суми чисел можуть змінюватися від - 6 до 6. Всього 13 значень (зайці). Рядків в квадраті 6, стовпців 6, діагоналей 2. Отримуємо: 6 + 6 + 2 = 14 різних місць (клітини). Отримали протиріччя, значить, скласти такий квадрат неможливо.

Задача 2.

Розв'язок. Маємо 65 школярів - «зайці». Розглянемо безліч наборів з трьох оцінок за відповідні контрольні. Кількість таких наборів $4 \cdot 4 \cdot 4 = 43$ або 64 (4 можливості за кожну з трьох робіт) - «клітки». Оскільки $65 > 64$, то за принципом Діріхле якимось двом учням відповідає один набір оцінок.

Задача 3.

Розв'язок. Так. Так як навіть з урахуванням високосного року: $735/366 > 2$ або $735 = 366 \cdot 2 + 3$.

Задача 4.

Розв'язок. Нехай будь-які 6 чисел - це зайці. Залишки від ділення на $5: 0, 1, 2, 3, 4$, тобто їх всього 5 - це клітки, в кожну з яких будемо поміщати числа, що дають однаковий залишок при діленні на 5. Маємо 6 зайців в 5 клітках. Значить, обов'язково знайдеться два числа, що дають однакові залишки при діленні на 5. Виходить, їх різниця ділиться на 5.

Задача 5.

Розв'язок. За умовою задачі найбільше число помилок, зроблених в роботі 13. Значить, учні могли зробити 0, 1, 2, ..., 13 помилок. Ці варіанти будуть "клітками", а учні стануть "зайцями". Тоді по (узагальненому) принципу Діріхле (14 клітин і 30 зайців) знайдуться три учня, що потрапили в одну "клітку", тобто зробили однакову кількість помилок.

Задача 6.

Розв'язок. Весь килим можна накрити такими 25 латками. За принципом Діріхле якась із цих латок накриє не менше трьох дірок, так як $51 = 25 \cdot 2 + 1$.

Розв'язки до тестів

1.*Розв'язок.* Це - просто застосування принципу Діріхле: зайцями будуть взяті кульки, а клітками - чорний і білий кольори. Клітки дві, тому якщо кроликів хоча б три, то якісь два потраплять в одну клітку (буде 2 однокольорових кульки). З іншого боку, взяти дві кульки мало, тому що вони можуть бути двох різних кольорів. Відповідь: 3 кульки.

2. ***Розв'язок.*** 1) Так як у нас всього 4 кольори, відповідно до принципу Діріхле (олівці будуть "зайцями", а кольори - "клітками"), во всякому разі, 4 олівця будуть однакового кольору, якщо вийняти 13 олівців.
Доведемо, що n = 13 є найменшим числом. З цією метою покажемо ситуацію, за якою умова задачі не виконуються. Наприклад, коли вийнято по 3 олівця кожного кольору (12 олівців). Відзначимо, що ця ситуація можлива, так як в коробці знаходиться не менше 3 олівців кожного кольору.
Випадки 2) і 3) розв'язуються аналогічно.
Відповідь: 1) 13; 2) 10 + 8 + 8 + 1 = 27; 3) 10 + 8 + 4 + 6 = 28.

3. ***Розв'язок.*** В році 12 місяців. 27: 12 = 2 (ост.3), 27 = 12 * 2 + 3. к = 2, n = 12, m> n, то за принципом Діріхле знайдуться хоча б три учня, у яких дні народження в одному місяці.

4. ***Розв'язок.*** Якщо взяти тільки дві шкарпетки, то вони можуть виявитися різних кольорів, і скласти з них пару не вийде. А з трьох шкарпеток дві точно будуть одного кольору. *Відповідь:* 3.

5. ***Розв'язок.*** Якщо взяти 25 шкарпеток, то 24 з них можуть виявитися синіми, і скласти чорну пару не вийде. Якщо ж взяти 26 шкарпеток, то синіх серед них не може бути більше 24, тому точно будуть дві чорних. *Відповідь:* 26.

6. ***Розв'язок.*** Якщо взяти 24 черевика, то всі вони можуть виявитися лівими, і скласти пару з них не вийде. Розіб'ємо всі 48 черевик на пари. Пар буде 24. Якщо взяти 25 черевики, то два з них точно будуть з однієї пари. Якщо взяти 36 черевиків, то 24 з них можуть виявитися синіми, а решта 12 - лівими чорними, і скласти з них чорну пару не вийде. Якщо взяти 37 черевиків, то хоча б 13 з них будуть чорними, а значить, буде точно хоча б один чорний лівий і хоча б один чорний правий. *Відповідь:* 25 і 37.

Урок № 3. Тема. Розфарбування

Я розмалюю цілий світ в мій найулюбленіший колір!
А. Арканов

Мета уроку:
• *освітня:* навчити учнів розв'язувати задачі методом розфарбування та познайомити з типами задач, що розв'язуються цим методом.
• *розвиваюча*: через розв'язування задач за допомогою методу розфарбування розвивати вміння аналізувати, систематизувати, узагальнювати.
• *виховна:* за допомогою організації заняття виховувати посидючість, наполегливість в досягненні мети, інтерес до математики.
Завдання:
комунікативні: розвивати вміння точно і грамотно висловлювати свої думки, відстоювати свою точку зору.
регулятивні: сформувати розуміння відмінності інтуїтивних міркувань від доведення.
пізнавальні: вчитись конструювати розкраски за даною умовою, закріпити вміння аналізувати, порівнювати, робити висновки, створити умови для прояву ініціативи та самостійності;
особистісні: формування стійкої мотивації до аналізу; стійкої мотивації до вивчення і закріплення нового; навичок самоаналізу і самоконтролю.

Рекомендації до уроку

I. Познайомитись з історією метода розфарбування та класифікацією задач з розфарбуванням
II. На прикладах розібрати: методи розв'язування задач №1-4, різні види розмальовок та їх застосування до розв'язування задач на прикладі задачі №5
III. На вибір виконати завдання для самостійного розв'язку або виконати тести, відповіді записати в таблицю
IV. Зробити самоаналіз

Хід уроку

I. Метод розфарбування
Застосування розмальовок дозволяє оригінально, наочно і просто вирішувати олімпіадні задачі і задачі підвищеного рівня складності. Застосування розмальовок для вирішення завдань демонструє красу і естетику математики, сприяє підвищенню загальної культури, розширює математичний кругозір і показує прикладний характер і можливості практичного застосування математичних знань.

Зобразіть на папері карту: області, які межують одна з одною. Розфарбуйте її таким чином, щоб ніякі дві області, які межують, не виявилися розфарбованими в один колір. Якою мінімальною кількістю кольорів можна обійтися при цьому? Нескладно помітити, що всього чотири кольори дозволять зробити таку розмальовку. А ось довести той факт, що для розмальовки будь-якої карти достатньо всього чотири кольори, не так-то просто. Це завдання в математиці відоме як «проблема чотирьох фарб» і є однією з найвідоміших розмальовок в географії і математики.
Вважається, що вперше проблему чотирьох фарб сформулював в 1852 році шотландський студент Френсіс Гутрі. З 1878 року, коли англійський математик Артур Келі повідомив, що міркував над цим завданням, але так і не зміг знайти рішення, проблема чотирьох фарб стала дуже популярна серед учених всіх країн.

Розмальовки застосовують в організації сотового зв'язку, в теорії графів і прикладних сферах. Навіть при складанні таблиць для відомої гри судоку можна використовувати метод розмальовок.

Ідея методу розмальовки полягає в тому, що ми ділимо математичні об'єкти на групи, наділяючи їх деякими властивостями. Кожній групі ставимо у відповідність свій колір, а потім складаємо колірну модель, яка нерідко допомагає знайти правильне рішення.

Класифікація задач з розмальовками

<table>
<tr><td colspan="6">Задачі з розмальовками</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розмальовка дана в умові</td><td>Розмальовку потрібно отримати відповідно до завдання</td><td colspan="3">Розмальовки немає в умові завдання, але її можна застосувати в розв’язку задачі</td></tr>
<tr><td>Задачі на шахматній дошці</td><td>Завдання з розфарбованими об'єктами (площина, фігура)</td><td>Завдання на розфарбовування фігури, площини</td><td>Завдання на розрізування і замощення фігури</td><td>Завдання на заповнення таблиці з заданими умовами</td><td>Інші задачі</td></tr>
</table>

II. Задачі

***Задачі з розфарбуванням в умові*.**

Задачі на шахівниці можна вирішувати, використовуючи властивості цієї дошки і особливості «ходів» шахових фігур. До властивостей шахової дошки відносять загальну кількість клітин, кількість чорних і білих клітин окремо.

Задача 1. *Чи можна шаховим конем обійти всі клітини шахової дошки 5 × 5, побувавши в кожній клітині по одному разу, і повернутися у початкову клітку?*

Ідеї розв'язання: 1) кожен хід коня змінює колір клітини, на якій він стоїть; 2) має бути рівна кількість клітин кожного кольору.

Розв'язок: На полі 13 чорних клітин і 12 білих. 25-м ходом він потрапить на останню чорну клітинку. До цього моменту кінь відвідав всі клітини. Щоб повернутися в початкове положення, потрібно спочатку потрапити на білу клітинку. Протиріччя. Обхід зробити не можна.

Спостереження і висновки: 1) в умові задачі можна змінити розміри поля. Тоді, якщо поле являє собою квадрат зі стороною з непарної кількості клітин, обхід зробити не можна. Якщо сторона квадрата складається з парної кількості клітин, то протиріччя з кількістю чорних і білих клітин на полі не виникає. Однак, для відповіді на поставлене запитання потрібно привести хоча б один можливий варіант обходу. 2) Можна змінити в умові завдання фігуру, що здійснює обхід. Так, в задачах зустрічається фігура «верблюд», яка, як і кінь, переміщається буквою Г, але по більшій стороні зсувається на 4 клітини. Вона взагалі не зможе зробити такий обхід, тому що з кожним ходом зберігає колір початкової клітини.

Задача 2. *У лівому нижньому куту дошки 9 × 9 стоять 9 шашок, утворюючи квадрат 3 × 3. За один хід можна переставити шашку симетрично іншій, не виходячи за межі дошки. Чи можна за кілька ходів перемістити ці шашки так, щоб вони утворили квадрат а) в лівому верхньому куту, б) в правому верхньому куті, в) в центральному квадраті?*

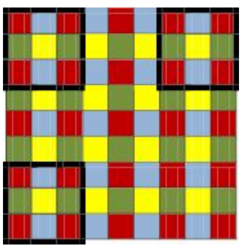


Рис. 1. Перемістити в кути

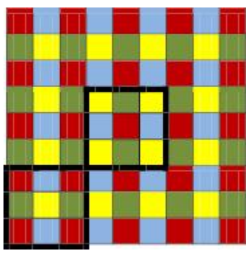


Рис. 2. Перемістити в центр

Ідея розв'язання: розфарбувати клітини дошки таким чином, щоб в один колір були пофарбовані клітини, на які можна перемістити шашки і порівняти розмальовку початкового квадрата 3 × 3 і того, куди ми повинні перемістити шашки. Якщо розфарбування різне, то зробити це неможливо. В даному випадку розфарбування є інваріантом. Інваріант - величина, яка не змінюється в результаті деяких операцій. Якщо інваріант розрізняє кілька положень, то від одного не можна перейти до іншого.

Розв'язок: В червоний колір розфарбуємо ті клітини, на які може перейти ліва нижня шашка. Бачимо, що на ці ж клітини можуть перейти і все решта кутові шашки. Далі, розфарбуємо в синій колір ті клітини, на які може переміститися нижня середня шашка. Бачимо, що на ці ж клітини переміщається верхня середня шашка. Аналогічно закрасимо в жовтий колір клітини, на які може переміститися центральна шашка. Решта поля закрасимо зеленим кольором - на ці клітини можуть переміститися дві що залишилися шашки.

Порівняємо розмальовки полів в квадратах 3 × 3. Всі кутові квадрати розфарбовані однаково, значить, можна перемістити шашки в лівий і правий верхні кути. Експериментальним шляхом ми зробили це. А ось в центральний квадрат перемістити шашки не зможемо, тому що розфарбування відрізняється від розмальовки кутових квадратів.

Спостереження і висновки: 4-хкольорове розфарбування допомагає розв'язати подібні завдання, незалежно від того, квадрати ми розглядаємо або прямокутники, а також не має значення їх розмір і парність кількості клітин на стороні квадрата або прямокутника.

Задача 3. *Пряма розфарбована в два кольори. Доведіть, що знайдуться три крапки одного кольору A, B, C такі, що AB = BC.*

Ідея розв'язку: застосуємо метод від супротивного.

Розв'язок: Нехай немає на прямій такого відрізка, у якого середина і кінці одного кольору. Візьмемо відрізок AC з кінцями першого кольору. Вправо і вліво від точок A і C відкладемо відрізки AM = AC і CK = AC. Кінці M і K цих відрізків пофарбовані в другій колір (відповідно до нашого припущення). Але тоді точка B - середина відрізка MK, яка є і серединою відрізка AC, пофарбована в перший колір. Ми прийшли до того, що всі три точки A, B і C пофарбовані в один колір. Протиріччя. Отже, наше припущення було невірно і такі точки знайдуться.

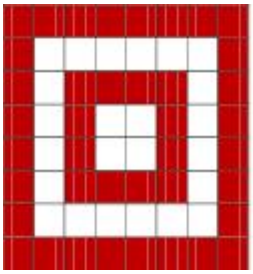
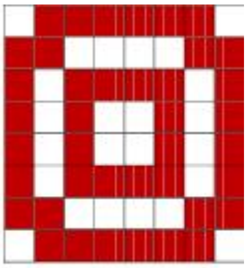
Задачі, в яких потрібно знайти розмальовку

При побудові розмальовок можна користуватися методом подвійного підрахунку (наприклад, порахувати кількість зафарбованих точок по горизонталі і по вертикалі), шляхом поступового конструювання і комбінацією цих методів.

Задача 4. *Розфарбуйте деякі клітини дошки 8 × 8 так, щоб у кожної клітинки було рівно дві сусідні по стороні зафарбовані клітини. Чи можна таким же чином зафарбувати деякі клітини дошки розміром 6 × 20?*

Ідея розв'язку: 1) зауважимо, що кожен з куточків початкового квадрата має рівно по дві сусідні клітини, а значить, вони обов'язково будуть пофарбовані; 2) в першу чергу пофарбуємо клітини, сусідні з діагональними.

Розв'язок: Будемо будувати розмальовку методом поступового конструювання. Закрасимо червоним кольором ті клітини, які точно зафарбовані, а сірим - ті, які точно не зафарбовані (на малюнку номера клітин вказують порядок роботи з ними).

		
Рис. 3. Поступове конструювання	Рис. 4. Розмальовка – перший розв'язок задачі	Рис. 5. Розмальовка – другий розв'язок задачі

Міркуючи аналогічним чином, розфарбуємо прямокутник 6 × 20.

Спостереження і висновки: 1) Ми помітили, що будь-який квадрат з парною кількістю клітин по стороні може бути розфарбований таким чином, щоб кожна клітина мала по два зафарбованих сусіда. Дійсно, на малюнку показаний спосіб такого розфарбування. Бачимо, що квадрат 8 × 8 містить в собі вже зафарбовані квадрати 6 × 6, 4 × 4 і 2 × 2. Правда у квадратів 6 × 6 і 2 × 2 розмальовку потрібно буде інвертувати. Алгоритм побудови розмальовки для парної кількості клітин на стороні такий: фарбуємо зовнішній ряд клітин по всьому периметру, потім по черзі у напрямку до центру - ряд клітин пропускаємо, ряд фарбуємо.

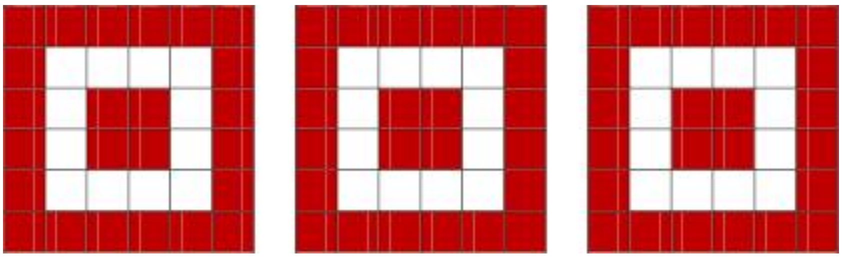


Рис. 6. Розмальовка прямоугольника

2) Квадрат з непарною кількістю клітин на стороні розфарбувати так, як потрібно в завданні не можна. Доведемо. Почнемо зафарбовувати з лівого нижнього кута сусідні з діагональними клітини - в червоний колір ті, які точно зафарбовані і сірий колір ті, які точно не зафарбовані. Пар зафарбованих і не зафарбованих клітин парна кількість (на одну менше, ніж всього клітин на діагоналі). А це означає, що обидві сусідні з правою верхньою кутовою кліткою будуть не зафарбовані. Прийшли до суперечності.

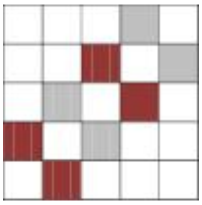


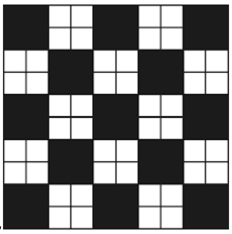
Рис. 7

Розглядаючи різні прямокутники розміром 6 × m, ми прийшли до висновку, що завжди можна розфарбувати прямокутник зі сторонами 6 × 7n-1. Для цього потрібно розфарбувати лівий квадрат 6 × 6, потім пропустити вертикальну смужку клітин, знову зафарбувати квадрат 6 × 6 і т.д. Цей результат можна узагальнити і сформулювати вірне твердження: прямокутник 2n × (2n + 1) * k - 1, де к - не парне можна розфарбувати так, щоб у кожної клітини було рівно дві сусідні по стороні зафарбовані клітини.

<u>Задачі, в яких розфарбування допомагає знайти рішення</u>

Задача 5. *Доведіть, що картату дошку 10 x10 не можна розрізати по лініях сітки на прямокутники 1 x 4.*

Розв'язок 1. Розділимо дошку на квадрати 2 x 2 і розфарбуємо їх у шаховому порядку

.
Рис.8

Зауважимо, що будь-який прямокутник 1 x 4 містить порівну (по 2) чорних і білих клітин, але при даній розмальовці на дошці 52 чорних клітин і 48 білих, тобто не порівну. Слідовно, розрізати дошку 10 x 10 на тетраміно 1 x 4 не вдасться.

Ідея застосування подібної «шахової розмальовки» квадратами 2 x 2 виникає природним чином зі звичайної шахової розмальовки, яка дуже часто застосовується для доміношек 1 x 2. А тут ми маємо справу з фігурою в два рази більше, тому і розфарбування стало в два рази більше, причому в обох напрямках.

Розв'язок 2. Розфарбуємо дошку діагональним розфарбуванням у 4 кольори

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

Рис.9

Зауважимо, що будь-який прямокутник містить по одній клітці кожного з чотирьох кольорів, але при даній розмальовці на дошці по 25 клітин 1-го і 3-го кольору, 26 клітин - 2-го і 24 клітини - 4-го, тобто не порівну. Значить, розрізати дошку 10 х 10 на тетраміно 1 х 4 не вдасться.

Розв'язок 3. Розфарбуємо дошку діагональним розфарбуванням в два кольори

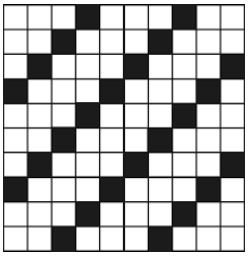


Рис.10

Зауважимо, що будь-який прямокутник містить одну чорну клітинку, а їх на дошці - 24. Таким чином, нам вдасться вирізати не більше 24 тетраміно, а по площі треба 25 штук.

Легко помітити, що дане розфарбування є різновидом діагональної розмальовки на малюнку 2, коли в якості чорного кольору виділений колір номер 4, якого менше 25 клітин. З таким же успіхом можна було б використовувати в якості чорного кольору і колір номер 2, то тоді б ми отримали відразу 26 прямокутників, що неможливо. Крім того, можна було б об'єднати в чорний колір і будь-які два сусідніх кольори з розмальовки на малюнку 2.

Розв'язок 4. Розділимо дошку на квадрати 2 х 2 і розфарбуємо їх в 4 кольори однаковим чином

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4

Рис.11

Тоді кожного кольору у нас буде по 25 клітин (непарна кількість), але при цьому кожен прямокутник містить парну кількість (0 або 2) клітини кожного кольору. І як наслідок, у всіх вирізаних тетраміно має бути в сумі по парній кількості клітин кожного кольору, а не 25, що приводить нас до висновку про неможливість розрізання дошки.

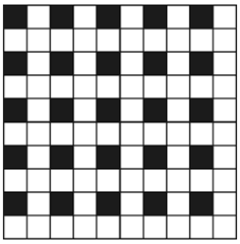


Рис.12

Зауважимо, що розфарбування на рисунку 12 є різновидом попередньої розмальовки на рисунку 11, коли тільки один з чотирьох кольорів виділено в якості чорного, а міркування є принципово таким же. Крім того, дуже важливою властивістю розмальовки з малюнка 11 є те, що вона фактично кожен з двох кольорів звичайної шахової розмальовки в свою чергу теж розфарбувала в шаховому порядку (в даному випадку чорний колір - у 2-й і 3-й, а білий - в 1-й і 4-й). Ця властивість використовується при вирішенні деяких завдань методом розмальовки.

Розв'язок 5. Застосуємо вертикальну смугасту розмальовку дошки в два кольори

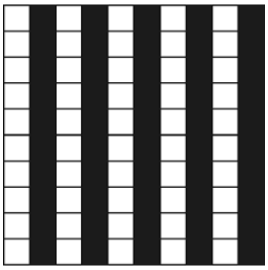


Рис.13

Тоді будь-яка вертикальна фігурка містить кратну 4 (0 або 4) кількість чорних клітин, а будь-яка горизонтальна - 2 чорні клітини. А так як загальна кількість чорних клітин - 50, тобто при розподілі на 4 дає залишок 2, то загальне число горизонтальних прямокутників непарне. Міркуючи аналогічно для горизонтальної смугастої розмальовки, ми доведемо, що загальне число вертикальних прямокутників також непарне, але тоді в сумі у нас повинна бути парна кількість всіх прямокутників, що не може дорівнювати потрібному нам числу 25, тобто висновок - розрізати не вдасться.

У цьому рішенні в повній мірі проявилася специфіка смугастої розмальовки - поділ фігурок на два напрямки. Найцікавіше полягає в тому, що якщо ми будемо вважати при вертикальній смугастій закрасці білий і чорний кольори відповідно за 0 і 1, а при горизонтальній смугастій закрасці - відповідно за 1 і 3, то при накладанні цих розмальовок одна на одну і підрахунку суми чисел в кожній клітині у нас вийде не що інше, як розфарбування квадратами 2 х 2 в чотири кольори з малюнка 11.

Розв'язок 6. Якщо вертикальну розмальовку з рисунка 14

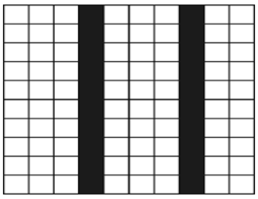


Рис.14

і аналогічну горизонтальну розмальовку накласти одна на одну і для краси поміняти кольори місцями, то вийде наступна ґратчасте розфарбування (рис.15).

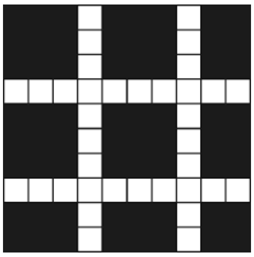


Рис.15

Тоді будь-який прямокутник накриває кратну 3 (0 або 3) кількість чорних клітин, а їх дошка буде кратна 3 кількість (64). І як наслідок, робимо висновок, що всі чорні клітини належати прямокутникам не можуть, а значить, і розрізати дошку 10 х10 на тетраміно 1 х 4 не можна.

Розв'язок 7. Застосуємо ще одну розмальовку в 4 кольори, яка відрізняється від розмальовки в 4 кольори квадратами 2 х 2 зрушенням кожної пари рядів щодо попередньої пари на одну клітку (рис.16).

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4

Рис.16

Тоді кожен горизонтальний прямокутник містить по парній кількості клітин кожного кольору (0 або 2), а кожен вертикальний прямокутник містить по одній клітці кожного кольору. Так як кожного кольору буде по 25 клітин, то з вище викладеного випливає, що кількість вертикальних прямокутників непарна. Повернемо розмальовку на 90 ° і отримаємо, що кількість горизонтальних прямокутників непарна. Тоді в сумі у нас повинно бути парна кількість всіх прямокутників, що не може дорівнювати потрібного нам числу 25, тобто висновок - розрізати не вдасться.

Висновок. Наведені рішення наочно проілюстрували красу методу розмальовки, а заодно і специфічні властивості кожної з розмальовок окремо, особливо їх взаємозв'язок при накладенні одна на одну.

Зауважимо ще, що розглянута нами задача про розрізання дошки на фігурки 1 х 4 - окремий випадок узагальненої задачі. Нехай ми хочемо розрізати прямокутну дошку на однакові картаті смужки 1 х N. Коли це можливо? Виявляється, відповідь дуже проста – це можливо тільки тоді, коли довжина хоча б однієї зі сторін дошки ділиться на N. Іншими словами, якщо хоч якийсь спосіб розрізання є, то обов'язково є і «тривіальний» спосіб - коли всі смужки розташовані «однаково» (або вертикально, або горизонтально). Вирішити цю загальну задачу не так-то просто, але і тут є рішення, що використовує розмальовку!

III. Задачі для самостійного розв'язування

<u>Задача 1.</u> Дан квадрат 7 х 7 клітинок. Чи можливо, так покрасити деякі клітинки, щоб у будь-якому квадраті 2 х 2 була тільки одна замальована клітинка?

<u>Задача 2</u>. Заповніть таблицю 6 × 6 числами так, щоб сума чисел у всій таблиці була парною, а в кожному прямокутнику 1 × 4 - непарною.

<u>Задача 3.</u> Кожна точка на прямій пофарбована або в червоний, або в синій колір. Доведіть, що можна вибрати три точки одного кольору так, що одна з них лежить рівно посередині між двома іншими.

<u>Задача 4.</u> П'ятнадцять хуліганів вийшли на демонстрацію з кульками і вишикувалися в колону 3 × 5. За командою кожен проткнув голкою кульку свого

<u>Задача 5.</u> Площина пофарбована у два кольори. Доведіть, що знайдуться дві точки на відстані 1 метр різних кольорів.

<u>Задача 6.</u> Площина пофарбована у два кольори. Доведіть, що знайдуться дві точки на відстані 1 метр одного кольору.

IV. Тести

1. Чи можна квадрат картатого паперу 4 × 4 розрізати на один п'єдестал, один квадрат (2 × 2), один стовпчик (1 × 4) і один зигзаг?

А) Так В) не можливо
Б) Ні Г) інша відповідь

2. Гра «Класики». Для гри в класики на землі намальований ряд клітин, в які вписані по порядку числа від 1 до 10. Маша стрибнула в клітку 1, потім пострибала по іншим клітинам (кожен раз в сусідню по стороні клітину) і вистрибнула назовні з клітки 10. Відомо, що на клітці 1 Маша була 1 раз, на клітці 2 - 2 рази і т.д. Скільки разів Маша була на клітці 10?

А) 10 В) 4
Б) 2 Г) 5

3. Вітя і Женя грають в таку гру. У них є картата таблиця 11 × 11. Кожним ходом вони зафарбовують будь-яку ще не зафарбовану клітину таблиці. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє при правильній грі?

А) Перший В) Разом
Б) Другий Г) інша відповідь

4. Чи можна таблицю 8 × 8 с вирізаною кутовою кліткою розрізати на смужки 1 × 3?

А) Так В) не можливо
Б) Ні Г) інша відповідь

5. У Жені є 6 різних фарб. Він хоче розфарбувати межі кубика в різні кольори. Скільки різних кубиків він таким чином може отримати?

А) 6 В) 15
Б) 12 Г) 30

6. У художника-абстракціоніста Карандаша є тільки три олівця - фіолетовий, бузковий і ліловий. Він завжди використовує їх всі. Чи може він пофарбувати всю площину так, щоб кожна пряма була розфарбована всього в два кольори?

А) Так В) не можливо
Б) Ні Г) інша відповідь

V. Самооцінка учня:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Вдалося отримати результат (рішення, відповідь)?						
Правильно чи з помилкою?						
Самостійно або з чиєюсь						

допомогою?						

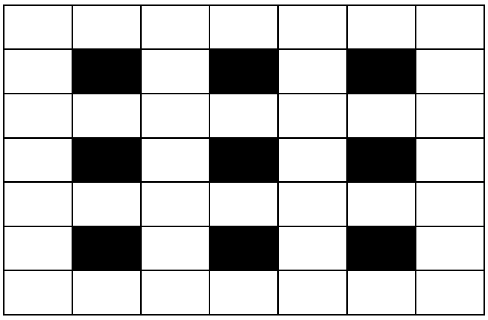
Відповіді до тестів:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
В)	**Г)**	**А)**	**А)**	**Г)**	**А)**

Розв’язки до задач

Задача 1.

Розв’язок.



Задача 2.

Ідея розв’язку: в кожен прямокутник помістимо одне непарне і три парних числа; поставимо у відповідність непарних чисел зафарбовану клітку; розфарбуємо таблицю таким чином, щоб в кожен прямокутник 1 × 4 потрапила тільки одна зафарбована клітина.

Розв’язок: Непарне число пишемо в зафарбовані клітини, парні числа розставляємо в білі клітини.

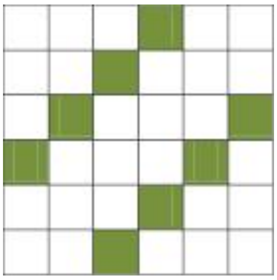


Рис. 17. Розмальовка с заданою умовою	Рис. 18. Таблиця с розв’язком

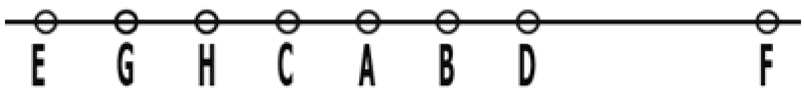
Спостереження і висновки: 1) Дану таблицю можна побудувати і для квадрата з непарною кількістю клітин на стороні. 2) Можна розфарбувати квадрат так, щоб в кожен прямокутник 1 × 4 потрапили 3 або 1 клітина. Тоді теж буде виконана умова непарної суми в прямокутниках.

Задача 3.

Розв'язок. Візьмемо дві точки одного кольору A і B (припустимо, синього). Будемо вважати, що AB = 1. Якщо праворуч від B або зліва від A на відстані 1 - синя точка, то задача розв'язана (ми знайшли три сині точки на відстані 1). В іншому випадку обидві ці точки (позначимо їх C і D) - червоні. Оскільки CD = 3, в разі, якщо зліва від C або праворуч від D на відстані 3 - червона точка, задача розв'язана (ми знайшли три червоні точки на відстані 3). В іншому випадку обидві ці точки (позначимо їх E і F) - сині.

Якщо на одиницю вправо від E знаходиться синя точка (позначимо її G), то точки G, B і F - шукані. Нехай точка G - червона.

Якщо середина відрізка GC (позначимо її H) - червона, то точки G, H, C - шукані. Якщо точка H - синя, то шуканими точками будуть E, H, A.



Задача 4.

Розв'язок. Розфарбуємо місця, на яких стоять хулігани, в шаховому порядку. Тоді кожен хуліган, який стояв на білому місці, проткнув кульку іншого хулігана, який стояв на чорному місці. І навпаки, будь-який хуліган, який стояв на чорному місці, проткнув кульку хулігана, який перебував на білому місці. Але чорних місць 8, а білих - 7. Значить, «чорних» кульок могло було бути проколото не більше 7. Тоді хоча б одна така кулька залишиться цілою.

Задача 5.

Розв'язок.Так як площина пофарбована у два кольори, то знайдуться дві різнокольорові точки. Нехай точка A пофарбована кольором 1, а точка B - кольором 2. Побудуємо ламану з кінцями в точках A і B, довжина кожної ланки якої дорівнює 1 метру. Робимо це так: будемо відкладати по променю AB відрізки, довжиною 1 метр. Початок першого з них збігається з точкою A, початок кожного наступного збігається з кінцем попереднього. Якщо в результаті потрапимо в точку B (в разі, коли відстань AB виражається цілим числом метрів), то отримуємо потрібну ламану. В іншому випадку в певний момент часу довжина непокритої ділянки відрізка AB стане менше 1 метра. Тоді будуємо рівнобічний трикутник з бічною стороною 1 метр, у якого цей маленький відрізок буде основою. Вийшла ламана, кінці якої пофарбовані в різні кольори, тому знайдуться дві сусідні вершини також пофарбовані в один колір. Це і будуть потрібні точки.

<u>Задача 6.</u>

Розв'язок. Розглянемо рівносторонній трикутник зі стороною 1 метр. У нього три вершини, а кольорів, в які розфарбована площина, два. Тому хоча б дві вершини цього трикутника пофарбовані в один колір. Ці дві вершини і є потрібними нам точками.

Розв'язки до тестів

1. ***Ідея:*** розфарбуємо фігури і квадрат 4 × 4 шаховим розфарбуванням. Якщо квадрат на ці фігури розрізати можна, то кількість чорних клітин і білих клітин має бути однаковою.
Розв'язок: Кількість чорних і білих клітин в квадраті 4 × 4 однакова - по 8 клітин. У фігурок чорних клітин 9 або 7 в залежності від того, як зафарбована фігура п'єдестал. У будь-якому випадку це не 8, тому квадрат 4 × 4 розрізати на ці фігури не можна.

Рис. 19. Шахматне розфарбування фігур

Спостереження і висновки: Щоб довести, що розв'язання задачі на розрізання якої-небудь фігури на частини, можливо, досить уявити один із способів розрізання. Набагато важче довести, що розрізати фігуру неможливо. І тут часто допомагає розфарбування фігури. Тому спочатку потрібно перевірити - а чи можливо розрізання? І якщо відповідь ствердна, тоді треба шукати спосіб розрізання.

2. Гра «Класики».

Ідея: розфарбувати класики шаховим розфарбуванням; з зафарбованою клітини Маша стрибає на білу клітинку і, навпаки. Тому кількість стрибків на зафарбованих клітинах дорівнює кількості стрибків на білих клітинах.

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Рис. 20

Розв'язок: Нехай на клітці з номером 10 було зроблено х стрибків. Тоді, 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 2 + 4 + 6 + 8 + х; 25 = 20 + х; х = 5. *Відповідь:* 5 стрибків.

Спостереження і висновки: це завдання одне з найкрасивіших. Простота підсумкового рішення, в порівнянні з прямим перебором ходів, демонструє те, як розмальовки можуть спростити завдання.

3. ***Розв'язок.*** Після кожного ходу будь-якого з гравців кількість не зафарбованих клітин зменшується на одну. Вся дошка складається з 121 клітини. А так як на початку вони всі не зафарбовані, і всього їх непарне число, то виграє той, хто ходить першим. *Відповідь.* Виграє перший гравець

4. ***Розв'язок.*** Для розв'язку досить побудувати приклад. *Відповідь.* Так можна.

5. ***Відповідь.*** 30.

6. ***Розв'язок.*** Олівець може діяти, наприклад, таким чином: пофарбувати деяку точку в фіолетовий колір. Провести через неї дві прямі і пофарбувати всі точки цих прямих крім фіолетового в бузковий колір. А всю решту площини пофарбувати в ліловий колір. *Відповідь.* Да, може.

Роздатковий матеріал до уроку

Задача 1. *Чи можна шаховим конем обійти всі клітини шахової дошки 5 × 5, побувавши в кожній клітині по одному разу, і повернутися у початкову клітку?*

Задача 2. *У лівому нижньому куту дошки 9 × 9 стоять 9 шашок, утворюючи квадрат 3 × 3. За один хід можна переставити шашку симетрично іншій, не виходячи за межі дошки. Чи можна за кілька ходів перемістити ці шашки так, щоб вони утворили квадрат а) в лівому верхньому куту, б) в правому верхньому куті, в) в центральному квадраті?*

Задача 3. *Пряма розфарбована в два кольори. Доведіть, що знайдуться три крапки одного кольору A, B, C такі, що AB = BC.*

Задача 4. *Розфарбуйте деякі клітини дошки 8 × 8 так, щоб у кожної клітинки було рівно дві сусідні по стороні зафарбовані клітини. Чи можна таким же чином зафарбувати деякі клітини дошки розміром 6 × 20?*

Задача 5. *Доведіть, що картату дошку 10 х10 не можна розрізати по лініях сітки на прямокутники 1 х 4.*

Урок № 4 .Тема. Інваріант

Мета: познайомити учнів з поняттям "інваріант"; розглянути ідею парності при вирішенні олімпіадних і нестандартних завдань.

Завдання уроку:
- знайти загальні підходи при вирішенні деяких логічних, нестандартних завдань
- навчитеся орієнтуватися в різних ситуаціях при вирішенні завдань, використовуючи метод інваріантів (завдання на парність).
- стимулювати інтерес до предмету.
- розвивати увагу, логічне мислення, математичну мову.
- виховувати культуру мовлення, поведінки при різних формах роботи; посидючість.
- продовжити роботу по формуванню універсальних навчальних дій.

Рекомендації до уроку
I. Познайомитись з поняттям «Інваріант»
II. На прикладах розібрати методи розв'язування задач №1-10
III. На вибір виконати завдання для самостійного розв'язку або виконати тести, відповіді записати в таблицю
IV. Зробити самоаналіз

Хід уроку

I. Інваріант

Інваріáнт (англ. invariant, нім. Invariante) — термін, що використовується в математиці та фізиці, а також в програмуванні. Ін - внутрішнє, варіант - взятий за ознаками (критеріями, значеннями, властивостями чи сумою властивостей) параметризований, маркований параметр, чи сукупність параметрів, що означає щось незмінне в полі (діапазоні, просторі, масиві, множині, послідовності) значень.

Якщо у об'єкта є якась властивість або характеристика, яка не змінюється при цих операціях - вона і називається ***інваріантом***. На практиці метод інваріантів зводиться до того, що деяка величина обчислюється двома способами: спочатку вона просто обраховується в початковому та кінцевому положенні, а потім прослідкувати її зміну при послідовних переходах системи.

Інваріант – це величина, яка не змінюється в результаті деяких операцій (наприклад, розрізання і перестановка частин фігур не міняє сумарної площі).

Якщо інваріант розрізняє два положення, то від одного не можна перейти до іншого. Як інваріант може використовуватися парність або розфарбовування. У завданнях про суму цифр використовуються залишки від ділення на 3 або 9.

Напівінваріант – величина, що змінюється тільки в один бік (тобто яка може тільки збільшуватися або тільки зменшуватися). Поняття напівінваріанта часто використовується при доведеннях зупинки процесів.

Поняття інваріанту не зустрічається у шкільній програмі, але воно є важливим у багатьох розділах математики та її застосувань, зокрема, у програмуванні.

Як правило, у задачах «на інваріант» є деякий процес, на кожному кроці якого виконуються якісь однотипні дії. Питання задачі може звучати так: чи можемо ми після кількох кроків процесу перейти з одної фіксованої позиції до іншої фіксованої позиції? Припустимо, що нам вдалося знайти інваріант процесу, тобто величину, яка не змінюється при виконані дозволених операцій. Якщо ця величина має різнізначення у початковій позиції і в кінцевій позиції, то очевидно, що шуканий перехід неможливий.

Дійсно, припустимо, що перехід можливий. Оскільки на кожному кроці значення інваріанту не змінюється, отримуємо, що після кожного кроку це значення є таким, як і у початковій позиції. Отже, й у кінцевій позиції значення інваріанту є таким, як і у початковій позиції, що суперечить умові.

Отримали суперечність: це означає, що наше припущення неправильне. Отже, перехід неможливий.

Зауважимо, що у таких міркуваннях є сенс застосувати доведення від супротивного.

Поняття інваріанту можна узагальнити на випадок, коли значення інваріанту якось регулярно змінюється, наприклад, значення чергуються.

Важливе зауваження. Якщо нам вдалося знайти інваріант, але виявилося, що він у початковій і кінцевій позиції набуває одне й те саме значення , то це не означає, що перехід можливий! Це просто означає, що знайдений інваріант не може бути використаний для доведення неможливості процесу. Отже, або треба шукати інший інваріант, або спробувати довести, що перехід можливий.

Іноді у таких задачах можна обійтися без інваріанту, явно перебравши всі можливості і довівши, що жодна з них «не працює», але використання інваріанту, як правило, робить доведення коротшим і красивішим, менш технічним і більш ідейним. Основні труднощі – здогадатися, що у задачі можна використати інваріант, і, власне, знайти інваріант.

У задачах з питанням «чи можна?» першою проблемою є визначитися з відповіддю: якщо «так», то треба навести приклад відповідної побудови, а якщо «ні», то треба довести, що такої побудови не існує. Часто буває корисно спробувати явно знайти побудову: якщо її не існує, спроби можуть підказати, чому її не існує, і допомогти знайти інваріант.

Як інваріант найчастіше розглядають парність (непарність) чисел і залишок від ділення.

Згадаймо визначення парного і непарного числа. Особливу увагу треба приділити абстрактному поняттю парності. Наприклад, число x = 2 має ту ж парність, що і число x (або обидва парні, або обидва непарні), а при додаванні одиниці парність змінюється. Застосування ідеї парності і непарності засноване на двох важливих твердженнях (лемах):

Лемма 1. Парність суми декількох цілих чисел збігається з парністю кількості непарних доданків.

Приклад 1. Число 1 +2 + 3 + ... + 10 - непарне, так як в сумі 5 непарних доданків.

Приклад 2. Число 5 + 7 + 9 + 11 +13 + 15 - парне, так як в сумі 6 непарних доданків.

Лемма 2. Знак добутку кількох (відмінних від 0) чисел визначається парністю кількості від’ємних множників.

Приклад 3. Число (-1) * (- 2) * (- 3) * (- 4) додатнє, так як в добутку парне число від’ємних множників.

Приклад 4. Число (-1) * 2 * (-3) * (-4) від’ємне, так як в добуку непарне число від’ємних множників.

II. Задачі

Задача 1. *На аркуші паперу написано число 11. Шістнадцять учнів передають листок один одному, і кожен додає до числа або віднімає від нього одиницю - як хоче. Чи може в результаті вийти число 0?*

Розв'язок. Потрібно помітити закономірність: після кожного ходу характер парності змінюється: після першого учня число стає парним, після другого непарним; після третього - парним; після четвертого - непарним. Тоді після шістнадцятого число буде непарним. Тому нуль в кінці вийти не може.

Задача 2. *На вішалці висять 20 хусток. 17 дівчаток по черзі підходять до вішалки і або знімають, або вішають хустку. Чи може після уходу дівчаток залишитися рівно 10 хусток?*

Розв'язок. Після підходу першої дівчинки кількість хусток, які залишились або 19, або 21 (непарна кількість); після підходу другої дівчинки - або 18, або 20, або 22 (парна кількість); після підходу третьої дівчинки - або 17, або 21, або 23, або 19 (непарна кількість). Після підходу 17 дівчинки залишається непарна кількість хусток. Виходить протиріччя. Значить, 10 хусток залишитися не може.

У першій і в другій задачах інваріантом є парність суми чисел.

Задача 3. *(а) Чи може шаховий слон за мільйон ходів потрапити з поля а1 на поле а8? (б) Чи може шаховий кінь за мільйон ходів потрапити з поля а1 на поле а8?*

Розв'язок. (а) Шаховий слон ходить по клітинках одного й того самого кольору. А клітинки а1 і а8 різного кольору. Отже, як інваріант розглянемо колір поля: на кожному кроці він не змінюється, а у початковій і кінцевій позиції він різний. Отже, шуканий перехід неможливий.

(б) Після кожного свого ходу кінь змінює колір поля, на якому стоїть. Тобто колір поля чергується. Це означає, що після кожного парного ходу він такий самий, як і на початку, отже, і після мільйонного ходу теж. Але у початковій і кінцевій позиції він різний. Отже, шуканий перехід неможливий.

Задача 4. *Катруся намалювала на дошці сім котів. Потім в аудиторію прийшли 33 школяра. Кожен з них або витер одного кота, або домалював нового. Чи могло бути так, щоб у кінці на дошці залишилося три коти?*

Розв'язок. У цій задачі здійснити перебір важко, адже ми не знаємо, в якому порядку з’являлися або зникали коти. Інтуїтивно ясно, що це не має значення, але як це довести? Зауважимо, що міркування «нехай спочатку перші сім школярів витерли котів, а потім кожний наступний малював – витирав – малював – витирав...» не є розв’язком, тому що воно описує один конкретний випадок. А якщо діти малювали – витирали котів в іншому порядку? (Хоча розбір такого прикладу дозволить сформулювати гіпотезу: могли залишитися три коти чи ні.)

Наведемо міркування з залученням інваріанту. Дослідимо, як змінюється *кількість* котів на кожному кроці (для цього не треба знати, у якому порядку котів було намальовано і витерто, ми нехтуємо цією інформацією). Очевидно, кількість котів на 1 збільшується або зменшується. Тому на кожному кроці змінюється *парність* кількості котів: ця кількість то парна, то непарна. Зауважимо, що на початку процесу ця кількість непарна (сім). Тоді після кожного непарного кроку парність кількості котів одна й та сама (як після першого кроку, тобто парна), і після кожного парного кроку парність кількості котів одна й та сама (як після другого кроку, тобто непарна). Оскільки школярів було 33, то загалом було зроблено 33 кроки, а отже, після цих 33 кроків залишиться парна кількість котів. Отже, їх не може залишитися три.

Задача 5. *На дошці написані числа 1,2,3,4,5,6. За один хід дозволяється додати до якихось двох чисел по одиниці. Чи можна за кілька таких кроків зробити всі числа однаковими?*

Розв'язок. Спочатку можна спробувати зробити їх однаковими. Видно, що не виходить. Але доведення того, що це неможливо, не може посилатися на порядок додавання: ми мусимо довести, що як не додавай, а однаковими числа зробити не можна.

Продемонструємо використання двох різних інваріантів.

1) Зауважимо, що при додавані одиниці парне число перетворюється на непарне і навпаки. Тому при додаванні одиниці до двох чисел кількість парних чисел або змінюється на два, або не змінюється. Тобто інваріантом *є парність кількості парних чисел.* Спочатку парних чисел три (непарне число), а у бажаній позиції, коли всі числа однакові – нуль або шість (парне число). Отже, перехід неможливий.

2) Розглянемо суму всіх написаних чисел. При додаванні одиниці до двох чисел до суми додається двійка, отже, парність суми не змінюється. Тобто інваріантом *є парність суми чисел.* Спочатку сума дорівню№ 21 (непарна), а у бажаній позиції, коли всі числа рівні, вона парна (сума шістьох однакових чисел). Отже, перехід неможливий.

Задача 6. *В абетці мови племені УИУ лише дві букви: У і И, причому ця мова має таку властивість: якщо зі слова видалити дві літери УИ, що стоять поспіль, то значення слова не зміниться. Так само значення слова не зміниться при додаванні до будь-якого місця слова буквосполучення ИУ або УУИИ. Чи можна стверджувати, що слова УИИ і ИУУ мають одне і те саме значення?*

Розв'язок. Нам треба з'ясувати, чи можна за допомогою дозволених операцій перейти з позиції УИИ до позиції ИУУ. Можна спробувати це зробити; видно, що не виходить. Знов-таки, доведення неможливості не може посилатися на конкретний алгоритм: треба довести, що немає жодного способу перетворити УИИ на ИУУ.

Звернемо увагу на те, що кожна з дозволених операцій змінює кількість букв У і И у слові на одне й те саме число (видаляється або додається по одній чи по дві такі букви). Тобто ми нехтуємо розташуванням букв і слідкуємо лише за Їх кількістю. У вихідній позиції УИИ букв И більше, ніж У, а у бажаній позиції ИУУ – букв И менше, ніж У. Отже, перехід неможливий. (Як інваріант можна розглядати, наприклад, різницю кількості букв И і У.)

Задача 7. *На шести ялинках сидить шість чижей, на кожній ялинці - по чижу. Ялинки ростуть в ряд з інтервалами в 10 метрів. Якщо якийсь чиж перелітає з* *однієї ялинки на іншу, то якийсь інший чиж обов'язково перелітає на стільки ж метрів, але в зворотному напрямку.*

а) Чи можуть всі чижі зібратися на одній ялинці?

б) А якщо чижей і ялинок - сім?

Розв'язок. а) *Перший спосіб.* Занумеруемо ялинки числами від 1 до 6 по порядку. Нехай кожен чиж отримує номер, рівний номеру ялинки, на якій він сидить (в даний момент). Тоді сума номерів чижів - інваріант. На початку вона дорівнює 1 + 2 + ... + 6 = 21. Оскільки 21 не ділиться на 6, то зібратися на одній ялинці чижі не зможуть.

Другий спосіб. Замінимо непарні ялинки дубами і зауважимо, що на дубах завжди буде непарне число чижів.

б) Неважко зібрати всіх чижів на четвертій ялинці: чижі з першої і сьомої (другої та шостої, третьої та п'ятої) можуть перелетіти туди одночасно.

Відповідь: а) Не можуть; б) можуть.

Задача 8. *Хулігани Василь і Петро розірвали стінгазету, причому Петро рвав кожен шматок на 5 частин, а Василь на 9. При спробі зібрати стінгазету знайшли 1988 обривків. Доведіть, що знайшли не всі шматочки.*

Розв'язок. Як Петро, так і Василь на кожному "кроці" додавали парну кількість шматків. Значить, загальна кількість шматочків була непарна. Але 1988 - число парне.

Задача 9. *Набір чисел a, b, c кожну секунду замінюється на a + b - c, b + c - a, c + a - b. На початку є набір чисел 2000, 2002, 2003. Чи може через деякий час вийти набір 2001, 2002, 2003.*

Розв'язок. Інваріантом служить сума чисел, дійсно,

$(a + b - c) + (b + c - a) + (c + a - b) = a + b + c.$

Скільки б разів не змінювалися набори чисел, з початкового отримати зазначений набір не можна, тому що їх суми відрізняються на 1.

Задача 10. *На столі лежить купа з 637 ракушок. З неї прибирають одну ракушку і купу ділять на дві (не обов'язково порівну). Потім з якої-небудь купи, що містить більше однієї ракушки, знову прибирають одну ракушку і знову купу ділять на дві. І так далі. Чи можна через кілька ходів залишити на столі тільки купи, що складаються з трьох ракушок?*

Підказка. Щоразу після вилучення камінчика і роздвоєння купки число камінчиків на 1 зменшується, а число купок на 1 збільшується.

Розв'язок. Після кожної процедури (вилучення камінчика і роздвоєння купки) число ракушок на 1 зменшується, а число купок на 1 збільшується. Оскільки спочатку ракушок було 637, а купок - одна, то після n процедур ракушок виявиться (637 - n), а купок стане (n + 1). В задачі потрібно, щоб виконувалася рівність 637 - n = 3 (n + 1), або 634 = 4n, що неможливо, оскільки права частина рівняння кратна 4.

III. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Чи можливо шахівницю розміру 8х8 обійти конем, почавши обхід з поля h8, закінчивши його на полі а1 так, щоб на кожному полі побувати рівно один раз.

Задача 2. Дана шахова дошка. Дозволяється перефарбувати в другий колір одразу всі клітинки якої-небудь горизонталі чи вертикалі. Чи може при цьому утворитися дошка, у якої рівно одна чорна клітинка?

Задача 3. Було 5 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 5 кусків кожний. Потім деякі з одержаних кусків знову розрізали на 5 кусків і так зробили декілька разів. Чи можна в результаті виконання таких дій отримати 1975 кусків паперу?

Задача 4. На чудо-дереві ростуть банани і ананаси. За один раз дозволяється зірвати з неї два плоди. Якщо зірвати два банани або два ананаси, то виросте ще один ананас, а якщо зірвати один банан і один ананас, то виросте один банан. У результаті залишився один плід. Який це плід, якщо відомо, скільки бананів і ананасів росло спочатку?

Задача 5. На 44 деревах, розташованих по кругу, сиділи по одному веселому чижеві. Час від часу якісь два чижі перелітають один за годинниковою стрілкою, а інший проти, кожен – на сусіднє дерево. Чи можуть всі чижі зібратися на одному дереві?

Задача 6. Василиса Премудра вирішила замкнути Кощія в прямому коридорі, розділеному трьома проходами на чотири кімнати, причому в кожному проході, спершись на одну зі стін, стоїть товстий втомлений стражник. Кожен раз, коли Кощій переходить з однієї кімнати в іншу, стражник переходить до протилежної стіни і опирається ліктями на неї. Якщо всі стражники обіпруться на одну стіну, вона не витримає і впаде, а Кощій вийде на свободу. Чи може Василиса відразу так притулити стражників і розмістити Кощія, щоб він ніколи не зміг вибратися?

Таблиця для відповідей:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*

IV. Тести

1. Незнайка взяв у Пілюлькіна книжку і порахував, скільки потрібно цифр, щоб пронумерувати всі сторінки, починаючи з першої. У нього вийшло 100 цифр. Чи могло так бути, або Незнайка помилився? Якщо могло, скажіть, скільки було сторінок.

Виберіть відповідь:

А) 100 В) 99

Б) 50 Г) Помилився

2. Сорок дітей водили хоровод. З них 22 тримали за руку хлопчика і 30 тримали за руку дівчинку. Скільки дівчаток було в хороводі?

Виберіть відповідь:

А) 24 В) 30

Б) 22 Г) 18

3. Яке число треба відняти з чисельника дробу 537/463 і додати до знаменника, щоб після скорочення отримати 1/9?

Виберіть відповідь:

А) 537 В) 74

Б) 437 Г) 438

4. На дошці написано 10 плюсів і 15 мінусів. Дозволяється стерти будь-які два знака і написати замість них плюс, якщо вони однакові, і мінус, якщо різні. Який знак залишиться на дошці після виконання 24 таких операцій?

Виберіть відповідь:

А) Плюс В) Ніякого

Б) Мінус Г) Немає розв’язку

5. На дошці написані числа 1, 2, 3, ..., 19, 20. Дозволяється стерти будь-які два числа a і b, та замість них написати число a + b - 1. Яке число може залишитися на дошці після 19 таких операцій?

Виберіть відповідь:

А) 201 В) 191

Б) 190 Г) 195

6. Гуллівер потрапив в країну ліліпутів, маючи 7000000 рублів. На всі гроші він одразу купив кефір в пляшках по ціні 7 рублів за пляшку (порожня пляшка коштувала в той час 1 рубль). Випивши весь кефір, він здав пляшки і на всі виручені гроші відразу купив кефір. При цьому він помітив, що і вартість кефіру, і вартість порожньої пляшки виросли в два рази. Потім він знову випив весь кефір, здав пляшки, на всі виручені гроші знову купив кефір і т. Д. При цьому між кожними двома відвідинами магазину і вартість кефіру, і вартість порожньої пляшки зростали в два рази. Скільки пляшок кефіру випив Гуллівер?

Виберіть відповідь:

А) 2116666 В) 1666666

Б) 3166666 Г) 1166666

V. Самооцінка учня:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Вдалося отримати результат (рішення, відповідь)?						
Правильно чи з помилкою?						
Самостійно або з чиєюсь допомогою?						

Відповіді до задач:

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
Не можливо	**Не можливо**	**Не можливо**	**Якщо бананів парна кіл-ть, то ананас, якщо не парна – банан**	**Не можуть**	**Може**

Відповіді до тестів:

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
Г)	**А)**	**Б)**	**Б)**	**В)**	**Г)**

Розв'язки до задач

Задача 1.

Розв'язок . За 63 ходи кінь опиниться в чорній клітинці a1, але непарні ходи коня завжди закінчуються на білій клітинці. Протиріччя доводить неможливість.
Відповідь: не можна.

Задача 2.

Розв'язок . При перефарбуванні горизонталі чи вертикалі, яка містить к чорних та 8-к білих клітинок, отримаємо 8-к чорних та к білих клітинок. При цьому кількість чорних клітинок зміниться на парне число, тобто (8-к)- к = 8-2к = 2(4-к). Так як парність чорних клітинок зберігається, із початкових 32 чорних клітинок ми не можемо отримати одну чорну клітинку. *Відповідь:* не можна.

Задача 3.

Розв'язок . Під час розрізання одного куска кількість кусків збільшується на 4. Тому остача від ділення кількості всіх кусків на 4 не змінюється. Але 5 при ділення на 4 дає остачу 1, а 1975 остачу 3. *Відповідь:* не можна

Задача 4.

Розв'язок Парність числа бананів не міняється, тому, якщо число бананів було парним, то плід, що залишився, – ананас, якщо число бананів було непарним, то – банан.

Задача 5.

Розв'язок. Пронумеруємо дерева по кругу від 1 до 44. Сума номерів дерев, на яких сидять чижі, або не міняється, або зменшується на 44. або збільшується на 44. Тим самим, залишок від ділення цієї суми номерів на 44 не міняється. Спочатку цей залишок рівний 22, а якщо всі чижі всядуться на одне дерево, то він буде рівний нулю. Тому чижі не зможуть зібратися на одному дереві. *Відповідь:* не можуть

Задача 6.

Розв'язок. Нехай, наприклад, Василиса посадила Кощія в саму північну кімнату, а стражників притулила так: до західної "- до східної" - до західної стіни ("ЗСЗ"). Покажемо, що як би Кощій не ходив, стражники ніколи не будуть притулятися до однієї стіни. Зауважимо, що в будь-який момент виконується така умова: стражники південніше Кощія залишилися в початковому положенні, а положення стражників на північі від Кощія змінилося. Дійсно, ця умова виконана відразу і не порушується при переході

Кощія з кімнати в кімнату. Значить, якщо Кощій в якийсь момент опинився в самій північній кімнаті, то все стражники залишилися в положенні "ЗСЗ". Якщо Кощій виявився в другій кімнаті, то перший (найпівнічніший) стражник поміняв положення, а два інших залишилися в початковому положенні, тобто стражники прийняли положення "ССЗ". Якщо ж Кощій виявився в третій кімнаті, то стражники прийняли положення "СЗЗ". Нарешті, якщо Кощій виявився в найпівденнішій кімнаті, то все стражники змінили своє положення, тобто прийняли положення "СЗС". Значить, ні в який момент всі стражники не притуляться до однієї стіни. *Відповідь.* Да, може.

Розв'язки до тестів

1. Підказка

Зауважте, номер останньої сторінки - двозначне число.

Розв'язок.

При цих умовах номер останньої сторінки - двозначне число (кількість цифр у всіх двозначних і однозначних числах дорівнює $9 + 90 \times 2 > 100$). Але всі однозначні сторінки дадуть 9 цифр, тобто непарне число, а додавання будь-якої кількості сторінок з двозначним номером додасть парне число цифр, тобто залишить кількість цифр непарним. *Відповідь.* Незнайка помилився.

2. Розв'язок.

$22 + 30 = 52$, значить, $52 - 40 = 12$ дітей тримали за руку і хлопчика, і дівчинку. отже, $30 - 12 = 18$ дітей тримали за руки тільки дівчаток. Ці 18 дітей тримали $18 \cdot 2 = 36$ дівочих рук, і ще 12 тримали по одній дівочій руці, так що всього у дівчаток було $36 + 12 = 48$ рук. Тому дівчаток було $48 : 2 = 24$. *Відповідь.* 24 дівчинки.

3. Підказка

Зауважте, що $537 + 463 = 1000$.

Розв'язок.

Сума чисельника і знаменника не зміниться, якщо з одного з них відняти, а до другого - додати одне і те ж число. Оскільки ця сума дорівнює 1000, то дріб перед скороченням повинна бути 100/900, а щоб її отримати, треба відняти і, відповідно, додати число 437. *Відповідь.* 437.

4. Розв'язок (1).

При кожній операції кількість мінусів або не змінюється, або зменшується на 2. Тому парність кількості мінусів не змінюється.

Розв'язок (2).

Замінимо плюси на одиниці, а мінуси на мінус одиниці. Тоді добуток написаних чисел не змінюється. Оскільки спочатку воно було від'ємним, то на дошці залишиться -1 (колишній мінус). *Відповідь.* Мінус.

5. Розв'язок.

Для будь-якого набору з n чисел на дошці розглянемо наступну величину X: суму всіх чисел, зменшену на n. Неважко перевірити, що це - інваріант. У наборі з умови X = (1 + 2 + ... + 20) - 20 = 190. Після 19 операцій, коли на дошці залишиться одне число p, X = p - 1. Значить, p = 191. *Відповідь.* 191.

6. Підказка

Ведіть розрахунки в "твердій" валюті - порожніх пляшках. Тоді не буде інфляції!

Розв'язок.

Зауважимо, що якщо всі розрахунки проводити в твердій валюті - порожніх пляшках, - то інфляції не буде. Тобто пляшка з кефіром буде весь час коштувати 7 порожніх пляшок, а сам кефір - 6 порожніх пляшок. Гуллівер, маючи спочатку "грошей" на 1166666 пляшок кефіру (без тари) і ще 4 порожніх пляшки, зможе проводити свої комерційні операції до тих пір, поки не залишиться з чотирма порожніми пляшками, здавши які, він вже не зможе знову купити кефір. *Відповідь.* 1166666 пляшок.

Роздатковий матеріал до уроку

Задача 1. *На аркуші паперу написано число 11. Шістнадцять учнів передають листок один одному, і кожен додає до числа або віднімає від нього одиницю - як хоче. Чи може в результаті вийти число 0?*

Задача 2. *На вішалці висять 20 хусток. 17 дівчаток по черзі підходять до вішалки і або знімають, або вішають хустку. Чи може після уходу дівчаток залишитися рівно 10 хусток?*

Задача 3. *(а) Чи може шаховий слон за мільйон ходів потрапити з поля a1 на поле a8? (б) Чи може шаховий кінь за мільйон ходів потрапити з поля a1 на поле a8?*

Задача 4. *Катруся намалювала на дошці сім котів. Потім в аудиторію прийшли 33 школяра. Кожен з них або витер одного кота, або домалював нового. Чи могло бути так, щоб у кінці на дошці залишилося три коти?*

Задача 5. *На дошці написані числа 1,2,3,4,5,6. За один хід дозволяється додати до якихось двох чисел по одиниці. Чи можна за кілька таких кроків зробити всі числа однаковими?*

Задача 6. *В абетці мови племені УИУ лише дві букви: У і И, причому ця мова має таку властивість: якщо зі слова видалити дві літери УИ, що стоять поспіль, то значення слова не зміниться. Так само значення слова не зміниться при додаванні до будь-якого місця слова буквосполучення ИУ або УУИИ. Чи можна стверджувати, що слова УИИ і ИУУ мають одне і те саме значення?*

Задача 7. *На шести ялинках сидить шість чижей, на кожній ялинці - по чижу. Ялинки ростуть в ряд з інтервалами в 10 метрів. Якщо якийсь чиж перелітає з однієї ялинки на іншу, то якийсь інший чиж обов'язково перелітає на стільки ж метрів, але в зворотному напрямку.*

а) Чи можуть всі чижі зібратися на одній ялинці?

б) А якщо чижей і ялинок - сім?

Задача 8. *Хулігани Василь і Петро розірвали стінгазету, причому Петро рвав кожен шматок на 5 частин, а Василь на 9. При спробі зібрати стінгазету знайшли 1988 обривків. Доведіть, що знайшли не всі шматочки.*

Задача 9. *Набір чисел a, b, c кожну секунду замінюється на a + b - c, b + c - a, c + a - b. На початку є набір чисел 2000, 2002, 2003. Чи може через деякий час вийти набір 2001, 2002, 2003.*

Задача 10. *На столі лежить купа з 637 ракушок. З неї прибирають одну ракушку і купу ділять на дві (не обов'язково порівну). Потім з якої-небудь купи, що містить більше однієї ракушки, знову прибирають одну ракушку і знову купу ділять на дві. І так далі. Чи можна через кілька ходів залишити на столі тільки купи, що складаються з трьох ракушок?*

Урок № 5. Тема. Кола Ейлера

Ейлер обчислював без жодних видимих зусиль,
як людина дихає або як ореллетить над землею.
Д. Араго

Мета: Познайомитись розв'язком логічних задач методом кругів; навчити систематизувати й групувати предмети за спільними ознаками та властивостями; застосовувати принцип доповнення та перетину множин у математичних задачах, використовуючи ідею кругів Ейлера; розвивати логічне мислення та вміння обґрунтовувати свою думку.

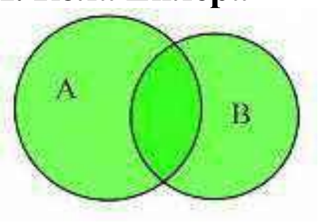
Завдання уроку:

• *освітня:* дати учням уявлення про метод кіл Ейлера;
• розвиваюча: розвиток логічного та аналітичного мислення;
• виховна: виховання вміння вислуховувати думку інших учнів і відстоювати свою точку зору.

Рекомендації до уроку
I. Познайомитись з поняттям «Кола Ейлера»
II. На прикладах розібрати методи розв'язування задач №1-5
III. На вибір виконати завдання для самостійного розв'язку або виконати тести, відповіді записати в таблицю
IV. Зробити самоаналіз

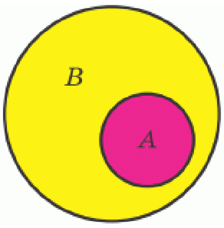
Хід уроку

I. Кола Ейлера



Один з найвидатніших математиків Леонард Ейлер за своє довге життя написав більше 850 наукових робіт. В одній з цих робіт і з'явилися «кола». Ейлер писав, що «саме вони дуже підходять для того, щоб полегшити наші роздуми під час розв'язування цілого класу однотипних задач».
Кола Ейлера (їх ще називають діаграми Ейлера) – це фігури на площині, які ілюструють перетин і об'єднання множин. Як фігури найчастіше використовують кола, але можна розглядати квадрати, прямокутники й інші фігури.

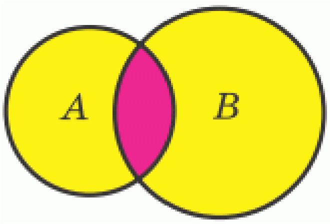
Множину можна уявити собі як сукупність деяких об'єктів, що об'єднані за якоюсь ознакою. У математиці множини — це одне з основних неозначуваних понять.
Кожний об'єкт, що входить до множини A, називається *ементом* цієї *множини*.
Зазвичай елементи позначають малими латинськими літерами: a, b, c, d тощо.
Якщо a належить множині A, то пишуть $a \in A$ (читають: «a належить множині A»). Якщо b не належить множині A, то пишуть $b \notin A$ (читають: «b не належить множині A»).
Множина, що не містить жодного елемента, називається *порожньою множиною* і позначається $\emptyset$.
Дві *множини* A і B називають *рівними*, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B, і навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.
Якщо множини A і B рівні, то пишуть $A = B$.
З означення випливає, що множина однозначно визначається своїми елементами.
Для ілюстрації співвідношень між множинами використовують схеми, які називають *діаграмами (кругами) Ейлера-Венна*.



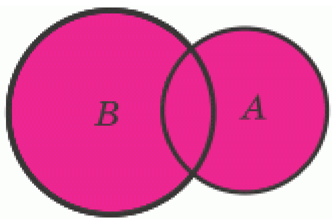
Підмножина

Якщо кожен елемент однієї множини A є елементом другої множини B, то кажуть, що перша множина A є підмножиною другої множини B і записують так: $A \subset B$.
Використовують також запис $A \subseteq B$, якщо множина A або є підмножиною множини B, або дорівнює множині B.

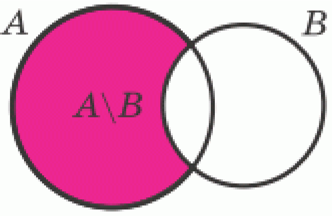
Операції над множинами



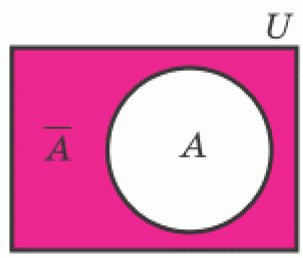
Перетин (переріз) множин
Перетином множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A, і множині B. Перетин множин A і B позначають так: $A \cap B$.



Об'єднання множин
Об'єднанням множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B. Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$.



Різниця множин
Різницею множин A і B називається множина, яка складається з усіх елементів, які належать множині A і не належать множині B. Різницю A і B позначають так: $A \setminus B$.



Доповнення множини

Якщо всі множини, які ми розглядаємо, є підмножинами якоїсь так званої *універсальної множини* U, то різниця $U \setminus A$ називається *доповненням множини* А. Тобто доповненням множини A називається множина, яка складається з усіх елементів, які не належать множині A (але які належать універсальній множині U). Доповнення множини A позначають так: $\overline{A}$.

ІІ. Приклади задач з розв'язанням

Задача 1. *Всі мої подруги вирощують в своїх квартирах якісь рослини. Шестеро з них розводять кактуси, а п'ятеро - фіалки. І тільки у двох є і кактуси і фіалки. Вгадайте, скільки у мене подруг?*

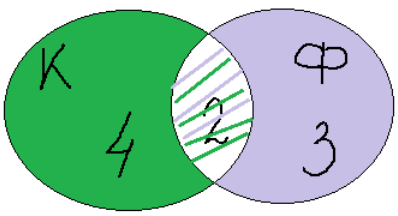
Можна, звичайно, «вгадати» в процесі хитромудрих міркувань, можна - за допомогою ось таких дій:

1. 6 + 5 = 11.
2. 11 - 2 = 9.

Але як грамотно обгрунтувати їх? Як відповісти на питання, що вийшло в результаті першої дії?

Леонард Ейлер придумав дуже гарний спосіб розв'язання таких завдань.

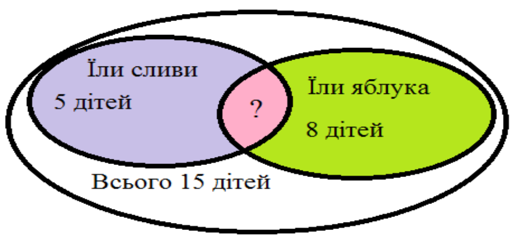
Ось він. Зобразимо два кола, так як у нас два види квітів. В одному будемо фіксувати власниць кактусів, в іншому - фіалок. Оскільки у деяких подруг є і ті, і інші квіти, то кола намалюємо так, щоб у них була спільна частина. У цій загальній частині ставимо цифру 2 (тому що кактуси і фіалки у двох). У решти «кактусового» кола ставимо цифру 4 (всього кактуси - у шістьох, а у двох ми вже врахували). У вільній частині «фіалкового» кола ставимо цифру 3 (5 - 2 = 3). А тепер сам малюнок підказує, що всього у мене 4 + 2 + 3 = 9 подруг.



Задача 2. *За святковим столом сиділо 15 дітей. П'ятеро з них їли тільки сливи, восьмеро — тільки яблука. Фруктами смакували усі. Скільки дітей їли і сливи, і яблука?*

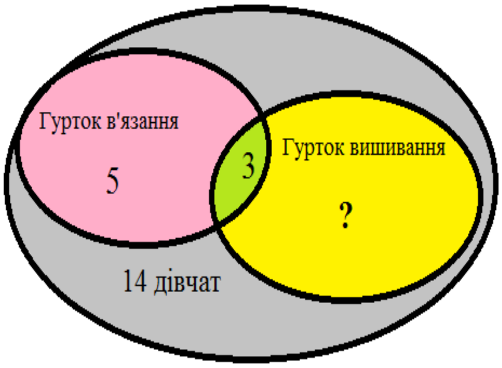
Розв'язання. Зобразимо умову даної задачі за допомогою кругів Ейлера.

Знайдемо, яка кількість дітей їла тільки сливи



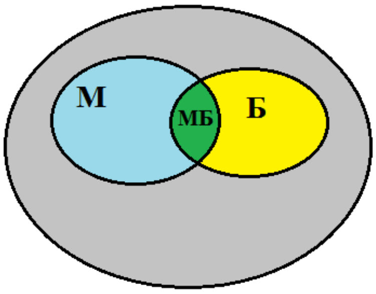
або тільки яблука. Маємо, $5+8=13$. Зважаючи на те, що за столом сиділо 15 дітей і всі смакували фруктами, знаходимо $15-13=2$ дітей, які їли і сливи, і яблука.
Відповідь: 2 дітей їли і сливи, і яблука.

Задача 3. *У класі навчається 14 дівчат. П'ять із них відвідують лише гурток в'язання, а три — і гурток в'язання, і гурток вишивання. Скільки дівчат відвідують лише гурток вишивання?*
Розв'язання
Зобразимо умову даної задачі за допомогою кругів Ейлера.

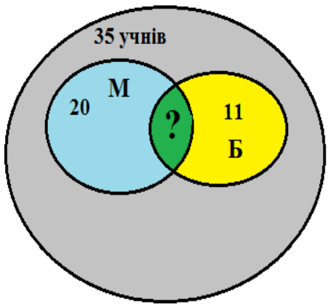


Знайдемо кількість дівчаток, які відвідували гурток в'язання: $5+3=8$.
Оскільки, дівчат у класі 14, то гурток вишивання відвідували $14-8=6$.
Відповідь: 6 дівчат відвідували тільки гурток вишивання.

Задача 4. *У класі 35 учнів. З них 20 займаються у математичному гуртку, 11 — у біологічному, 10 учнів не відвідують ці гуртки. Скільки біологів захоплюються математикою?*

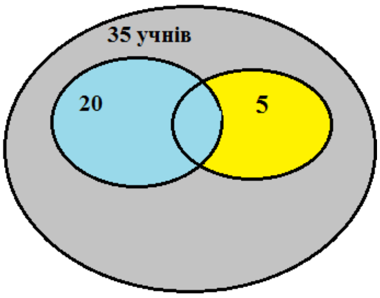


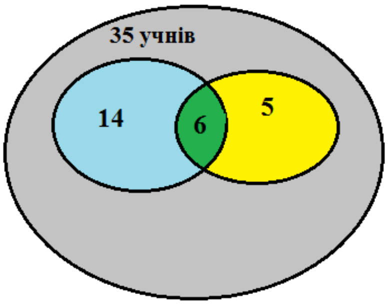
Розв'язання
Можемо накреслити велике коло, а в ньому два менших, як показано на малюнку.
У ліве коло, позначене буковою **М**, помістимо усіх математиків, а у праве, позначене буквою **Б**, усіх біологів. Очевидно, що у спільній частині кіл, яку можна позначити буквами **МБ**, опиняться ті самі математики-біологи, які нас цікавлять.



Останніх школярів, а їх 10, попросимо не покидати зовнішнього найбільшого кола. Тепер порахуємо: всього усередині великого кола 35 школярів, усередині двох менших $35-10=25$. У середині «математичного» кола М знаходяться 20 учнів, значить, у тій частині «біологічного» кола, яка розташована поза колом М та зображена на малюнку жовтим кольором, знаходяться $25-20=5$ біологів, які не відвідують математичний гурток.

Решта біологів, а їх $11 - 5 = 6$ учнів, знаходяться у спільній частині кіл М і Б.





Таким чином, 14 учнів захоплюються тільки математикою, 5 учнів — тільки біологією, 6 учнів захоплюються математикою і біологією.
Відповідь: 6 біологів захоплюється математикою.

Задача 5. *Скільки існує цілих додатних чисел, менших 100, які:*
а) діляться і на 2, і на 3;
б) діляться на 2, але не на 3;
в) діляться на 3, але не на 2;
г) діляться на 3 або на 2;
д) не діляться ні на 2, ні на 3?

Вказівка 1.

а) Всі числа, що діляться і на 2, і на 3, діляться на 6. Доведемо це. За означенням, подільність числа x на 6 означає, що x: 6 - деяке ціле число (позначимо його a), тобто що x = 6 • a, де a - ціле число. Аналогічно, подільність на 2 означає, що число можна записати у вигляді x = 2 • b, де b - ціле, а на 3 - у вигляді x = 2 • c з цілим c. Отже, нехай x = 2 • b. Так як x ділиться ще й на 3, то 2 • b теж ділиться на 3, а раз 2 на 3 не ділиться, то ділитися на 3 повинно b, тобто b = 3 • d, де d - ціле. Отже, x = 2 • 3 • d = 6 • d, тобто будь-який x, ділиться і на 2, і на 3, ділиться і на 6. Значить, все потрібні нам числа знаходяться серед чисел, які діляться на 6.

Але раптом серед чисел, які діляться на 6 будуть зайві (що не діляться на 2 або на 3 або й на 2, і на 3 одночасно)? Доведемо, що всі числа, що діляться на 6, також діляться і на 2, і на 3. Нехай x = 6 • a, тобто x ділиться на 6.
Так як 6 = 2 • 3, то x = 2 • (3 • a).
Так як a - ціле, то і 3 • a теж ціле, а значить, x = 2 • b, де b = 3 • a, тобто x підходить під визначення числа, що ділиться на 2.
Аналогічно, x = 3 • c, де c = 2 • a, тобто x ділиться і на 3.

Отже, число ділиться і на 2, і на 3 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 6. Залишилося знайти кількість натуральних чисел, менших 100, які діляться на 6.

Вказівка 2.

а) Оскільки на 6 ділиться кожне шосте число, то число таких чисел дорівнює частці від ділення із залишком 100 на 6 = 16 (відзначимо, що якби 100 поділялося на 6, то таким чином було б знайдено число таких чисел, менших або рівних 100).

б) Потрібно від всіх чисел, які діляться на 2 (в цьому проміжку) відняти числа, які діляться і на 2, і на 3 (вже пораховано). Залишиться кількість чисел, що діляться на 2, але не на 3. У термінах кіл це точки, що лежать в одному колі (всі, діляться на 2), але не лежать у другому (діляться і на 2, і на 3), при цьому друге коло знаходиться повністю всередині першого, а відомо кількість всіх точок і кількість точок, що лежать в другому колі. У термінах множин це означає ***різницю множин.***

г) Перше коло позначає точки, які діляться на 2, а друге - на 3. Точки, що лежать в їх перетині - числа, що діляться і на 2, і на 3 відразу (тобто діляться на 6). Потрібно знайти загальну кількість точок в обох колах, тобто в ***об'єднанні множин.***

д) Кількість таких чисел дорівнює кількості всіх натуральних чисел, менших 100, мінус число чисел, які задовольняють умові (діляться на 2 або на 3). Це ***доповнення до безлічі*** чисел, оскільки він розглядався в попередньому пункті. *Відповідь.* а) 16; б) 33; в) 17; г) 66; д) 34.

III. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. ***Домашні улюбленці.*** У всіх моїх подруг є домашні вихованці. Шестеро з них люблять і тримають кішок, а п'ятеро - собак. І тільки у двох є і ті і другі. Вгадайте, скільки у мене подруг?

Задача 2. ***Бібліотеки.*** У класі 30 учнів. Всі вони є читачами шкільної та районної бібліотек. З них 20 хлопців беруть книги в шкільній бібліотеці, 15 - в районній. Скільки учнів не є читачами шкільної бібліотеки?

Задача 3. ***Улюблені мультфільми.*** Серед школярів п'ятого класу проводилося анкетування по улюбленим мультфільмам. Найпопулярнішими виявилися три мультфільми: "Білосніжка і сім гномів", "Вінні Пух", "Міккі Маус". Всього в класі 28 учнів. "Білосніжку і сім гномів" вибрали 16 учнів, серед яких троє назвали ще "Міккі Маус", шестеро - "Вінні Пух", а один написав всі три мультфільми. Мультфільм "Міккі Маус" назвали 9 хлопців, серед яких п'ятеро вибрали по два мультфільми. Скільки людей вибрали мультфільм "Вінні Пух"?

Задача 4. ***Хобі.*** З 24 учнів 5 класу музичну школу відвідують 10 учнів, художню школу - 8 учнів, спортивну школу - 12 учнів, музичну і художню школу-3, художню та спортивну школу - 2, музичну і спортивну школу - 2, всі три школи відвідує 1учень . 1). Скільки учнів відвідують тільки одну школу? 2) Скільки учнів ні в чому себе не розвивають?

Задача 5. ***Про головоломки.*** На полиці стояло 26 різних математичних ігор - головоломок. У 4 з них пограв і Гриша, і Саша. Ігор спробував пограти у 7 ігор, яких не торкалися ні Гриша, ні Саша, і дві головоломки, в які грав Гриша. Всього Гриша грав в 11 математичних ігор - головоломок. У скільки головоломок зіграв Саша?

Задача 6. ***Спорт для всіх.*** У класі 38 учнів. З них 16 грають в баскетбол, 17 - в хокей, 18 - в футбол. Захоплюються двома видами спорту - баскетболом і хокеєм - четверо, баскетболом і футболом - троє, футболом і хокеєм - п'ятеро. Троє не захоплюються ні баскетболом, ні хокеєм, ні футболом. 1) Скільки учнів захоплюються одночасно трьома видами спорту? 2) Скільки учнів захоплюється лише одним з цих видів спорту?

Таблиця для відповідей:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*

IV. Тести

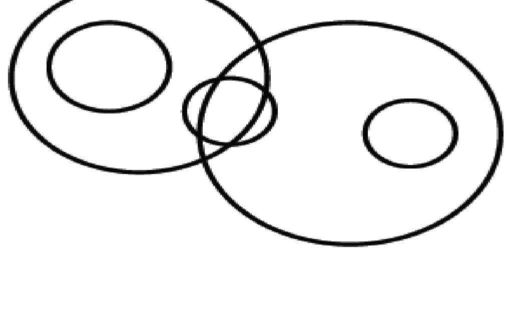
1. У класі 15 хлопчиків. 10 з них займаються футболом і 9 баскетболом. Скільки хлопчиків займається і тим і іншим?

Виберіть відповідь:

А) 4 В) 5

Б) 1 Г) 6

2. Лісник рахував сосни в лісі. Він обійшов 5 кіл, зображених на малюнку, і всередині кожного кола нарахував рівно 3 сосни. Чи може бути, що лісник жодного разу не помилився?



Виберіть відповідь:

А) Може В) помилився 1 раз

Б) Не може Г) інша відповідь

3. В саду у Ані і Віті росло 2006 трояндових кущів. Вітя полив половину всіх кущів, і Аня полила половину всіх кущів. При цьому виявилося, що рівно три кущі, найкрасивіші, були политі і Анею, і Вітею. Скільки трояндових кущів залишилися не политими?

Виберіть відповідь:

А) 100 В) 9

Б) 6 Г) 3

4. На дошці намальовані два кола, всередині яких відмічено декілько точок. Усередині першого з них всього 190 зазначених точок. Всередині другого - всього 230 відмічених точок. Усередині обох кіл одночасно знаходиться рівно 70 точок. А скільки зазначених точок всього?

Виберіть відповідь:

А) 40 В) 350

Б) 70 Г) 420

5. Восьмого березня в кіно прийшло 100 дітей. На пригодницький фільм було продано 87 квитків, а на комедію - 63. Скільки дітей подивилися і той фільм, і інший? (Кожен подивився щонайменше один з фільмів.)

Виберіть відповідь:

А) 50 В) 37

Б) 24 Г) 13

6. В одному класі 25 учнів. З них 7 люблять груші, 11 - черешню. Двоє люблять груші і черешню; 6 - груші і яблука; 5 - яблука і черешню. Але є в класі два учні, які люблять все і четверо таких, що не люблять фруктів взагалі. Скільки учнів цього класу люблять яблука?

Виберіть відповідь:

А) 11 В) 6

Б) 7 Г) 5

V. Самооцінка учня:

№ завдання	1	2	3	4	5	6

Вдалося отримати результат (рішення, відповідь)?						
Правильно чи з помилкою?						
Самостійно або з чиєюсь допомогою?						

Відповіді до задач:

1	*2*	*3*	*4 1)*	*4 2)*	*5*	*6 1)*	*6 2)*
9 подруг	**10 учнів**	**16 учнів**	**13 учнів**	**3 учня**	**12**	**2 учня**	**21учень**

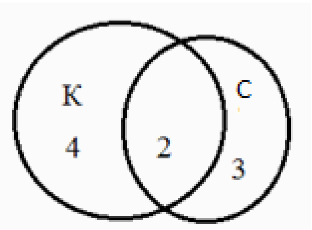
Відповіді до тестів:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
А)	**Б)**	**Г)**	**В)**	**А)**	**Г)**

Розв'язки до задач

Задача 1.

Розв'язок . Зобразимо два кола, так як у нас два види вихованців. В одному будемо фіксувати власниць кішок, в іншому - собак. Оскільки у деяких подруг є і ті, і інші тварини, то кола намалюємо так, щоб у них була спільна частина. У цій загальній частині ставимо цифру 2 так як кішки і собаки є у двох. У решті "котячого" кола ставимо цифру 4 (6 - 2 = 4). У вільній частині "собачого" кола ставимо цифру 3 (5 - 2 = 3). А тепер малюнок сам підказує, що всього у мене 4 + 2 + 3 = 9 подруг.

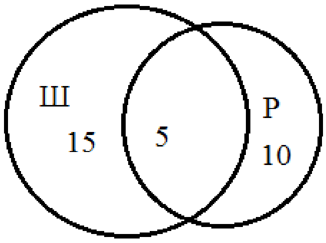


Відповідь. 9 подруг.

Задача 2.

Розв'язок . Нехай коло Ш зображує читачів тільки шкільної бібліотеки, коло Р - тільки районної. Тоді ШР - зображення читачів і районної, і шкільної бібліотек одночасно. З малюнка слідує, що число учнів, які не є читачами шкільної бібліотеки, дорівнює:

(Не Ш) = Р - ШР. Всього 30 учнів, Ш = 20 осіб, Р = 15 осіб. Тоді значення ШР може бути знайдено так (див. рисунок): ШР = (Ш + Р) - 30 = (20 + 15) - 30 = = 5, тобто 5 учнів є читачами шкільної та районної бібліотек одночасно. Тоді (НЕ Ш) = = Р - ШР = 15 - 5 = 10.

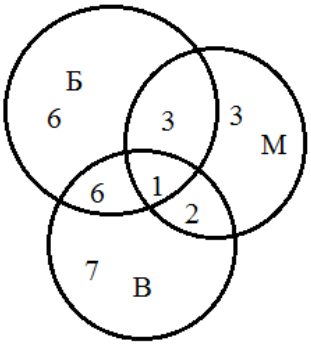


Відповідь: 10 учнів не є читачами шкільної бібліотеки.

Задача 3.

Розв'язок . В цьому завданні 3 множини, з умови завдання видно, що всі вони перетинаються між собою. Тільки "Білосніжку" вибрали 16-6-3-1 = 6 учнів. Тільки "Міккі-Маус" вибрали 9-3-2-1 = 3 учні.

Тільки "Вінні-Пух" вибрали 28- (6 + 3 + 3 + 2 + 6 + 1) = 7 учнів. Тоді, враховуючи, що деякі вибрали по кілька мультфільмів, отримуємо, що "Вінні-Пух" обрали 7 + 6 + 1 + 2 = 16 учнів.

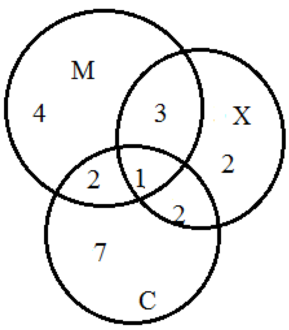


Задача 4.

Розв'язок В цьому завданні 3 множини, з умов завдання видно, що всі вони перетинаються між собою. Тільки музичну школу відвідують 10-3-2-1 = 4 учня. Тільки художню школу відвідують 8-3-2-1 = 2 учня. Тільки спортивну школу відвідують 12-2-2-1 = 7 учнів.

Тільки одну школу відвідують 4 + 2 + 7 = 13 учнів.

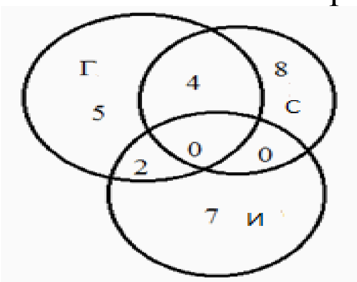
Ні в чому себе не розвивають 24- (4 + 2 + 7 + 3 + 2 + 2 + 1) = 3 учня.



Відповідь. 1) 13 учнів відвідують тільки одну школу, 2) 3 учня себе не розвивають.

Задача 5.

Розв'язок. Так як Гриша всього пограв у 11 ігор, з них 4 головоломки розв'язані Сашею і 2 головоломки - Ігорем, то 11 - 4 - 2 = 5 - ігор зіграно тільки Гришею. Отже, 26 - 7 - 2 - 5 - 4 = 8 - головоломок розв'язано тільки Сашком. А всього



Сашко зіграв в 12 ігор.

Відповідь. 12 ігор зіграв Саша.

Задача 6.

Розв'язок. Скористаємося колами Ейлера.

Нехай велике коло зображує всіх учнів класу, а три менших кола Б, Х і Ф зображують відповідно баскетболістів, хокеїстів і футболістів. Тоді фігура Z, загальна частина кіл Б, Х і Ф, зображує учнів, які захоплюються трьома видами спорту. З розгляду кіл Ейлера видно, що одним лише виглядом спорту - баскетболом займаються 16 - (4 + z + 3) = 9 - z;

одним лише хокеєм 17 - (4 + z + 5) = 8 - z;

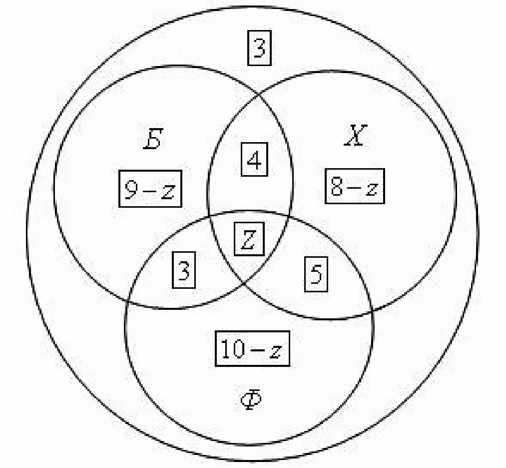
одним лише футболом 18 - (3 + z + 5) = 10 - z.

Складаємо рівняння, користуючись тим, що клас розбився на окремі групи учнів; кількость учнів в кожній групі обведені на малюнку в рамочку:

3 + (9 - z) + (8 - z) + (10 - z) + 4 + 3 + 5 + z = 38,

z = 2.

Таким чином, двоє учнів захоплюються всіма трьома видами спорту. Складаючи числа 9 - z, 8 - z і 10 - z, де z = 2, знайдемо кількість учнів, які захоплюються лише одним видом спорту: 21 учень.

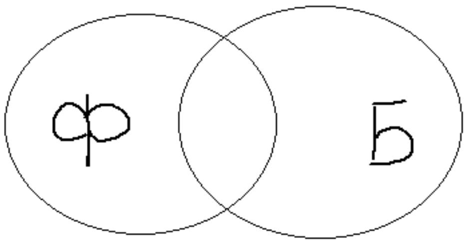


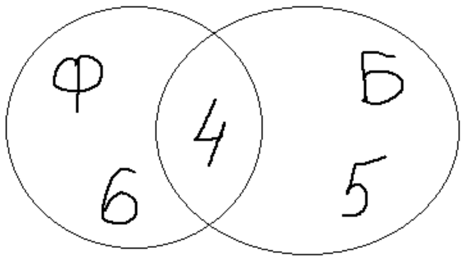
Відповідь: 1) Двоє учнів захоплюються усіма трьома видами спорту . 2) Захоплюються лише одним видом спорту – 21 учень.

Розв'язки до тестів

1. Розв'язок.

Зобразимо умову за допомогою кіл Ейлера. Це допоможе нам в міркуваннях. В цій задачі немає спільної кількості, але є ВСЯ кількість.





Отже, тільки баскетболом займається 15-10 = 5 хлопчиків.

Тільки футболом займається 15-9 = 6 хлопчиків.

У двох секціях 15 (5 + 6) = 4 хлопця.

2. Розв'язок

Припустимо, що лісник прав.

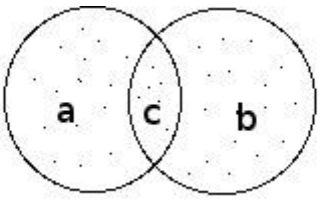
Перший спосіб. Подивимося на ліве і праве маленькі кола. У кожному з них лісник нарахував по три сосни. Значить, інших сосен у великих колах не повинно бути. Але тоді в маленькому центральному колі не повинно бути взагалі жодної сосни.

Другий спосіб. Судячи по трьом маленьким колам, сосен не менше 9. Але судячи по великим колам, сосен не більше 6. Протиріччя. *Відповідь.* Не може.

3. Розв'язок

Вітя полив 1003 куща, із них 1000 він полив один, а три - разом з Анею. Точно так же Аня полила 1003 куща, із них 1000 вона поливала поодинці, а три - з Вітею. Значить, разом вони полили 1000 + 1000 + 3 = 2003 куща. Отже, залишилися не политими 2006 - 2003 = 3 рожевих куща. *Відповідь.* 3 куща.

4. Розв'язок

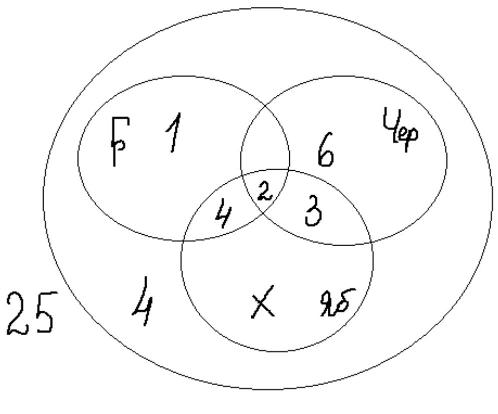


Додамо кількость точок в обох колах. При цьому точки, що знаходяться в їх перетині (тобто і в першому, і в другому), будуть пораховані двічі, тобто зайвий раз, тому від суми потрібно відняти число точок в перетині. Тепер отримаємо ту саму відповідь за допомогою математичних позначень.

Введемо позначення:
a - кількість точок, що лежать тільки в першому колі;
b - тільки в другому колі;
c - в їх перетині.
Тоді в першому колі всього a + c точок, а в другому - c + b. Потрібно знайти загальне число точок. У наших позначеннях це a + c + b. Щоб можна було обчислити цей вираз, його потрібно записати тільки через відомі величини
a + c = 190,
c + b = 230,
c = 70.
У шуканому виразі є a і b, які у відомих зустрічаються тільки в a + c і b + c відповідно. Значить, a + c і b + c потрібно включити в запис. Однак (a + c) + (b + c) не дорівнює a + c + b. Щоб зрівняти їх, потрібно відняти c. Таким чином, отримуємо формулу для розв’язку завдання, в яку залишається тільки підставити конкретні числа:
a + c + b = (a + c) + (b + c) - c = 190 + 230 - 70 = 350.

5. Вказівка 1.
Позначте дітей точками, одне коло - безліч дітей, які купили квитки на пригодницький фільм, а друге коло – безліч дітей, які купили квитки на комедію. У перетині кіл будуть знаходиться точки, які відповідають дітям, які купили квитки на обидва фільми, в об'єднанні - всім дітям (бо всі купили хоча б по одному квитку), а точки, що лежать тільки в одному з кіл – тим, хто купив тільки по одному квитку.
Вказівка 2. Два кола - фільми, точки - діти. Складемо кількості точок в обох колах. Отримаємо загальну кількість точок (воно дано) плюс порахована зайвий раз кількість точок в перетині кіл яке і було потрібно знайти. *Відповідь.* 50

6. Розв’язок



$1 + 4 + 2 + 6 + 3 + 4 + x = 25$

$20 + x = 25$

X = 5 учнів люблять тільки яблока.

4 + 2 +3 + 5 =14 учнів люблять все.

Роздатковий матеріал до уроку

Задача 1. *Всі мої подруги вирощують в своїх квартирах якісь рослини. Шестеро з них розводять кактуси, а п'ятеро - фіалки. І тільки у двох є і кактуси і фіалки. Вгадайте, скільки у мене подруг?*

Задача 2. *За святковим столом сиділо 15 дітей. П'ятеро з них їли тільки сливи, восьмеро — тільки яблука. Фруктами смакували усі. Скільки дітей їли і сливи, і яблука?*

Задача 3. *У класі навчається 14 дівчат. П'ять із них відвідують лише гурток в'язання, а три — і гурток в'язання, і гурток вишивання. Скільки дівчат відвідують лише гурток вишивання?*

Задача 4. *У класі 35 учнів. З них 20 займаються у математичному гуртку, 11 — у біологічному, 10 учнів не відвідують ці гуртки. Скільки біологів захоплюються математикою?*

Задача 5. *Скільки існує цілих додатних чисел, менших 100, які:*

а) діляться і на 2, і на 3;

б) діляться на 2, але не на 3;

в) діляться на 3, але не на 2;

г) діляться на 3 або на 2;

д) не діляться ні на 2, ні на 3?

Урок № 6. Тема. Задачі на розрізання

Сім разів відмір один раз відріж!

Мета уроку:

- *освітня:* формування вміння вирішувати завдання на розрізування і складання фігур;
- *розвиваюча:* розвиток інтересу до вивчення теми і мотивування бажання застосовувати набуті знання і вміння, вміти точно і грамотно викладати свої думки; проявляти пізнавальний інтерес до вивчення предмета, до способів вирішення нових навчальних завдань;
- *виховна:* вміти контролювати процес і результат навчальної математичної діяльності;

Завдання:

- *регулятивні:* вміти знаходити різні способи вирішення геометричних завдань на розрізання та складання фігур на площині;
- *особистісні:* розвивати винахідливість і нестандартність мислення учнів; розвивати інтерес до практичного використання знань в конструюванні;
- *пізнавальні*: виділяти проблему, аналізувати, вміти діяти відповідно до запропонованого алгоритму;
- *комунікативні:* організовувати навчальну взаємодію.

Рекомендації до уроку

I. Познайомитись з поняттям «Розрізання»

II. На прикладах розібрати методи розв'язування задач №1-11, за необхідністю розібрати додаткові задачі № 1-10

III. На вибір виконати завдання для самостійного розв'язку або виконати тести, відповіді записати в таблицю

IV. Зробити самоаналіз

Хід уроку

I. Розрізання

Завданнями на розрізання захоплювалися багато вчених з найдавніших часів. Розв'язаня багатьох простих завдань на розрізання були знайдені ще древніми греками, китайцями, але перший науковий твір на цю тему належить перу Абул-Вефа, знаменитого перського астронома X століття, який жив в Багдаді.

Серйозно геометри зайнялися вирішенням завдань на розрізання фігур на найменше число частин і подальше складання з них фігур лише на початку XX століття.
Одним з основоположників цього захоплюючого розділу геометрії був знаменитий укладач головоломок Генрі Ернест Дьюдені. Свої перші невеликі завдання він почав публікувати в різних журналах. А в 1907 році вийшла в світ його перша книга «Кентерберійські головоломки», яка згодом неодноразово перевидавалася.

Завдання на розрізування захоплюючі перш за все тому, що універсального методу вирішення таких завдань не існує, і кожен, хто береться за їх рішення, може в повній мірі проявити свою кмітливість, інтуїцію та здатність до творчого мислення.

Сім разів відміряй, один раз відріж! "- це прислів'я застерігає нас від поспішності в розв’язуванні задач.

Часто доводиться прості фігурі (відрізкі, прямокутник, кути та ін.) розрізаті на рівні частини.
Якщо ці частини можна накласти одна на одну так, що вони співпадуть (при цьому дозволяється перевертати їх "навиворіт"), то задача розв’язана вірно.

Фігури називаються *рівними,* якщо після вирізання їх можна накласти одну на іншу, тобто якщо одну з них можна зрушити, повернути і (якщо знадобиться) перевернути так, щоб вони повністю співпали.

З визначення рівності фігур слідує, що у рівних фігурах форма межі, сторони, кути, площа і все інше повинно бути однаковим.

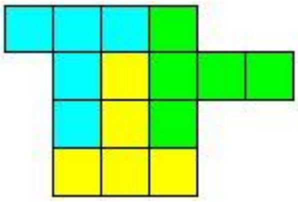
У завданнях на розрізання на рівні частини ми розрізатимемо фігури, що складаються з клітинок. Розрізи можна робити тільки по сторонах клітинок. Такі обмеження дозволять нам порівнювати фігури, отримані при розрізанні.

II. Задачі

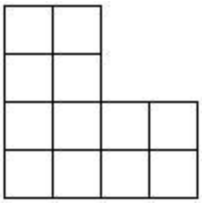
Задача 1. *Спробуйте розрізати зображену на малюнку фігуру на 3 рівні за формою частини:*

Підказка: Маленькі фигури дуже схожі на літеру Т

Розв'язок:

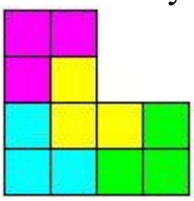


Задача 2. *Розріжте зараз цю фигуру на 4 рівні по формі частини:*

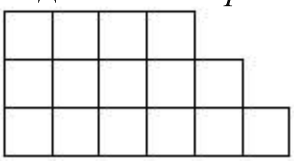


Підказка: Легко здогадатися, що маленькі фігурки будуть складатися з 3 клітинок, а фігур з трьох клітинок не так багато. Їх всього два види: куточок і прямокутник 1 × 3.

Розв'язок: ще раз підрахуємо кількість клітин в маленькій фігурі. Вона дорівнює 12: 4 = 3. Але з трьох клітин можна скласти тільки 2 види фігур: прямокутник розміром 1 × 3 і куточок з трьох клітин. Недовгим перебором легко переконаємося, що на чотири прямокутники дану фігуру розрізати не вийде. Тому нам необхідний куточок з трьох клітин. Саме з такими частинами і будемо шукати розбиття. Якщо ця частина не буде впиратися в кут цілої фігури, тоді в самій її крайній точці залишиться одна клітина. Це недопустимо. Отже куточки потрібно вставити в три великих кута початкової фігури, а останній куточок вставити в її середину. отримаємо:



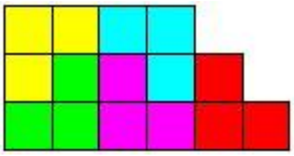
Задача 3. *Розріжте дану фігуру на 5 рівних по формі частин:*



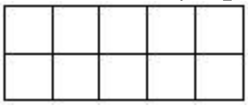
Підказка:

Знайдіть кількість клітинок, з яких складається кожна така фігура. Ці фігурки, схожі на літеру Г.

Розв'язок:

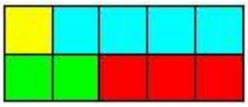


Задача 4. *А зараз потрібно розрізати фігуру з десяти клітин на 4 нерівних один одному прямокутника (або квадрата).*

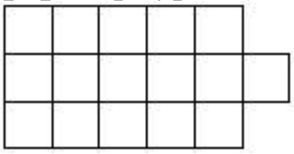


Підказка: Виділіть якийсь прямокутник, а потім в клітини, які залишились спробуйте вписати ще три. Якщо не виходить, то змініть перший прямокутник і спробуйте ще раз.

Розв'язок:

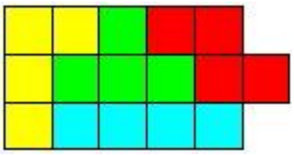


Задача 5. *(ускладнюєтся) Потрібно фігуру розрізати на 4* ***різних по формі*** *фігурки (не обов'язково на прямоугольники).*

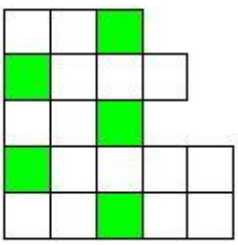


Підсказка: намалюйте спочатку окремо всі види фігур різної форми (їх буде більше чотирьох) і повторіть метод перебору варіантів як і в попередній задачі.

Розв'язок:

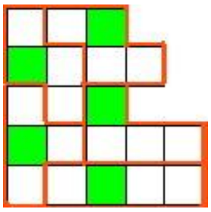


Задача 6. *Розріжте цю фігуру на 5 фігур з чотирьох клітин різної форми таким чином, щоб у кожній із них була зафарбована тільки одна зелена клітка.*

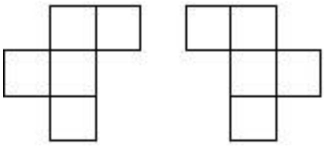


Підказка: Спробуйте почати розрізання з верхнього краю даної фігури і ви відразу зрозумієте, як діяти.

Розв'язок:

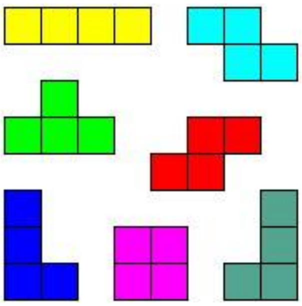


Задача 7. (*За мотивами попередньої задачі.) Знайдіть скільки всього є фігур різної форми, що складаються рівно з чотирьох клітин? Фігури можна крутити, повертати, але не можна піднімати зі стола (з його поверхні), на якому вона лежить. Тобто дві наведені фігурки не будемо вважати рівними, так як вони не можуть отриматись одна з одної за допомогою повороту.*

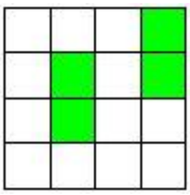


Підказка: Вивчіть розв'язання попередньої задачі і постарайтеся уявити собі різні положення цих фігур при повороті. Неважко здогадатися, що відповіддю в нашій задачі буде число 5 або більше. (Насправді навіть більше шести). Всього існує 7 типів описаних фігур.

Розв'язок:

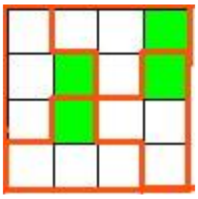


Задача 8. *Розріжте квадрат із 16 клітин на 4 рівні за формою частини так, щоб в кожній із чотирьох частин була рівно одна зелена клітка*

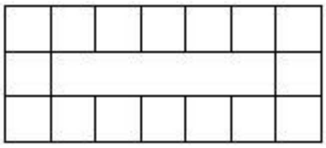


Підказка: Вид маленьких фігурок не квадрат і не прямокутник, і навіть не куточок з чотирьох клітин. Так на які ж фігури треба спробувати розрізати?

Розв'язок:

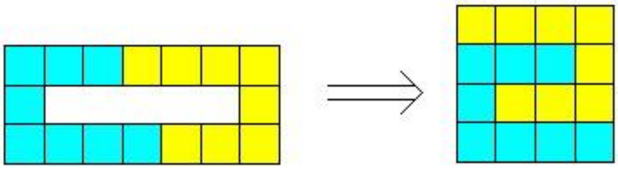


Задача 9. *Зображену фігуру розріжте на дві частини таким чином, щоб з отриманих частин можна було скласти квадрат.*

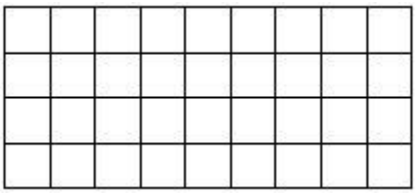


Підказка: Всього в фігурі 16 клітин - значить, квадрат буде размеро 4 × 4. І ще якось потрібно заповнити віконце в середині. Як це зробити? Може бути яким-небудь зрушенням? Тоді оскільки довжина прямокутника дорівнює непарному числу клітин, розрізання потрібно провести не вертикальним розрізом, а по ламаній лінії. Так, щоб верхня частина відрізалась з одного боку від середньої клітини, а нижня з іншого.

Розв'язок:

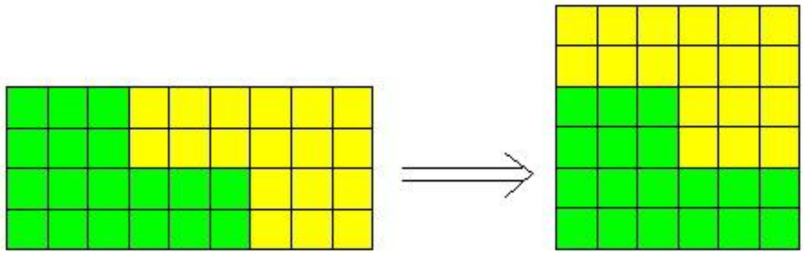


Задача 10. *Розріжте прямокутник розміром 4 × 9 на дві частини з таким розрахунком, щоб в результаті з них можна було скласти квадрат.*

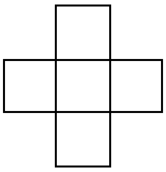


Підказка: Всього в прямокутнику 36 клітин. Тому квадрат вийде розміром 6 × 6. Так як довша сторона складається з дев'яти клітин, то три з них потрібно відрізати. Як далі піде цей розріз?

Розв'язок:

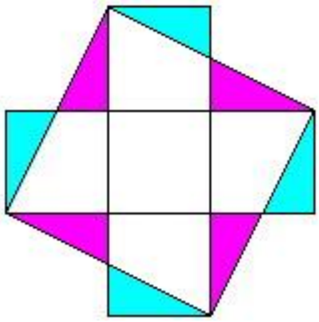


Задача 11. *Хрестик з п'яти клітин, показаний на малюнку потрібно розрізати (можна різати самі клітини) на такі частини, з яких можна було б скласти квадрат.*



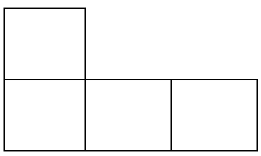
Підказка: зрозуміло, що як би ми по лініях клітинок не різали - квадрат не отримаємо, тому що клітин всього 5. Це завдання єдине, в якому дозволяється різати не по клітинам. Однако їх все одно добре було залишити у вигляді орієнтира. Наприклад, варто зауважити, що нам якось потрібно прибрати поглиблення, які у нас є - а саме, у внутрішніх кутах нашого хреста. Як би це зробити? Наприклад, зрізуючи якісь випираючи трикутники з зовнішніх куточків хреста ...

Розв'язок: розріжте так як показано на малюнку і вставте блакитні трикутники в порожні області, показані фіолетовими трикутниками.

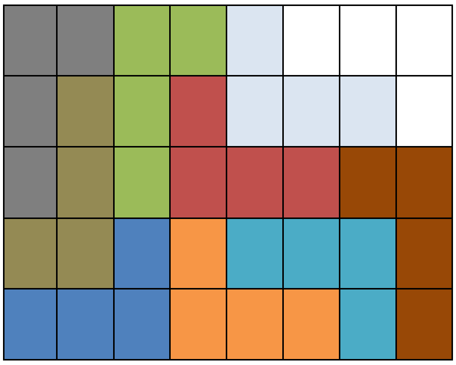


Додаткові задачі

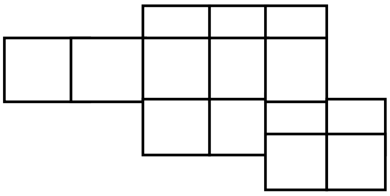
Задача 1.*Розріжте клітчастий прямокутник розміром 5 × 8 на фігурки з чотирьох клітинок такого виду*



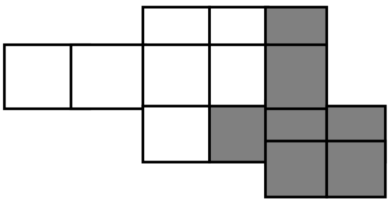
Розв'язання: Зауважимо, що шукане розрізання можна провести не в єдиний спосіб.



Задача 2. *Розрізати фігуру, зображену на малюнку, на дві рівні частини.*

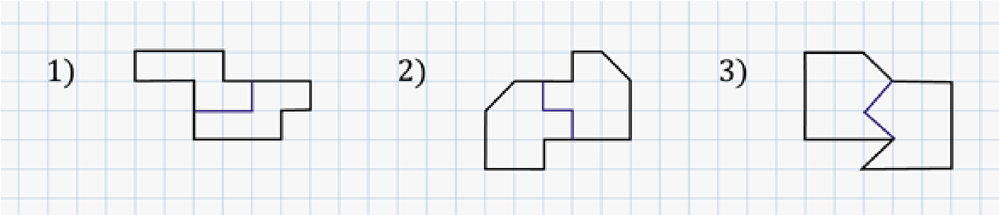


Розв'язання: Умовою задачі вимагається розрізати дану фігуру на дві «рівні частини». Рівні частини слід розуміти не в сенсі «частин рівних площ», а в сенсі рівних фігур. Нагадаємо, що дві фігури на площині називають рівними, якщо їх можна сумістити («повністю накласти одну на одну») за допомогою певного «руху».

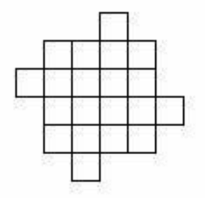


Задача 3. *Розділіть фігури, зображені на малюнку, на 2 рівні частини. Розрізати можна не тільки по лініях клітин, але і по їх діагоналям.*

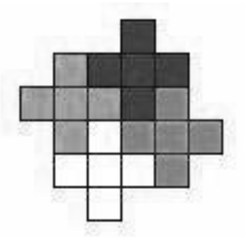
Розв'язок:

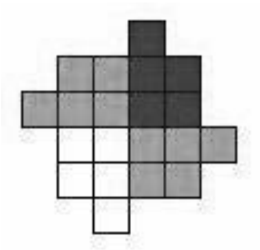


Задача 4. *Розділіть фігуру, зображену на малюнку, на чотири рівні частини так, щоб лінія розрізів йшла по сторонам квадратів. Придумайте два способи розв'язання.*

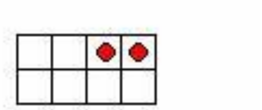


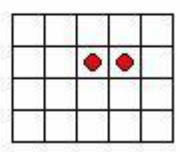
Розв'язок:



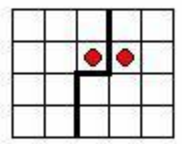


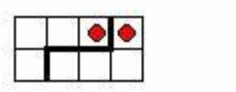
Задача 5. *Розріжте фігури, зображені на малюнку, на дві рівні частини по лініях сітки так, щоб в кожній із частин була червона крапка.*



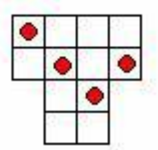


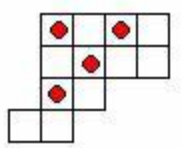
Розв'язок:



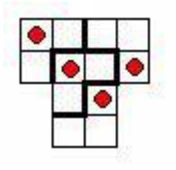


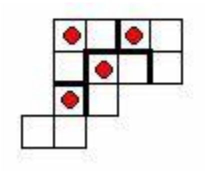
Задача 6. *Розріжте фігури, зображені на малюнку, на дві рівні частини по лініях сітки так, щоб в кожній частині була червона крапка.*





Розв'язок:



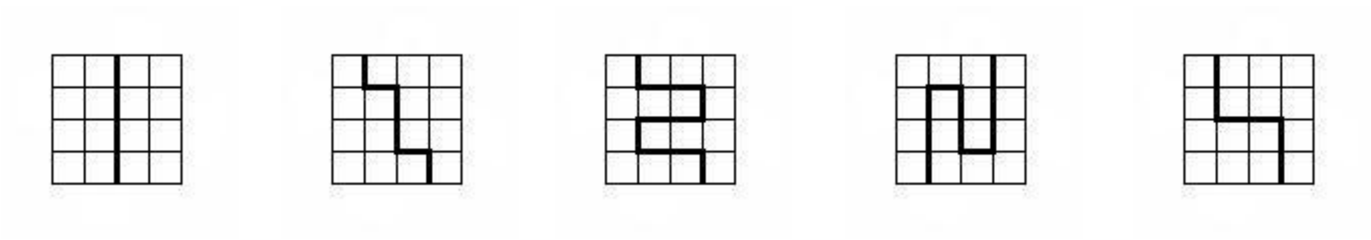


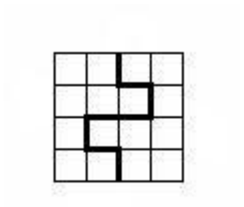
Задача 7. *На картатому папері намальований квадрат розміром 5 * 5 клітин. Придумайте, як розрізати його по лініях сітки на 7 різних прямокутників.*

Розв'язок:

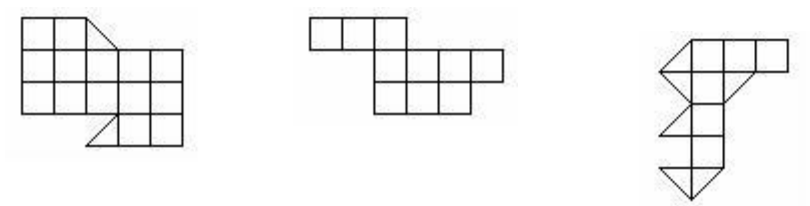
Задача 8. *Розріжте квадрат розміром 4 * 4 клітини на дві рівні частини так, щоб лінія розрізів йшла по сторонам клітин. Знайдіть всі можливі способи розв'язку. (Фігури, отримані при різних способах розрізання, повинні бути різними.)*

Розв'язок:

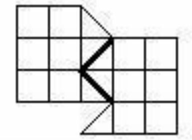


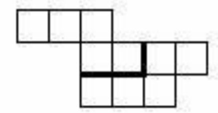


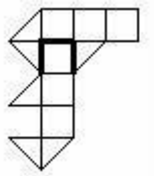
Задача 9. *Розріжте фігури, зображені на малюнку, на дві рівні частини. (Розрізати можна не тільки по сторонам клітин, але і по їх діагоналям.)*



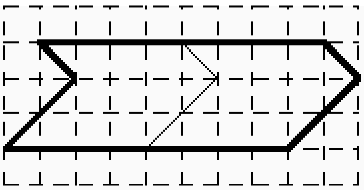
Розв'язок:





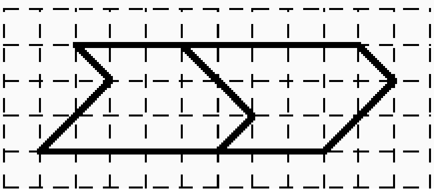


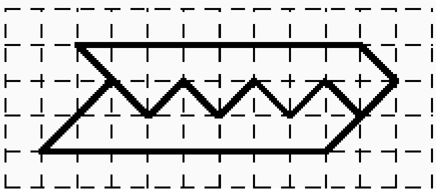
Задача 10. *Петро розрізав фігуру на дві рівні частини, як показано на малюнку. Придумайте, як розрізати цю фігуру на дві рівні частини іншим способом.*



Розв'язок:

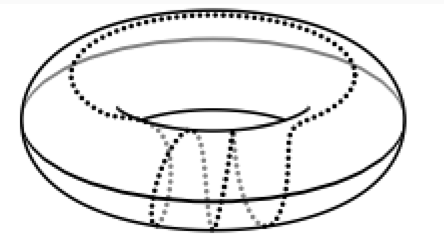
Наведемо ще два можливих варіанти розрізу, крім наведеного в умові.





Зауваження. Розглянута в завданні фігура є прикладом несиметричної фігури (яка не має ні центру, ні осі симетрії), яку можна розрізати на дві рівних фігури трьома різними способами. Цікаво було б відповісти на наступне запитання: чи існує несиметрична фігура, яку можна розрізати на дві рівні, чотирма або більшим кількістю способів?

Задача 11. *По поверхні планети, яка має форму бублика, проповзли, залишаючи за собою сліди, два равлики: один по зовнішньому екваторі, а інший по гвинтовій лінії (див. рис.). На скільки частин розділили поверхню планети сліди равликів? (Достатньо написати відповідь.)*



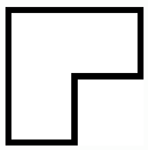
Відповідь. На три частини.

III. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Чи можна спекти такий торт, який може бути розділений одним прямолінійним розрізом на 4 частини?

Задача 2. У двох чоловік було два квадратних торта. Кожен зробив на своєму торті по 2 прямолінійних розрізу від краю до краю. При цьому в одного вийшло три шматка, а в іншого - чотири. Як це могло бути?

Задача 3. У Кая є крижана платівка у формі "куточка" (див. рисунок). Снігова Королева зажадала від Кая розрізати її на чотири рівні частини. Як йому це зробити?



Задача 4. У Чарівній Країні свої чарівні закони природи, один з яких каже: «Килим-літак буде літати тільки тоді, коли він має прямокутну форму». У Івана-царевича був килим-літак розміром 9 × 12. Якось раз Змій Горинич підкрався і відрізав від цього килима маленький килимок розміром 1 × 8. Іван-царевич дуже засмутився і хотів було відрізати ще шматочок 1 × 4, щоб вийшов прямокутник 8 × 12, але Василина Премудра запропонувала вчинити по-іншому. Вона розрізала килим на три частини, які чарівними нитками сшила квадратний килим-літак розміром 10 × 10. Чи зможете ви здогадатися, як Василиса Премудра переробила зіпсований килим?

Задача 5. Розділіть круг трьома прямолінійними розрізами на: а) 4 частини; б) 5 частин; в) 6 частин; г) 7 частин.

Задача 6. Розріжте квадрат на п'ять трикутників так, щоб площа одного з них дорівнювала сумі площ інших трикутників.

IV. Тести

1. На рис. зображений квадрат зі стороною в 4 клітини. Розділіть квадрат на 2 рівні частини так, щоб лінія розрізу йшла по сторонам клітин. Способи розрізання квадрата на 2 частини вважатимемо різними, якщо частини квадрата, отримані при одному способі розрізання, не рівні частинам, отриманим при іншому способі. Скільки всього розв’язків має завдання?

Виберіть відповідь:

А) 3
Б) 4
В) 5
Г) 6

2. Розділіть квадрат розміром 4 х 4 клітини на 4 рівні частини так, щоб лінія розрізу йшла по сторонам клітин. Скільки всього рішень має завдання?

Виберіть відповідь:

А) 3
Б) 4
В) 5
Г) 6

3. Петро та Василь розрізали два однакових прямокутники. У Петра вийшло два прямокутники з периметром 40 см кожен, а у Васі - два прямокутники з периметром 50 см кожен. Який периметр мали початкові прямокутники?
Виберіть відповідь:

А) 10 см
Б) 30 см
В) 60 см
Г) 90 см

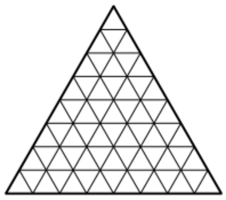
4. Чи можна квадратний аркуш паперу розміром 2 х 2 скласти так, щоб його можна було розрізати на 4 квадрати 1 х 1 одним помахом ножиців?
Виберіть відповідь:

А) можливо
Б) не можливо
В) можливо розрізати 3 квадрати
Г) інша відповідь

5. На картатому папері намальований квадрат зі стороною 5 клітин. Його потрібно розбити на 5 частин однакової площі, проводячи відрізки всередині квадрата тільки по лініях сітки. Чи може виявитися так, що сумарна довжина проведених відрізків не перевищує 16 клітин?
Виберіть відповідь:

А) Може, але перевищує 16
Б) Да, може
В) ні
Г) інша відповідь

6. Рівносторонній трикутник зі стороною 8 розділили на рівносторонні трикутнички зі стороною 1 (див. рис.). Яку найменшу кількість трикутничків треба зафарбувати, щоб всі крапки перетину ліній (в тому числі і ті, що по краях) були вершинами хоча б одного зафарбованого трикутничка?



Виберіть відповідь:

А) 8 В) 15

Б) 14 Г) 45

V. Самооцінка учня:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Вдалося отримати результат (рішення, відповідь)?						
Правильно чи з помилкою?						
Самостійно або з чиєюсь допомогою?						

Відповіді до тестів:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Г)	**В)**	**В)**	**А)**	**Б)**	**В)**

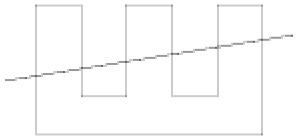
Розв'язки до задач

Задача 1.

Підказка: Зауважте, торт не обов'язково повинен бути опуклою фігурою.

Розв'язок: Якби торт був опуклою фігурою, цього зробити було б не можливо, але ж ніде не сказано, що він повинен бути таким. Можно, наприклад, спекти торт у вигляді букви "Ш" і розрізати так, як показано на малюнку.

Відповідь:



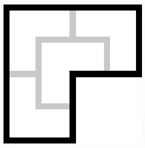
Задача 2.

Підказка. Зверніть увагу, розрізи можуть перетинатися.

Розв'язок. Це могло статися, якщо в першому випадку розрізи не перетиналися, а в другому - перетнулися. Наприклад, якщо в першому випадку вони були паралельні один одному, а в другому - перпендикулярні.

Задача 3.

Розв'язок. Треба розрізати цей куточок на чотири маленьких куточка так, як показано на малюнку:



Задача 4.

Підказка. Подумайте, як став виглядати килим-літак після того, як Змій Горинич відрізав від нього шматок.

Розв'язок. Після того як Змій Горинич зіпсував килим, Іван-царевич міг відрізати від цього килима шматочок розміром 1х4 і перетворити його в килим розміром 8 × 12. Це означає, що після уходу Змія Горинича килим виглядав так, як показано на рис. 1. Василиса Премудра розрізала цей килим так, як показано на рис. 2, і пошила так, як показано на рис. 3.

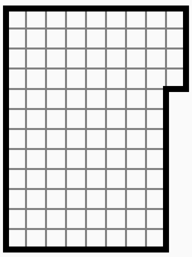


Рис 1

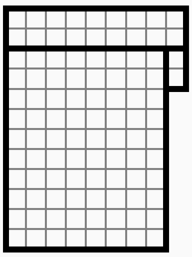


Рис 2

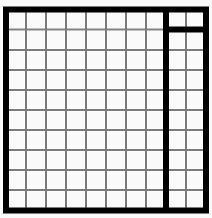
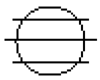
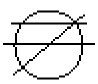
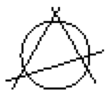


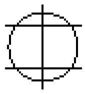
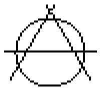
Рис 3

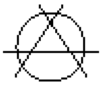
Задача 5.

*Розв'язок.*Наприклад,

а)  або 

б)  або 

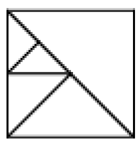
в)  або 

г) 

<u>Задача 6.</u>

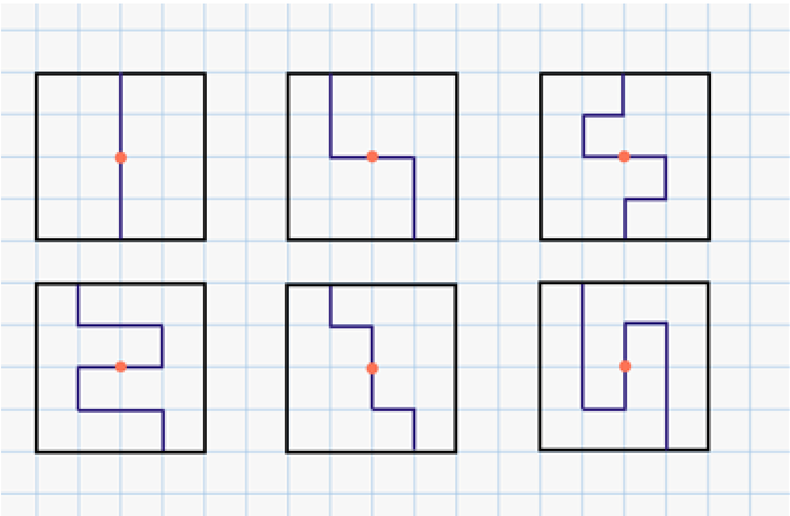
Підказка. Спробуйте розрізати квадрат по діагоналі.

Розв'язок. Разріжемо квадрат по діагоналі. Один із трикутників відкладемо в сторону. Тепер на які б трикутники ми ні розрізали другий трикутник, умову задачі буде виконано. Один з можливих варіантів наведено на рисунку.

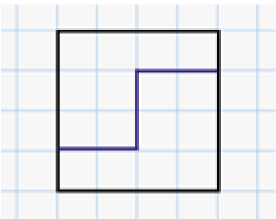


Розв'язки до тестів

1. **Розв'язок:**

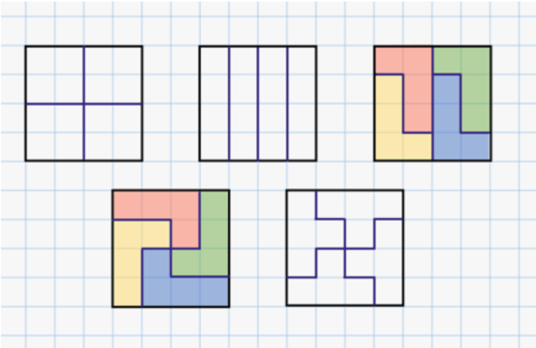


Квадрат можно розділити на дві рівні частини і таким способом… Але це не буде задовольняти умові,



Тому що цей розв'язок і наше друге рішення однакові, так як отримані в них фігури можно совмістити накладанням, якщо повернути один із квадратов на 90°. *Відповідь:* 6.

2.Розв’язок:



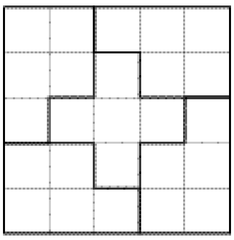
Зверніть увагу на третій і четвертий способи. Ці два способи різні, але частини, на які розрізається квадрат такими способами, однакові.

Відповідь: 5.

3. Розв'язок. Якщо сторони початкового прямокутника a и b,
то у Петра вийшли периметри, рівні 2a + b = 40,
а у Васі - рівні a + 2b = 50.
Тоді 3a + 3b = 40 + 50 = = 90.
Звідки 2a + 2b = 60 – периметр початкових прямокутніків.
Відповідь: 60 см

4. Підказка. Складати квадрат дозволяється не тільки по лініях сітки.
Розв'язок. Складемо квадрат навпіл по діагоналі, а потім отриманий рівнобедрений прямокутний трикутник - ще раз навпіл. Зараз всі 4 відрізка довжиною 1, за якими потрібно розрізати квадрат 2 х 2 на 4 квадрати 1 х 1, поєдналися. Тим самим, зробивши єдиний розріз ножицями, отримаємо 4 квадрата 1 х 1. *Відповідь*. Можливо

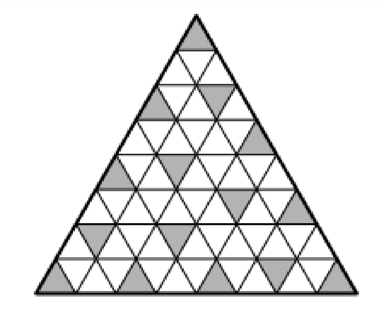
5. Розв'язок. Один з можливих прикладів наведено на рис. (сумарна довжина проведених відрізків дорівнює 16)



Відповідь. Да, може.

6. Розв'язок. Всього точок перетину ліній 1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45, а у трикутничка три вершини, так що принаймні 45: 3 = 15 трикутничків доведеться зафарбувати.

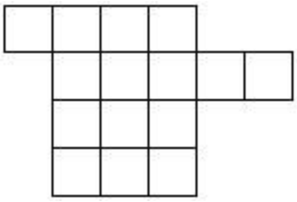
Приклад з 15 трикутничками див. на рис.



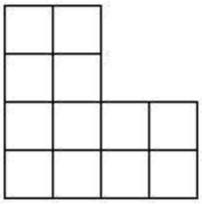
*Відповідь.*15 трикутничків.

Роздатковий матеріал до уроку

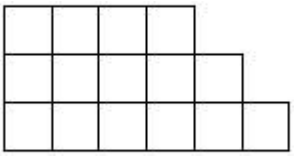
Задача 1. *Спробуйте розрізати зображену на малюнку фігуру на 3 рівні за формою частини:*



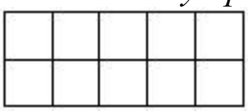
Задача 2. *Розріжте зараз цю фигуру на 4 рівні по формі частини:*



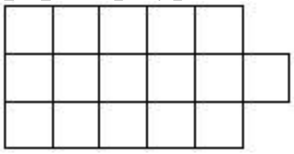
Задача 3. *Розріжте дану фігуру на 5 рівних по формі частин:*



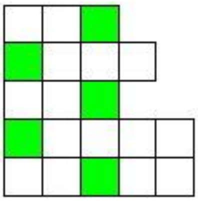
Задача 4. *А зараз потрібно розрізати фігуру з десяти клітин на 4 нерівних один одному прямокутника (або квадрата).*



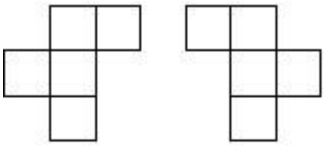
Задача 5. *(ускладнюєтся) Потрібно фігуру розрізати на 4* ***різних по формі*** *фігурки (не обов'язково на прямоугольники).*



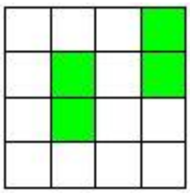
Задача 6. *Розріжте цю фігуру на 5 фігур з чотирьох клітин різної форми таким чином, щоб у кожній із них була зафарбована тільки одна зелена клітка.*



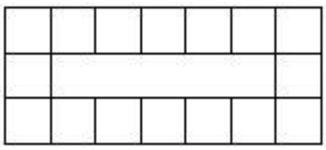
Задача 7. (*За мотивами попередньої задачі.) Знайдіть скільки всього є фігур різної форми, що складаються рівно з чотирьох клітин? Фігури можна крутити, повертати, але не можна піднімати зі стола (з його поверхні), на якому вона лежить. Тобто дві наведені фігурки не будемо вважати рівними, так як вони не можуть отриматись одна з одної за допомогою повороту.*



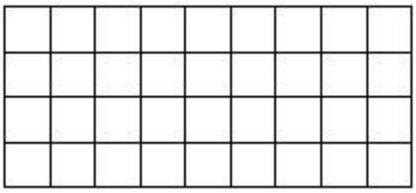
Задача 8. *Розріжте квадрат із 16 клітин на 4 рівні за формою частини так, щоб в кожній із чотирьох частин була рівно одна зелена клітка*



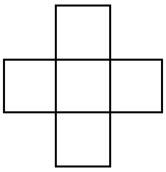
Задача 9. *Зображену фігуру розріжте на дві частини таким чином, щоб з отриманих частин можна було скласти квадрат.*



Задача 10. *Розріжте прямокутник розміром 4 × 9 на дві частини з таким розрахунком, щоб в результаті з них можна було скласти квадрат.*

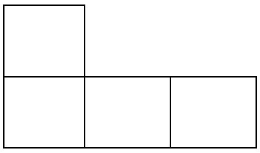


Задача 11. *Хрестик з п'яти клітин, показаний на малюнку потрібно розрізати (можна різати самі клітини) на такі частини, з яких можна було б скласти квадрат.*

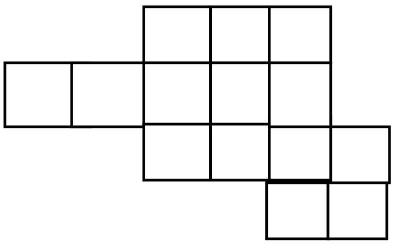


Додаткові задачі

Задача 1.Розріжте клітчастий прямокутник розміром 5 × 8 на фігурки з чотирьох клітинок такого виду

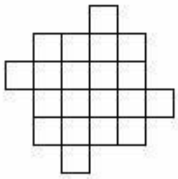


Задача 2. Розрізати фігуру, зображену на малюнку, на дві рівні частини.

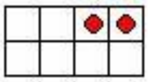
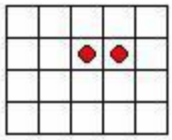


Задача 3. Розділіть фігури, зображені на малюнку, на 2 рівні частини. Розрізати можна не тільки по лініях клітин, але і по їх діагоналям.

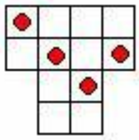
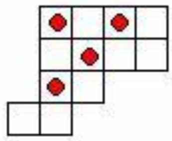
Задача 4. Розділіть фігуру, зображену на малюнку, на чотири рівні частини так, щоб лінія розрізів йшла по сторонам квадратів. Придумайте два способи розв’язання.



Задача 5. Розріжте фігури, зображені на малюнку, на дві рівні частини по лініях сітки так, щоб в кожній із частин була червона крапка.

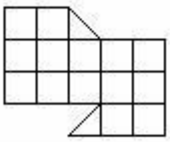
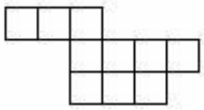
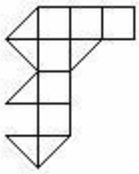
Задача 6. Розріжте фігури, зображені на малюнку, на дві рівні частини по лініях сітки так, щоб в кожній частині була червона крапка.

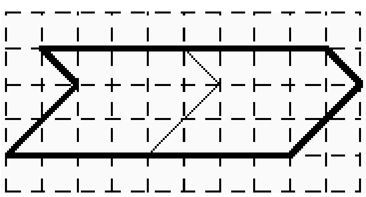
Задача 7. На картатому папері намальований квадрат розміром 5 * 5 клітин. Придумайте, як розрізати його по лініях сітки на 7 різних прямокутників.

Задача 8. Розріжте квадрат розміром 4 * 4 клітини на дві рівні частини так, щоб лінія розрізів йшла по сторонам клітин. Знайдіть всі можливі способи розв’язку. (Фігури, отримані при різних способах розрізання, повинні бути різними.)

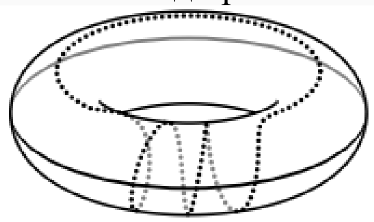
Задача 9. Розріжте фігури, зображені на малюнку, на дві рівні частини. (Розрізати можна не тільки по сторонам клітин, але і по їх діагоналям.)

Задача 10. Петро розрізав фігуру на дві рівні частини, як показано на малюнку. Придумайте, як розрізати цю фігуру на дві рівні частини іншим способом.



Задача 11. По поверхні планети, яка має форму бублика, проповзли, залишаючи за собою сліди, два равлики: один по зовнішньому екваторі, а інший по гвинтовій лінії (див. рис.). На скільки частин розділили поверхню планети сліди равликів? (Достатньо написати відповідь.)



Урок № 7. Тема. Задачі на переливання

Предмет математики настільки серйозний, що не можна упускати випадку, зробити його трохи цікавішим.

Блез Паскаль

Мета: ознайомити учнів з поняттям і типами задач на переливання, способами їх розв'язання, закріпити навички розв'язання задач на переливання.
Завдання: розглянути завдання на розподіл деякої кількості рідини за допомогою двох порожніх додаткових судин за найменше число переливань; розглянути завдання на отримання деякої кількості рідини з великої або нескінченної по об'єму посудини, водойма або джерела за допомогою двох порожніх судин (при переливанні можна зливати рідину в початкову посудину або водойм)

Рекомендації до уроку
I. Познайомитись з методичними вказівками до розв'язку задач на переливання
II. На прикладах розібрати методи розв'язування задач №1-11, за необхідністю розібрати додаткові задачі № 1-9
III. На вибір виконати завдання для самостійного розв'язку або виконати тести, відповіді записати в таблицю
IV. Зробити самоаналіз

I. Методичні вказівки
Задачу на переливання називають *задачею Пуассона.*
Симеон Дені Пуассон (1781-1840)- відомий французький математик, механік, фізик. Коли юний Пуассон ще сумнівався у виборі життєвого шляху, приятель показав йому декілька задача, з якими ніяк не міг упоратися сам. Пуассон розв'язав їх за годину.
Задачі на переливання допомагають розвивати логічне мислення, просторову уяву, витримку, наполегливість у знаходженні оптимального розв'язку.
Задачі на переливання - це задачі, в яких за допомогою посудин відомих ємностей потрібно відміряти певну кількість рідини.
Традиційно в задачах на переливання посудини не мають ділень, тобто переливати можна лише до тих пір, поки посудина, в яку наливаємо, не заповниться до кінця, або доки зовсім не спустіє посудина, з якої переливаємо. Просто так зупинитися на середині або розлити вміст посудини на дві рівні частини теж не вийде.

Задачі на переливання рідини можна розв'язувати різними способами: з початку, з кінця, добором варіантів. Але найбільш поширений метод проб,

який складається в переборі можливих варіантів. Зрозуміло, що такий метод розв'язку не зовсім вдалий, в ньому важко виділити якийсь загальний підхід до розв'язання інших подібних завдань.
Більш систематичний підхід до рішення задач "на переливання" полягає в використанні окремих таблиць, в які заносять кількість рідини в кожному з наявних судин.

У завданнях на переливання потрібно вказати послідовність дій, при якій здійснюється необхідне переливання і виконані всі умови задачі. Якщо не сказано нічого іншого, вважається, що

- всі ті посудини без поділів,
- не можна переливати рідини "на око"
- неможливо нізвідки додавати рідини і нікуди зливати

Ми можемо точно сказати, скільки рідини в посудині, тільки в наступних випадках.

1) знаємо, що посудина порожня,
2) знаємо, що посудина повна, а в задачі дана її місткість,
3) в задачі дано, скільки рідини в посудині, а переливання з використанням цієї посудини не проводилися
4) в переливанні брали участь дві посудини, в кожній з яких відомо, скільки було рідини, і після переливання вся рідина помістилася в одній із них
5) в переливанні брали участь дві посудини, в кожній з яких відомо, скільки було рідини, відома місткість тієї посудини, в яку переливали, і відомо, що вся рідина в нього не помістилася: ми можемо знайти, скільки її залишилося в іншій посудині

II. Задачі

Задача 1. *Дядько Федір зібрався їхати до батьків у гості і попросив у кота Матроскіна 4 л простоквашинського молока. А у Матроскіна тільки 2 порожніх бідони: трилітровий і п'ятилітровий. І восьмилітрове відро, наповнене молоком. Як Матроскіну відлити 4 літри молока за допомогою наявних судин?*

Із восьмилітрового відра, наповненого молоком, треба відлити 4 літри за допомогою двох порожніх бідонів: трилітрового і пятилітрового.

Розв'язок:
1. Переливаємо з восьмилітрового відра 5 літрів молока в п'ятилітрове.
2. Переливаємо з пятилітрового відра 3 літри в трилітрове.
3. Переливаємо їх тепер в восьмилітрове відро. Отже, тепер трилітрове відро порожнє, в восьілітровому 6 літрів молока, а в п'ятилітрову - 2 літри молока.

4. Переливаємо 2 літри молока з пятилитрового відра в трилітрове, а потім наливаємо 5 літрів з восьмилітрового в п'ятилітрове. Тепер в восьмилітровому 1 літр молока, в п'ятилітровому - 5, а в трилітровому - 2 літри молока.
5. Доливаємо повністтю трилітрове відро з пятилитрового і переливаємо ці 3 літри в восьмилітрове відро. У восьмилітровому відрі стало 4 літри, так само, як і в п'ятилітровому. Задача розв'язана.

Ходи	1	2	3	4	5	6	7	8
8 л	8	3	3	6	6	1	1	4
3 л	-	-	3	-	2	2	3	-
5 л	-	5	2	2	-	5	4	**4**

Задача 2. У бочці 20 літрів вина. Сусід просить налити йому 5 літрів, а сам прийшов з відрами на 7 і 13 літрів. Немає проблем - сказав господар. Як він вчинив?

Розв'язок:

Відро	7 л	13 л	20 л
До переливання	0	0	20
Після 1-го переливання	0	13	7
Після 2-го переливання	7	6	7
Після 3-го переливання	0	6	14
Після 4-го переливання	6	0	14
Після 5-го переливання	6	13	1
Після 6-го переливання	7	12	1

Після 7-го переливання	0	12	8
Після 8-го переливання	7	5	8

Задача 3. Є шестилітрова банку соку і дві порожні банки: трьох- і чотирилітрова. Як налити 1 літр соку в трилітрову банку?

Розв'язок:

Банки			
До переливання	6	0	0
Після 1-го переливання	2	4	0
Після 2-го переливання	2	1	3
Після 3-го переливання	5	1	0
Після 4-го переливання	5	0	1

Задача 4. *Шрек вирішив зробити Фіоні подарунок на день народження - приготувати суп, про який вона мріяла вже давно. Рецепт цього супу він знайшов в кулінарній книзі, але виникла невелика проблема: потрібно налити в каструлю рівно 5 л води. Але як це зробити, якщо у Шрека 7-літрове відро і 3-літрова банка? Допоможіть своєму улюбленому герою виконати мрію Фіони.*

Розв'язок:

Ходи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7 л	-	3	3	6	6	7	-	2	2	5
3 л	3	-	3	-	3	2	2	-	3	-

Задача 5. *Поруч з лабораторією протікає бурхлива річка. Як за допомогою двох бочок об'ємом 3 і 5 галонів відміряти рівно 4 галона річної води?*

Вказівка. Насправді в цьому завданні 3 судини: 3-хгаллонний, 5-тигалонний і річка, куди теж можна виливати воду з судин.

Розв'язок. 4 галона можуть поміститися тільки в 5-тигаллонну посудину. Вони можуть бути отримані після доливання 1 галона до 3, 2 галонів до 2, 3 галонів до 1, або шляхом відливання від 5 галонів 1 галона. Щоб можна було відлити рівно 1 галон, потрібно, щоб у бочці призначення був вільний рівно 1 галон, тобто щоб в 3-хгалонній бочці перед цим було 2 галона. Різницю об'ємів бочок легко отримати: 2 галона виходить, якщо набрати повну 5ти-галонну бочку і відлити з неї в порожню 3-хгалонну бочку. Після цього їх треба перелити в 3-хгалонну бочку, попередньо спорожнивши її назад в річку. Отже, відповідь може бути записана так (в кожному стовпці поточна наповненість бочки, стрілками позначені наливання і відливання; в першому рядку в дужках написані об'єми бочок):

(max 3H)	(max 5H)	Річка
0	0 ↓	↑
0 ↓	5 ↑	
3 ↑	2	↓
0 ↓	2 ↑	
2	0 ↓	↑
2 ↓	5 ↑	
3	4	

Задача №6. *Одного разу Вінні-Пух захотів поласувати медом і пішов до бджіл в гості. По дорозі нарвав букет квітів, щоб подарувати трудівницям бджілкам. Бджілки дуже зраділи, побачивши ведмедика з букетом квітів, і сказали: «У нас є велика бочка з медом. Ми дамо тобі меду, якщо ти зможеш за допомогою двох судин об'ємом 3 л і 5 л налити собі 4 л! » Вінні-Пух довго думав, але все-таки зміг розв'язати задачку. Як він це зробив?*

Розв'язок:

Ходи	1	2	3	4	5	6
5л	5	2	2	-	5	4

3л	-	3	-	2	2	3

Задача №7. *У підніжжя високої гори, на березі тихої річки стояв невеликий аул. Жили в ньому два брата-мисливця. Посилає старший брат молодшого за водою і дає йому два бурдюки, об'ємом 8 л і 5 л і просить принести рівно 7 л води. Чи зможе молодший брат виконати прохання старшого брата?*

Розв'язок:

Ходи	1	2	3	4	5	6	7
8л	–	5	5	8	–	2	7
5л	5	–	5	2	2	5	–

Задача №8. *Жила-була дівчина. Два мисливця вирішили щастя своє випробувати, пішли до неї, щоб одружитися з нею. Дівчина хитра була і сказала: "Тому я в дружини дістанусь, хто зможе кумис з 12 л бурдюка перелити порівну", - і дає їм ще два бурдюки об'ємом 5 л і 8л. Чи зможуть мисливці впоратися з нелегким завданням?*

Розв'язок:

Ходи	1	2	3	4	5	6	7	8
12л	12	4	4	9	9	1	1	6
8л	0	8	3	3	0	8	6	6
5л	0	0	5	0	3	3	5	0

Задача 9. *Губці Бобу терміново потрібно налити з водопровідного крана 6 л води. Але він має лише дві посудини 5-літрову і 7-літрову. Як йому це зробити?*

Розв'язок:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5л	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5
7л	7	2	2	0	7	4	4	0	7	**6**

Задача 10. *У Гаррі Потера є два пісочних годинника: на 7 хвилин і на 11 хвилин. Чарівне зілля повинно варитися 15 хвилин. Як зварити його Гаррі Потеру, перевернувши годинник мінімальну кількість разів?*

Розв'язок:

15 = (11-7) +11. Одночасно перевернемо годинник, через 7 хвилин починаємо

варити зілля. Після 4 хвилин (пісок в годиннику на 11 хвилині закінчиться) знову

перевернемо годинник на 11 хвилин.

Задача 11. *Одним важливим елементом еліксиру є кров кобри. У чаші зібрано 10 ложок зміїної крові. Маємо ковші об'ємом 3 ложки і 4 ложки. Як вченому отримати 5 ложок крові?*

Розв'язуючи задачу, пам'ятайте, що потрібно зробити не більше 5 переливань, інакше дорогоцінна кров згорнеться і перестане бути придатною.

Розв'язок:

(ЧАША)	(3 л.)	(4 л.)
10 ↑	0	0 ↓
6	0 ↓	4 ↑
6 ↓	3 ↑	1
9	0 ↓	1 ↑
9 ↑	1	0 ↓
5	1	4

Додаткові задачі

Задача 1. *Відлийте з цистерни 13 л води, користуючись бідонами в 5 л і 17 л.*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5 л	5	0	5	0	5	0	5	3	3	0	5	0	5	0
17 л	0	5	5	10	10	15	15	17	0	3	3	8	8	**13**

Задача 2. *Є три каструлі: 8 л - з компотом, 3 л і 5 л - порожні. Як розділити компот навпіл? (Компот, на відміну від води, виливати не можна.)*

8 л	8	5	5	2	2	7	7	4	4
3 л	0	3	0	3	1	1	0	3	0
5 л	0	0	3	3	5	0	1	1	4

Задача 3.*Перша посудина має об'єм 9 л, друга−5 л, а третя − 3л. Перша посудина заповнена водою, а дві інші − порожні. Як за допомогою цих посудин відміряти 1 л води? Як відміряти 4 л?*

Розв'язок:

	1	2	3
9л	1	1	0
5л	5	0	**4**
3л	3	3	0

Задача 4. *Бідон місткістю 10 л наповнений молоком. Потрібно перелити з цього бідона 5 л у семилітровий бідон, використовуючи при цьому ще один бідон місткістю 3 л. Як це зробити?*

Розв'язок:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3 л	0	3	0	3	0	1	1	3	0
7 л	7	4	4	1	1	0	7	5	**5**
10 л	3	3	6	6	9	9	2	2	5

Задача 5. *Дванадцятилітрова каністра заповнена гасом. Як розділити гас на дві рівні частини, використовуючи дві каністри місткістю 5 і 8 літрів?*

Розв'язок:

	1	2	3	4	5	6	7
5 л	0	5	0	3	3	5	0
8 л	8	3	3	0	8	6	**6**
12 л	4	4	9	9	1	1	**6**

Задача 6. *Є три бочки місткістю 6 відер, 3 відра і 7 відер. У першій і третій міститься відповідно 4 і 6 відер квасу. Потрібно, використовуючи тільки три бочки, розділити квас на три рівні частини.*

Розв'язок:

	1	2	3	4	5	6
3 в.	0	3	2	2	3	0
6 в.	4	1	1	6	5	5
7 в.	6	6	7	2	2	5

Задача 7. *Використовуючи два відра об'ємом 5 л і 3 л, наберіть із бочки 4 л води?*

Розв'язок:

	1	2	3	4	5	6	7
3 л	0	0	3	0	2	2	3
5 л	0	5	2	2	0	5	4

Задача 8 . *Використовуючи два відра об'ємом 5 л і 4 л, наберіть з водопровідного крана*
3 л води.

Розв'язок:

	1	2	3	4	5
4 л	0	4	0	4	3
5 л	0	0	4	4	5

III. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. У Карлсона є відро варення, об'ємом 7 літрів. У нього є 2 порожніх відерця - 4-літрове і 3-літрове. Допоможіть Карлсону відлити 1 літр варення до чаю в менше (3-літрове) відерце, залишивши 6 літрів у великому (7-літровому) відрі.

Задача 2. Влітку Вінні-Пух зробив запас меду на зиму і вирішив розділити його навпіл, щоб з'їсти половину до Нового Року, а іншу половину - після Нового року. Увесь мед знаходиться в відрі, об'ємом 6 літрів, у нього є 2 порожні банки - 5-літрова і 1-літрова. Чи може він розділити мед так, як задумав?

Задача 3. У Білосніжки є повне восьмилітрове відро компоту. Як їй відлити 4 л за допомогою порожніх трилітрової банки і пятилітрового бідона?

Задача 4. У Карлсона є відро варення, об'ємом 7 літрів. У нього є 2 порожніх відерця - 4-літрове і 3-літрове. Допоможіть Карлсону відлити 1 літр варення до чаю в меншу (3-літрове) відерце, залишивши 6 літрів у великому (7-літровому) відрі.

Задача 5. Є три бідона об'ємом 14 л, 9 л і 5 л. У більшому бідоні 14 літрів молока, решта бідони порожні. Як за допомогою цих посудин розлити молоко навпіл?

Задача 6. На другий рік Вінні Пух запасся 10 л меду. Під руками у нього два відра - 7-літрове і 4-літрове. Як йому розділити мед навпіл?

IV. Тести

1.Чи можно розлити 50 літрів бензину по трьом бакам так, щоб в першому баку було на 10 літрів більше, ніж у другому, а після переливання 26 літрів з першого бака в третій в третьому баку стало стільки ж бензину, скільки в другому?

Виберіть відповідь:

А) можливо
Б) не можливо
В) інша відповідь

2. Є два відра: одне об'ємом 4 л, інше - 9 л. Чи можна тільки з їх допомогою набрати з річки рівно 6 л води?
Виберіть відповідь:
А) можливо
Б) не можливо
В) інша відповідь

3. Чи можна, маючи дві банки об'ємом 3 л і 5 л, набрати з водопровідного крана 4 л води?
Виберіть відповідь:
А) можливо
Б) не можливо
В) інша відповідь

4. Чи можна, маючи дві банки об'ємом 6 л і 9 л, набрати з водопровідного крана 4 л води?
Виберіть відповідь:
А) можливо
Б) не можливо
В) інша відповідь

5. Чи можна набрати з річки 8 л води за допомогою двох відер, об'ємом 15 л і 16л?
Виберіть відповідь:
А) можливо
Б) не можливо
В) інша відповідь

6. У бочці міститься не менше 13 відер бензину. Чи можливо відлити з неї 8 відер води за допомогою двох бочок місткістю 9 і 5 відер?
Виберіть відповідь:
А) можливо
Б) не можливо
В) інша відповідь

V. Самооцінка учня:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Вдалося отримати результат (рішення, відповідь)?						
Правильно чи з помилкою?						
Самостійно або з чиєюсь допомогою?						

Відповіді до тестів:

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
Б)	**А)**	**А)**	**Б)**	**А)**	**А)**

Розв'язки до задач

<u>Задача 1</u>.

Розв'язок

Ходи	1	2	3	4
7 л	7	3	3	6
4 л	-	4	1	1
3 л	-	-	3	-

<u>Задача 2.</u>

Розв'язок

Ходи	1	2	3	4	5	6
6 л	6	1	1	2	2	3
5 л	-	5	4	4	3	3
1 л	-	-	1	-	1	-

Задача 3.

Розв'язок

Ходи	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8 л	8	5	5	2	2	7	7	4	4
3 л	-	3	-	3	1	1	-	3	-
5 л	-	-	3	3	5	-	1	**4**	4

Задача 4.

Розв'язок

Ведерко	7 л	4 л	3 л
До переливання	7	0	0
Після 1-го переливання	3	4	0
Після 2-го переливання	3	1	3
Після 3-го переливання	6	1	0
Після 4-го переливання	6	0	1

Задача 5.

Вказівка: Отримайте спочатку 1 літр, а потім 2 літри в 9-літровому бідоні.

Розв'язок:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5 л	0	5	0	5	1	1	0	5	0	5	2	2	0	5	0
9 л	0	0	5	5	9	0	**1**	1	6	6	9	0	**2**	2	7
14 л	14	9	9	4	4	13	13	8	8	3	3	12	12	7	7

<u>Задача 6.</u>

Розв'язок

Відро	10 л	7 л	4 л
До переливання	10	0	0
Після 1-го переливання	6	0	4
Після 2-го переливання	6	4	0
Після 3-го переливання	2	4	4
Після 4-го переливання	2	7	1
Після 5-го переливання	9	0	1
Після 6-го переливання	9	1	0
Після 7-го переливання	5	1	4
Після 8-го переливання	5	5	0

Розв'язки до тестів

1.Вказівка. Зауважте, якби таке переливання було можливо, то в другому баку повинно було бути більше ніж 26 л бензину.

Розв'язок. При такому переливанні в другому баку повинно було бути більше 26 л бензину, а в першому - ще більше, ніж у другому. Отже, навіть якщо треба було б наповнити тільки ці два бака, все одно на це не вистачило б 50 л. Значить, розділити бензин так, як потрібно в умові, неможливо.

Відповідь. Ні, не можно.

2.Розв'язок:

Відповідь. Можно.

ведро 4 л	ведро 9л
	9
4	5
0	5
4	1
0	1
1	0
1	9
4	**6**

3.Розв'язок. Можно.

банка 3 л	**банка 5 л**
	5
3	2
0	2
2	0
2	5
3	**4**

4.Розв'язок. Не можно. Так як і 6 і 9 діляться на 3, то після будь-якої кількості переливань об'єм води (у літрах) в кожній з банок буде ділитися на 3. Але 1 на 3 не ділиться.

5.Розв'язок. Можно.

відро 15 л	**відро 16 л**
15	
0	15
15	15
14	16
14	0
0	14
15	14
13	16
13	0
0	13
15	13
12	16

6.Розв'язок.

	1	2	3	4	5	6
5 в.	0	5	0	4	4	5
9 в.	9	4	4	0	9	**8**

Роздатковий матеріал до уроку

Задача 1. *Дядько Федір зібрався їхати до батьків у гості і попросив у кота Матроскіна 4 л простоквашинського молока. А у Матроскіна тільки 2* *порожніх бідони: трилітровий і п'ятилітровий. І восьмилітрове відро, наповнене молоком. Як Матроскіну відлити 4 літри молока за допомогою наявних судин?*

Задача 2. *У бочці 20 літрів вина. Сусід просить налити йому 5 літрів, а сам прийшов з відрами на 7 і 13 літрів. Немає проблем - сказав господар. Як він вчинив?*

Задача 3. *Є шестилітрова банку соку і дві порожні банки: трьох- і чотирилітрова. Як налити 1 літр соку в трилітрову банку?*

Задача 4. *Шрек вирішив зробити Фіоні подарунок на день народження - приготувати суп, про який вона мріяла вже давно. Рецепт цього супу він знайшов в кулінарній книзі, але виникла невелика проблема: потрібно налити в каструлю рівно 5 л води. Але як це зробити, якщо у Шрека 7-літрове відро і 3-літрова банка? Допоможіть своєму улюбленому герою виконати мрію Фіони.*

Задача 5. *Поруч з лабораторією протікає бурхлива річка. Як за допомогою двох бочок об'ємом 3 і 5 галонів відміряти рівно 4 галона річної води?*

Задача 6. *Одного разу Вінні-Пух захотів поласувати медом і пішов до бджіл в гості. По дорозі нарвав букет квітів, щоб подарувати трудівницям бджілкам. Бджілки дуже зраділи, побачивши ведмедика з букетом квітів, і сказали: «У нас є велика бочка з медом. Ми дамо тобі меду, якщо ти зможеш за допомогою двох судин об'ємом 3 л і 5 л налити собі 4 л! » Вінні-Пух довго думав, але все-таки зміг розв'язати задачку. Як він це зробив?*

Задача 7. *У підніжжя високої гори, на березі тихої річки стояв невеликий аул. Жили в ньому два брата-мисливця. Посилає старший брат молодшого за водою і дає йому два бурдюки, об'ємом 8 л і 5 л і просить принести рівно 7 л води. Чи зможе молодший брат виконати прохання старшого брата?*

Задача 8. *Жила-була дівчина. Два мисливця вирішили щастя своє випробувати, пішли до неї, щоб одружитися з нею. Дівчина хитра була і сказала: "Тому я в дружини дістанусь, хто зможе кумис з 12 л бурдюка перелити порівну", - і дає їм ще два бурдюки об'ємом 5 л і 8л. Чи зможуть мисливці впоратися з нелегким завданням?*

Задача 9. *Губці Бобу терміново потрібно налити з водопровідного крана 6 л води. Але він має лише дві посудини 5-літрову і 7-літрову. Як йому це зробити?*

Задача 10. *У Гаррі Потера є два пісочних годинника: на 7 хвилин і на 11 хвилин. Чарівне зілля повинно варитися 15 хвилин. Як зварити його Гаррі Потеру, перевернувши годинник мінімальну кількість разів?*

Задача 11. *Одним важливим елементом еліксиру є кров кобри. У чаші зібрано 10 ложок зміїної крові. Маємо ковші об'ємом 3 ложки і 4 ложки. Як вченому отримати 5 ложок крові?*

Розв’язуючи задачу, пам'ятайте, що потрібно зробити не більше 5 переливань, інакше дорогоцінна кров згорнеться і перестане бути придатною.

Додаткові задачі

Задача 1. *Відлийте з цистерни 13 л води, користуючись бідонами в 5 л і 17 л.*

Задача 2. *Є три каструлі: 8 л - з компотом, 3 л і 5 л - порожні. Як розділити компот навпіл? (Компот, на відміну від води, виливати не можна.)*

Задача 3.*Перша посудина має об’єм 9 л, друга−5 л, а третя − 3л. Перша посудина заповнена водою, а дві інші − порожні. Як за допомогою цих посудин відміряти 1 л води? Як відміряти 4 л?*

Задача 4. *Бідон місткістю 10 л наповнений молоком. Потрібно перелити з цього бідона 5 л у семилітровий бідон, використовуючи при цьому ще один бідон місткістю 3 л. Як це зробити?*

Задача 5. *Дванадцятилітрова каністра заповнена гасом. Як розділити гас на дві рівні частини, використовуючи дві каністри місткістю 5 і 8 літрів?*

Задача 6. *Є три бочки місткістю 6 відер, 3 відра і 7 відер. У першій і третій міститься відповідно 4 і 6 відер квасу. Потрібно, використовуючи тільки три бочки, розділити квас на три рівні частини.*

Задача 7. *Використовуючи два відра об’ємом 5 л і 3 л, наберіть із бочки 4 л води?*

Задача 8 . *Використовуючи два відра об’ємом 5 л і 4 л, наберіть з водопровідного крана*
3 л води.

Урок № 8. Тема. Задачі на зважування

Мета: формування навичок аналізу, застосування знань у нестандартній ситуації; розвиток логічного мислення, формування творчої компетентності.

Завдання:

- розглянути приклади пошуку способів розв'язування задач на зважування. Сприяти залученню дітей до творчої пошукової діяльністі.
- Розвинути навички роботи з алгоритмами, систематичність і послідовність, варіантність і діалектичність мислення.
- Допомогти учням правильно організовувати свою діяльність, оцінювати отримані результати.

Рекомендації до уроку

I. Познайомитись з історією виникнення терезів та методами розв'язку задач на зважування
II. На прикладах розібрати методи розв'язування задач №1-13
III. На вибір виконати завдання для самостійного розв'язку або виконати тести, відповіді записати в таблицю
IV. Зробити самоаналіз

Хід уроку

I. Історична довідка

Ваги з'явилися разом з металевими грошима: зважуючи їх, торговці з'ясовували, чи не фальшивими монетами розплачується покупець. Можна припустити, що продавці нерідко помилялися. По крайній мірі, на початку. Адже в якості перших ваг людині служили долоні, що оцінюють масу шляхом порівнювання з еталоном. Найдавніші зі збережених ваг відносяться до V тисячоліття до н. е., ними користувалися в Месопотамії. Ваги майстрували ковалі, за що отримували велику пошану і повагу. Адже від показань приладів залежало, візьмуть в крамниці монети для розрахунку або вважатимуть їх фальшивими.

У Стародавньому Єгипті ваги ще були і предметом релігійного культу. Єгиптяни не сумнівалися, що боги, коли їм необхідно зважити душі померлих, користуються вагами. Зображення ваг виявлено на піраміді в Гізі, відбудованої при династії Хеопса між 2930-2750 р.р. до н. е. Малюнок ілюструє сцени суду в "Книзі мертвих" (1220 р. до н. е.).

Російський народ створив свою власну систему заходів. Пам'ятники 10 сторіччя говорять не тільки про існування системи заходів в Київській Русі, а й про державний нагляд за їх правильністю. Нагляд цей був покладений на духовенство.

Викликана була ця необхідність нагляду потребами торгівлі як усередині країни, так і з країнами Заходу (Візантія, Рим, пізніше німецькі міста) і Сходу (Середня Азія, Персія, Індія).

На церковній площі відбувалися базари, в церкві стояли лари для зберігання договорів по торговельних угодах, при церквах знаходилися вірні ваги і міри, в підвалах церков зберігалися товари. Зважування проводилися в присутності представників духовенства, які отримували за це мито на користь церкви.

II. Методи розв'язування задач на зважування

Задачі на зважування **-** тип олімпіадних завдань з математики, в яких потрібно встановити той чи інший факт за допомогою зважування на важільних вагах без циферблата.

Зважувальні об'єкти:

1) Найчастіше монети.

2) Рідше є набір гирьок відомої маси.

3) Можуть бути кулі, різні предмети (одухотворені і неживі).

«Нестандартні» завдання:

1) Ваги безпосередньо показують масу.

2) Ваги важелів з циферблатом, що показує різницю ваги вантажу на чашах.

3) Фігурує безмін.

4) Фігурують неравноплечові ваги.

Стан ваг:

1) Переважила ліва чаша.

2) Переважила права чаша.

3) Чаші знаходяться в рівновазі.

Види задач на зважування:

1) Потрібно визначити мінімальне число зважувань.

2) Привести алгоритм визначення факту за дану кількість зважувань.

3) Виявити можливість встановлення факту за кількість зважувань.

Типи задач:

1) Задачі на порівняння за допомогою ваг.

2) Задачі на вагах з гирями

3) Задачі на вагах без гир

Способи оформлення розв'язку задач:

1) арифметичний

2) алгебраїчний

3) покроковий опис операцій

4) графічний

5) метод припущень

Задача 1. *Серед трьох монет одна фальшива. Як за допомогою чашкових ваг без гир знайти фальшиву монету?*

I спосіб. Опис операцій:

1) Візьмемо дві монети з трьох. Назвемо їх 1-а і 2-а.

2) Покладемо 1-у монету на ліву чашу терезів, а 2-у на праву чашу.

3) Якщо ваги зрівноважилися, то 1-а і 2-а монети однакові, значить, справжні. Таким чином, фальшива монета - 3-тя.

4) Повторимо 1-у та 2-у операції.

5) Якщо переважила права чаша ваг, значить, 2-а монета важче, але поки невідомо, яка фальшива.

6) Замість 1-ї монети покладемо на ліву чашу терезів 3-ю монету. Якщо ваги в рівновазі, то фальшива монета - 1-а (вона легше).

7) Якщо ваги не в рівновазі, треба порівняти 1-у і 3-ю монети.

II спосіб. ***Покроковий опис дій в таблиці:***

Ліва чаша	Шаги	Права чаша
Положіть одну частину монет	1. Разділити монети на дві частини	Положити другу частину монет
Перевісила	2.Оцінити стан терезів	
Групу прибрати	3.Оцінити умову задачі. Якщо фальшива монета - легче	Групу розділити на дві частини
Перевісила	4.Повторити шаг 2.	
Групу прибрати	5.Повторити шаг 3.	Группу розділити на 2 частини
	6.Продовжувати зважування, доки монета не буде знайдена	

Схема пошуку розв'язку
Блок-схема
III спосіб. ***Графічний:***
1). Пронумеруємо монети.
2). Зважимо 1 і 2 монети (по одній на різних чашах терезів).
Можливі три варіанти:
А). Б). В).
3-тя фальшива Замінимо 2-ю на 3-ю
Можливі три варіанти:
Б1). Б2). Б3).
2-я фальшива 1-я фальшива

Задача 2. *На одній чаші терезів кавун і гирі в 3 кг і в 1 кг. На іншій чаші ваг - гиря в 10 кг. Ваги знаходяться в рівновазі. Яка маса кавуна?*

Способи розв'язку задачі:

1***) арифметичний***
1) 3 + 1 = 4 (кг) - маса двох гир на чашах терезів з кавуном.

2) 10-4 = 6 (кг) - маса кавуна.
Відповідь: 6 кг.

2) ***алгебраїчний***
Нехай x (кг) - маса кавуна.
Тоді (x + 3 + 1) кг - маса лівої чаші терезів.
10 кг - маса правої чаші терезів.
Ваги знаходяться в рівновазі.
$x + 3 + 1 = 10$
$x + 4 = 10$
$x = 10-4$
$x = 6$
6 кг - маса кавуна.

3) ***метод припущень:***
1) Припустимо, що маса кавуна 1 кг. Тоді 1 + 3 + 1 = 5 (кг) - маса на лівій чаші. 5 <10, що не відповідає умові. Значить, маса арбузів не 1 кг.
2) Припустимо, що маса кавуна 2 кг. Тоді 2 + 3 + 1 = 6 (кг) - маса на лівій чаші. 6 <10, що не відповідає умові. Значить, маса арбузів не 2 кг.
3) Припустимо, що маса кавуна 3 кг. Тоді 3 + 3 + 1 = 7 (кг) - маса на лівій чаші. 7 <10, що не відповідає умові. Значить, маса кавуна не 3 кг.
4) Припустимо, що маса кавуна 4 кг. Тоді 4 + 3 + 1 = 8 (кг) - маса на лівій чаші. 8 <10, що не відповідає умові. Значить, маса кавуна не 4 кг.
5) Припустимо, що маса кавуна 5 кг. Тоді 5 + 3 + 1 = 9 (кг) - маса на лівій чаші. 9 <10, що не відповідає умові. Значить, маса кавуна не 5 кг.
6) Припустимо, що маса кавуна 6 кг. Тоді 6 + 3 + 1 = 10 (кг) - маса на лівій чаші. 10 = 10, що відповідає умові. Значить, маса кавуна 6 кг.
Відповідь: 6 кг.

1. Завдання на порівняння за допомогою ваг.

Задача 3. *На одній чашці терезів лежать 6 однакових яблук і 3 однакові груші, на іншій чашці - 3 таких же яблуці і 5 таких же груш.*
Ваги знаходяться в рівновазі. Що легше: яблуко або груша?

Розв'язок: Так як ваги знаходяться в рівновазі, а всі яблука і всі груші однакові за вагою, то: 6 яблук + 3 груші = 3 яблука + 5 груш;
Знімемо з обох чашок по 3 яблука і по 3 груші, отримаємо:
3 яблука = 2 груші, значить, 1 груша важче 1 яблука.
Відповідь: Груша важче.

Задача 4. *Груша і слива важать стільки, скільки важать 2 яблука; 4 груші важать стільки, скільки важать 5 яблук і 2 сливи. Що важче: 7 яблук або 5 груш?*

Розв'язок: За умовою задачі маємо: 1 груша + 1 слива = 2 яблука;
4 груші = 5 яблук + 2 сливи.

Додамо на обидві чаші терезів другої рівності рівні по вазі (1 груша + 1 слива) і 2 яблука: 4 груші + (1 груша + 1 слива) = 5 яблук + 2 сливи + 2 яблука;

5 груш + 1 слива = 7 яблук + 2 сливи;

Знімемо з обох чашок по 1 сливі, отримаємо:

5 груш = 7 яблук + 1 слива, значить, 5 груш важче 7 яблук.

Відповідь: 5 груш важче.

2. *Задачі на зважування на вагах з гирями*

Задача 5. *У барона Мюнхаузена є 8 зовні однакових гирькі вагою 1г, 2 г, 3 г, ..., 8 г Він пам'ятає, яка з гирьок, скільки важить, але граф Склероз йому не вірить. Чи зможе Барон зробити одне зважування на чашкових вагах, в результаті якого буде однозначно встановлено вагу хоча б однієї з гирьок?*

Розв'язок: Так як, 7г + 8 г = 1 г + 2 г + 3 г + 4 г + 5г, то залишається 6 г, значить, за одне

Відповідь: Так, зможе.

Задача 6. *Є двохчашкові ваги та гирі масою 1, 3, 9, 27 і 81 г*
На одну чашу терезів кладуть вантаж, гирі дозволяється класти на обидві чаші.
Доведіть, що ваги можна врівноважити, якщо маса вантажу дорівнює:
а) 31г; б) 52 г; в) 74 г; г) 80 г

Розв'язок: Так як гирі можна класти на обидві чашки терезів, то гирі в 1г і 3 г дають можливість зважити маси в 1г + 4г, додаючи гирю в 9 г, отримуємо можливість зважувати від 5 г до 13 г, додаючи гирю в 27 г отримуємо можливість зважувати від 13 г до 31 г, додаючи гирю в 81 г отримуємо можливість зважувати від 31 г до 121 г, отже, маємо:

а) 31 г = 1г + 3 г + 27 г;
б) 52г + 3 г + 27 г = 81 г + 1г;
в) 74 г +1 г + 9 г = 81 г + 3г;
г) 80 г + 1 г = 81 г.

3. *Задачі на зважування на терезах без гир.*

Задача 7. *З трьох однакових за видом кілець одне легше інших. Як знайти його одним зважуванням на шашкових вагах без гир?*

Розв'язок: Кладемо два кільця на ваги. Якщо ваги в рівновазі, то кільце, яке залишилося більш легке; якщо ж одне кільце переважить, то воно легше інших.

Задача 8. *З 75 однакових за видом кілець одне кільце за вагою відрізняється від інших. Як за два зважування на чашкових вагах без гир визначити, легше воно або важче інших?*
Розв'язок: Розіб'ємо всі кільця на три групи по 25 кілець. покладемо на ваги по 25 кілець. Якщо ваги в рівновазі, то кільце, яке відрізняється знаходиться в третій групі, тоді кільця з однієї чашки прибираємо і кладемо на неї кільця з третьої групи, якщо чашка з третьою групою кілець виявиться важче, то шукане кільце - важче, а якщо навпаки, то - легше .
Якщо ж одна чашка переважить відразу ж, то легші кільця прибираємо і кладемо на цю чашку кільця третьої групи, якщо ваги виявляться в рівновазі, то шукане кільце - легше, а якщо ні, то - важче.

Задача 9. *Дано 6 гир: дві зелені, дві червоних, дві синіх. У кожній парі одна гиря важка, а інша легка, причому всі важкі гирі важать однаково і всі легкі теж. Чи можна на чашкових вагах знайти всі важкі гирі?*
Розв'язок: Покладемо на одну чашку терезів дві червону і синю гирі, а на другу - червону і зелену. Якщо одна з чаш переважила, то червона гиря, яка на ній лежить - важка. Тоді покладемо обидві червоних гирі на одну чашку терезів, а на другу - зелену і синю гирі, які ми вже зважували. Якщо переважили червоні, то й синя і зелена - легкі, якщо
переважили синя і зелена, то вони важкі. Якщо ваги залишилися в рівновазі, то не червону гирю, яка при першому зважуванні лежала на чашці, яка переважила, важка, а та, яка лежала на іншій чашці - легка.
Якщо ж ваги при першому зважуванні виявилися в рівновазі, то досить зважити червоні гирі між собою. Та гиря, яка лежала на одній чашці з важкої червоною - легка, а та, яка лежала на одній чаші з легкою червоною - важка.

Задача10. *Із 27 монет одна фальшива - вона легше інших. За яке найменше число зважувань на чашкових вагах без гир можна визначити фальшиву монету?*
Розв'язок: Розіб'ємо всі монети на три купки по 9 монет. Кладемо на кожну чашку ваг по 9 монет. Тут можливі такі випадки:
1) Якщо ваги виявляться в рівновазі, то фальшива монета в третій купці.
Розіб'ємо третю купку на три рівні частини по 3 монети і будемо зважувати по 3 монети. Якщо ваги - в рівновазі, то фальшива монета у відкладеній купці, якщо ж одна чашка терезів переважила, то фальшива монета на легшій чашці. І в тому і в іншому випадку беремо ту купку, яка виявилася легше і розкладемо її на три частини по 1 монеті. Зваживши по одній монеті, визначимо фальшиву: вона виявиться або більш легкою на чашці терезів, якщо ваги не в рівновазі, або залишилася, якщо ваги виявляться в рівновазі.
2) Якщо ваги виявляться не в рівновазі, то фальшива монета виявиться на чашці терезів, яка легше. Далі чинимо так само, як і в першому випадку, але тільки з тими монетами, які лежать на легшій чашці.
І в першому, і в другому випадку достатньо трьох зважувань.

Відповідь: За 3 зважування.

Задача 11. *Серед 101 однакових за видом монет одна фальшива, відрізняється за вагою. Як за допомогою чашкових ваг без гир за два зважування визначити, легше вона решти або важче? Знаходити фальшиву монету не потрібно.*
Розв'язок: Зважуємо по 50 монет. Можливі наступні випадки:
1) Рівенство: Беремо залишену монету і кладемо її в ліву купку замість однієї з наявних там. Тоді, якщо ліва купка важче, то фальшива монета важче; а якщо ліва купка легше, то фальшива монета легше.
2) Нерівенство: Беремо важчу купку і розбиваємо її на дві купки по 25 монет. Тоді, якщо ваги в рівновазі, то фальшива монета легше, якщо ж вага купок неоднакова, то фальшива монета важче.

Задача 12. *Власник монетного заводу мав 10 робітників. Кожному вранці він видавав 500 г золота для виготовлення 50 золотих монет по 10 г. Спостерігаючи кілька днів, він встановив, що хтось із робітників виготовляє монети по 9 г, а заощаджене золото привласнює. Подумавши, він знайшов спосіб, щоб за допомогою одного тільки зважування знайти недбайливого працівника. Як він це зробив?*
Розв'язок: Візьмемо у першого робочого 1 монету, у другого робітника - 2 монети, у третього-3 монети і так далі, у десятого робочого 10 монет. Зважимо всі взяті монети. Тоді можливі наступні випадки:
1) фальшиві монети виготовляє перший робочий, тоді вага взятих монет буде:
$1\cdot 9 + 2\cdot 10 + 3\cdot 10 + \cdots + 10\cdot 10 = 549$ (г);
2) фальшиві монети виготовляє другий робочий, тоді вага взятих монет буде:
$1\cdot 10 + 2\cdot 9 + 3\cdot 10 + 4\cdot 10 + \cdots + 9\cdot 10 + 10\cdot 10 = 548$ (г)
3) фальшиві монети виготовляє третій робочий, тоді вага взятих монет буде:
$1\cdot 10 + 2\cdot 10 + 3\cdot 9 + 4\cdot 10 + \cdots + 9\cdot 10 + 10\cdot 10 = 547$ (г)
Розмірковуючи далі, нарешті, отримаємо:
10) фальшиві монети виготовляє десятий робочий, тоді вага взятих монет буде:
$1\cdot 10 + 2\cdot 10 + 3\cdot 10 + 4\cdot 10 + \cdots + 9\cdot 10 + 10\cdot 9 = 540$ (г)
Зауважимо, що вага взятих монет в першому, другому, третьому ... десятому випадку відрізняється від ваги справжніх монет на 1г, на 2г, на 3г, ..., на 10 г
Вага справжніх монет повинен бути: 10 г · 55 монет = 550 г. Це означає, що зваживши 55 монет і отримавши результат 549 г, 548 г, 547 г і т. д.
Ми будемо знати, скільки грамів не вистачає до 550 г - це число вкаже нам номер недбайливого робітника.

Задача 13. *Султан мав 10 візирів, які платили йому щороку по одному мішку грошей. Помітив він, що один з візирів хитрує і дає мішок, в якому кожна монета легше на один грам. Як за допомогою одного зважування отриманих грошей дізнатися, хто поступає нечесно?*
Розв'язок: Завдання розв'язується аналогічно завданню № 12. Беремо з кожного мішка монети: З першого 1 монету, з другого - 2 монети і т.д. з

десятого -10 монет і зважуємо. Вага справжніх монет повинен бути: 1г · 55 монет = 55 г .
Дізнавшись, скільки грамів не вистачає до 55г, ми знайдемо, з якого мішка були взяті монети.

III. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. З 9 монет одна фальшива - легша, ніж справжні. Двома зважуваннями на чашкових вагах без гир, треба знайти її.

Задача 2. а) Є 27 монет. Відомо, що одна з них фальшива (за вагою важче справжніх). Як за три зважування на чашкових вагах без гир визначити фальшиву монету? б) Чи можна визначити фальшиву монету за три зважування, якщо монет 25?

Задача 3. Маємо неправильні чашкові ваги, мішок крупи і правильна гиря в 1 кг. Як відважити на цих терезах 1 кг крупи?

Задача 4. Маємо чашкові ваги зі стрілками і десять мішків з монетами. Всі монети у всіх мішках однакові за зовнішнім виглядом, але в одному з мішків всі монети фальшиві і кожна важить по 2 грами, а в інших дев'яти мішках всі монети справжні і кожна важить по 1 граму. Як за допомогою одного зважування визначити, в якому мішку фальшиві монети?

Задача 5. Відомо, що серед ста монет є рівно одна фальшива (відрізняється за вагою від справжніх). За допомогою двох зважувань на чашкових вагах без гир визначте, легше чи важче фальшива монета справжньої (знаходити її не треба!).

Задача 6. В кошику лежать 13 яблук. Є ваги, за допомогою яких можна дізнатися сумарну вагу будь-яких двох яблук. Придумайте спосіб з'ясувати за 8 зважувань сумарну вагу всіх яблук.

IV. Тести

1. 4 чашки і 1 глечик важать стільки, скільки важать 17 свинцевих
кульок. 1 глечик важить стільки ж, скільки 7 свинцевих
кульок і 1 чашка. Скільки кульок врівноважує глечик?
Виберіть відповідь:

А) 17	В) 9
Б) 6	Г) 10

2. Золотошукач Джек добув 9 кг піску. Чи зможе він за три зважування відміряти 2 кг піску за допомогою двохчашкових ваг з двома гирями - 200 г і 50 г?

Виберіть відповідь:

А) зможе

Б) не зможе

В) інша відповідь

3. Маємо чашкові ваги без гир і 4 однакові по зовнішньому вигляду монети. Одна з монет фальшива, причому невідомо, легше вона справжніх монет або важче (справжні монети однієї ваги). Скільки треба зважувань, щоб визначити фальшиву монету?

Виберіть відповідь:

А) 4

Б) 6

В) 2

Г) 3

4. Які ваги можуть мати чотири гирі для того, щоб з їх допомогою можна було зважити будь-яке ціле число кілограмів від 1 до 15 на чашкових вагах (гирі можна ставити тільки на одну чашку)?

Виберіть відповідь:

А) 1,2,3,4

Б) 1,5,10,15

В) 1,3,6,9

Г) 1,2,4,8

5. Які ваги можуть мати три гирі для того, щоб з їх допомогою можна було зважити будь-яке ціле число кілограмів від 1 до 10 на чашкових вагах (гирі можна ставити на обидві чашки)? Наведіть приклад.

Виберіть відповідь:

А) 1,2,3

Б) 1,5,10

В) 3,4,9

Г) 1,3,6

6. На одній чашці терезів лежить шматок мила, а на іншій три чверті такого шматка і ще три чверті кілограма. Ваги знаходяться в рівновазі. Скільки важить шматок мила?

Виберіть відповідь:

А) 1

Б) 3

В) 2

Г) 4

V. Самооцінка учня:

№ завдання	1	2	3	4	5	6

Вдалося отримати результат (рішення, відповідь)?						
Правильно чи з помилкою?						
Самостійно або з чиєюсь допомогою?						

Відповіді до тестів:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
В)	**А)**	**В)**	**Г)**	**В)**	**Б)**

Розв'язки до задач

Задача 1.

Розв'язок: кладемо на чаші по три монети. У разі рівноваги - фальшива монета серед решти трьох. Якщо ж рівноваги немає, то фальшива монета - серед монет легшої чаші. Тепер з відібраних монет візьмемо дві і покладемо їх на різні чашки терезів. Якщо чаші зрівноважилися, то монета, яка залишилась - фальшива, якщо ні - фальшива легша.

Задача 2.

Вказівка. Спробуйте спочатку за одне зважування на чашкових вагах без гир визначити з трьох монет одну фальшиву, якщо відомо, що вона важча справжніх.

Розв'язок: а) Розділимо монети на 3 купки по 9 монет. Покладемо на чашки терезів першу і другу купки; по результату цього зважування ми точно дізнаємося, в якій із купок знаходиться фальшивка (якщо ваги покажуть рівність, то вона - в третій купці). Тепер, аналогічно, розділимо обрану купку на три частини по три монети, покладемо на ваги дві з цих частин і визначимо, в якій з частин знаходиться фальшива монета. Нарешті, залишається з трьох монет визначити більш важку; кладемо на чашки терезів по 1 монеті - фальшивою є більш важка; якщо ж на вагах рівність, то фальшивою є третя монета з частини.

б) Поступаємо абсолютно аналогічно, тільки на самому початку розбиваємо монети на 2 купки по 9 монет і одну з 7 монет, а в разі потреби купку з 7 монет розіб'ємо на 2 купки по 3 монети і одну "купку" з однієї монети.

<u>Задача 3.</u>

Вказівка. Спробуйте поставити на одну чашку терезів гирю в 1 кг і врівноважити терези.

Розв'язок: Можна вчинити, наприклад, так: поставимо на одну чашу терезів гирю вагою 1 кг і врівноважимо терези крупою з мішка. Тепер знімемо з ваг цю гирю і замість неї насипемо крупу. Коли цієї крупи стане рівно 1 кг, ваги виявляться в рівновазі.

<u>Задача 4.</u>

Розв'язок: Візьмемо з першого мішка 1 монету, з другого - 2, з третього - 3, ..., з останнього - 10 монет. Всього 1 + 2 + 3 + ... + 10 = 45 монет. Зважимо їх. Якби всі вони були справжні, вони важили б 45 грамів, але в нашому випадку вони будуть важити більше. Якщо фальшива монета одна, то буде перевага 1 грам, якщо дві - 2 грами, ... якщо десять фальшивих монет - буде перевага 10 грам. Таким чином, знаючи перевагу, ми відразу визначимо кількість фальшивих монет. А воно, в свою чергу, покаже нам номер мішка, в якому вони лежать.

<u>Задача 5.</u>

Розв'язок: Покладемо спочатку на кожну чашу по 50 монет. Потім візьмемо більш важку частину, розіб'ємо її на купки по 25 монет і зважимо їх. Якщо їх маси рівні, то фальшива монета легше інших, інакше - важче інших.

<u>Задача 6.</u>

Вказівка. Спробуйте за три зважування знайти сумарну вагу трьох яблук.

Розв'язок: Занумеруемо яблука. Зважимо перше яблуко з другим, друге з третім і третє з першим, потім складемо отриману вагу (де-небудь в зошиті) і отримаємо подвоєну вагу трьох яблук, а потім і вагу трьох яблук, отже, за три зважування ми дізналися сумарну вагу перших трьох яблук. Залишилося п'ять зважувань і десять яблук, які зважуємо попарно і, підсумовуючи всі дані, отримаємо вагу 13 яблук.

Розв'язки до тестів

1. ***Розв'язок***. За умовою задачі маємо:
4 чашки + 1 глечик = 17 кульок;
1 глечик = 7 кульок + 1 чашка.

На перші ваги замість 1 глечика ставимо 7 кульок + 1чашку, отримаємо: 4 чашки + (7 кульок + 1 чашка) = 17 кульок; 5 чашок + 7 кульок = 17 кульок.
Знімемо з кожної чашки по 7 кульок, отримаємо: 5 чашок = 10 кульок, розмірковуючи далі, отримаємо, що 1 чашка врівноважує 2 кульки, а значить, 4 чашки врівноважують 8 кульок.
А так як 4 чашки + 1 глечик = 17 кульок, то 8 кульок + 1 глечик = 17 кульок. Знімемо по 8 кульок, отримаємо, що 1 глечик = 9 кульок. ***Відповідь:*** 9 кульок.

2. ***Розв'язок***. Першим зважуванням ділимо пісок на дві купки по 4500 г, другим - одну з цих купок на дві купки по 2250 г, і, нарешті, від однієї з цих купок за допомогою гир відсипаємо 250 г. ***Відповідь*****:** зможе.

3. ***Вказівка.*** Зверніть увагу: потрібно визначити фальшиву монету, при цьому зовсім не потрібно вказувати, легше вона, ніж справжні, або важче.
Розв'язок. Якщо у нас 3 монети, досить двох зважувань. Кладемо на кожну чашку ваг по одній монеті. Якщо ваги не в рівновазі, значить, та монета, яка залишилася, - справжня. Кладемо її на ваги з будь-якою з інших і відразу визначаємо, яка з них фальшива. Якщо ж ваги в рівновазі, значить, фальшива монета та, яка залишилася, і другим зважуванням можна навіть визначити, легше вона чи важче, ніж справжні. Якщо у нас 4 монети, знову досить двох зважувань. Розділимо наші монети на дві купки по 2 монети і покладемо одну з купок на ваги - по монеті на кожну чашку. Якщо ваги в рівновазі, то обидві монети на них справжні. Якщо ваги не в рівновазі, то обидві монети на столі справжні. Отже, тепер ми знаємо, в якій купці лежить фальшива монета. Покладемо на одну чашку терезів монету з купки, де обидві справжні, на другу - монету з купки, де фальшива. Якщо при цьому ваги будуть в рівновазі, значить, фальшива монета залишилася на столі, а якщо не в рівновазі, значить, ми поклали її на ваги (в цьому випадку ми навіть дізнаємося, легше вона чи важче).

4. ***Розв'язок***. Досить гирьок вагою в 1, 2, 4 і 8 кілограмів. У цьому неважко переконатися, підібравши відповідні приклади.

5. ***Розв'язок***. Нам потрібні будуть гирьки вагою в 3, 4 і 9 кілограмів. Те, що цей набір дійсно дозволяє зважити будь-яке ціле число кілограмів від 1 до 10, показують наступні рівності: 1 = 4-3, 2 = 9-3-4, 3 = 3, 4 = 4, 5 = 9-4, 6 = 9-3, 7 = 3 + 4, 8 = 3-4 + 9, 9 = 9, 10 = 4 + 9-3.

6. ***Розв'язок***. Розділимо шматок мила на 4 рівні частини, тоді 4 рівні частини шматка мила = 3 таким же частинам мила + кг; Знімемо з кожної чашки по 3 частини, отримаємо: 1 частина = кг, значить, цілий шматок важить 3 кг.
Відповідь: 3 кг.

Роздатковий матеріал до уроку

Задача 1. *Серед трьох монет одна фальшива. Як за допомогою чашкових ваг без гир знайти фальшиву монету?*

Задача 2. *На одній чаші терезів кавун і гирі в 3 кг і в 1 кг. На іншій чаші ваг - гиря в 10 кг. Ваги знаходяться в рівновазі. Яка маса кавуна?*

Задача 3. *На одній чащі терезів лежать 6 однакових яблук і 3 однакові груші, на іншій чащі - 3 таких же яблуці і 5 таких же груш.*
Ваги знаходяться в рівновазі. Що легше: яблуко або груша?

Задача 4. *Груша і слива важать стільки, скільки важать 2 яблука; 4 груші важать стільки, скільки важать 5 яблук і 2 сливи. Що важче: 7 яблук або 5 груш?*

Задача 5. *У барона Мюнхаузена є 8 зовні однакових гирькі вагою 1г, 2 г, 3 г, ..., 8 г Він пам'ятає, яка з гирьок, скільки важить, але граф Склероз йому не вірить. Чи зможе Барон зробити одне зважування на чашкових вагах, в результаті якого буде однозначно встановлено вагу хоча б однієї з гирьок?*

Задача 6. *Є двохчашкові ваги та гирі масою 1, 3, 9, 27 і 81 г*
На одну чашу терезів кладуть вантаж, гирі дозволяється класти на обидві чаші.
Доведіть, що ваги можна врівноважити, якщо маса вантажу дорівнює:
а) 31г; б) 52 г; в) 74 г; г) 80 г

Задача 7. *З трьох однакових за видом кілець одне легше інших. Як знайти його одним зважуванням на шашкових вагах без гир?*

Задача 8. *З 75 однакових за видом кілець одне кільце за вагою відрізняється від інших. Як за два зважування на чашкових вагах без гир визначити, легше воно або важче інших?*

Задача 9. *Дано 6 гир: дві зелені, дві червоних, дві синіх. У кожній парі одна гиря важка, а інша легка, причому всі важкі гирі важать однаково і всі легкі теж. Чи можна на чашкових вагах знайти всі важкі гирі?*

Задача10. *Із 27 монет одна фальшива - вона легше інших. За яке найменше число зважувань на чашкових вагах без гир можна визначити фальшиву монету?*

Задача 11. *Серед 101 однакових за видом монет одна фальшива, відрізняється за вагою. Як за допомогою чашкових ваг без гир за два зважування визначити, легше вона решти або важче? Знаходити фальшиву монету не потрібно.*

Задача 12. *Власник монетного заводу мав 10 робітників. Кожному вранці він видавав 500 г золота для виготовлення 50 золотих монет по 10 г. Спостерігаючи кілька днів, він встановив, що хтось із робітників виготовляє монети по 9 г, а заощаджене золото привласнює. Подумавши, він знайшов спосіб, щоб за допомогою одного тільки зважування знайти недбайливого працівника. Як він це зробив?*

Задача 13. *Султан мав 10 візирів, які платили йому щороку по одному мішку грошей. Помітив він, що один з візирів хитрує і дає мішок, в якому кожна монета легше на один грам. Як за допомогою одного зважування отриманих грошей дізнатися, хто поступає нечесно?*

Урок № 9. Тема. Графи

Мета уроку:

- *дидактична:* ввести поняття «граф»; розглянути приклади використання графів в різних областях знань; відпрацювати вміння розв'язувати текстові задачі на застосування теорії графів
- *розвиваюча:* розвиток уваги, пам'яті, логічного мислення, аргументованої математичної мови;
- *виховна:* виховувати почуття впевненості, послідовності, дисциплінованості, вміння слухати.

Рекомендації до уроку

I. Познайомитись з основними поняттями по темі «Графи»
II. На прикладах розібрати методи розв’язування задач №1-12, за необхідністю розібрати додаткові задачі № 1-9
III. На вибір виконати завдання для самостійного розв’язання або виконати тести, відповіді записати в таблицю
IV. Зробити самоаналіз

Хід уроку

I. Графи

Вперше основи теорії графів з'явилися в роботі Л. Ейлера в 1736 р, де він описував рішення головоломок і математичних розважальних завдань, хоча термін «граф» вперше ввів в 1936 році угорський математик Денеш Кеніг. На початку 20 століття поряд з терміном «граф» вживалися інші терміни, наприклад карта, комплекс, діаграма, мережа, лабіринт. Широкий розвиток теорія графів одержала з 50-х рр. XX століття в зв'язку зі становленням кібернетики і розвитком обчислювальної техніки.

Графом називають кінцеву множину точок, які з'єднані відрізками прямих. Точки називаються ***вершинами*** графа, а відрізки - ***ребрами*** графа.

Перш за все варто сказати про те, що графи, про які піде мова, до аристократів минулих часів ніякого відношення не мають. "*Графи*" мають коренем грецьке слово "*графо*", що означає "пишу".

Особливо потрібно звернути увагу в означенні на те, що можуть з'єднуватися не всі точки одна з одною і з'єднуються не обов'язково відрізками, а довільними лініями-дугами.

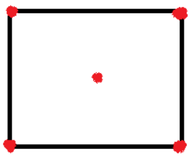
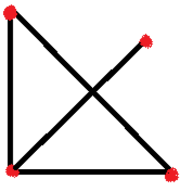
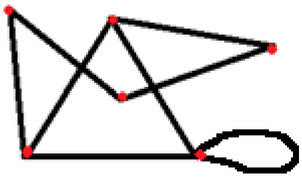
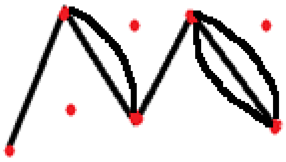
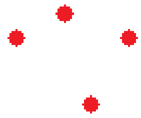






рис.1 рис.2 рис.3 рис.4 рис.5

Чіткого, суворого позначення вершин не існує, позначають з контексту завдання: або буквами (українськими, латинськими) або цифрами. Причому потрібно особливо підкреслити, що бувають графи, що складаються тільки з одних вершин (рис.5), що дві вершини можуть бути з'єднані декількома ребрами одночасно (рис.4) і що ребро може «виходити і заходити» в одну і ту ж вершину (рис.3) - таке ребро називають ***петлею.***

Графи використовуються не тільки в математиці, приклади «нематематичних графів»:

- схема метро;
- генеалогічне дерево;
- кристалічна решітка;
- електрична схема і інші.

Графи бувають ***кінцеві*** (число його ребер скінченне) і ***нескінченні*** (число його ребер нескінченно). Наприклад, коли кожній вершині графа відповідає натуральне число, тобто вершини графа нумеруються числами 1, 2, 3 ... Але так як ряд натуральних чисел нескінченний, то і граф теж нескінченний. Звичайно, повністю зобразити нескінченний граф не можна, але можна зобразити його частково.

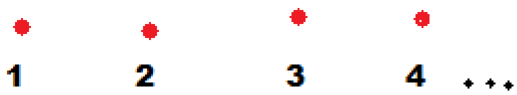


рис.6

Степінь вершини - число ребер, які виходять з вершини графа. Якщо ребро є петлею, то його рахують двічі (див. рис.1-5).

Іноді степінь вершини записують у вигляді таблиці, а іноді пишуть поруч із самою вершиною. Важливо підкреслити, що одне і теж ребро рахується двічі (один раз - для однієї вершини, другий - для іншої), так як воно з'єднує дві вершини.

Вершини бувають ***парні*** (степінь вершини парна) і ***непарні*** (степінь вершини непарна).

Завдання 1: За рисунком визначити: скільки вершин, ребер у графа і який степінь кожної вершини графа?

рис.7

Розв'язок: Спочатку порахуємо кількість вершин. Для наочності на перших порах їх можна виділити іншим кольором - 8 вершин (рис.8). Для підрахунку ребер зручно пораховані ребра виділяти рискою, щоб не порахувати його двічі - 9 ребер (рис.9)

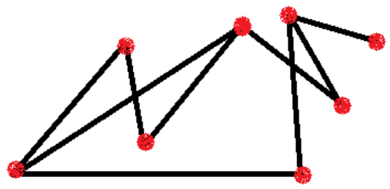


рис.8

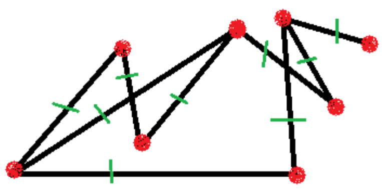


рис.9

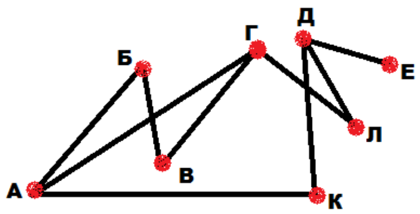


рис.10

Для визначення степеню вершини графа краще всі вершини позначити буквами (рис.10), а потім результати записати в таблицю.

А	Б	В	Г	Д	Е	К	Л
3	2	2	3	3	1	2	2

Властивість 1. *Число непарних вершин графа - парне.*

Завдання 2: Побудувати граф у якого вершини мають такі степені:

а) А - 7, Б - 3, С - 1; б) А - 5, Б - 1, С - 4.

Розв'язок: При розв'язанні задач на побудову графів, спочатку необхідно перевірити, чи можлива взагалі побудова заданого графа. Для цього треба застосувати першу властивість. Скільки б ми не намагалися побудувати граф а), у нас нічого не вийде. Побудова графа а) не можлива, так як всі його вершини непарні, і число їх непарне. А ось граф б) побудувати можна, так як у нього дві непарних вершини. Причому можуть виходити різні по конфігурації графи (рис.11-13). Саме на таких завданнях і закріплюється, що число непарних вершин графа - парне.

Навчальна сторона цих завдань полягає в дослідженні, можливо чи ні рішення даного завдання, перш ніж братися за саме рішення.

Зверніть увагу, що побудова графа слід починати з зображення всіх його вершин, і лише потім з'єднувати їх ребрами. Причому найкраще починати з'єднувати ребрами вершини з найменшим і найбільшим степенем.

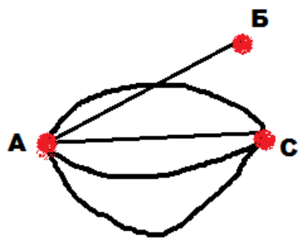


рис.11

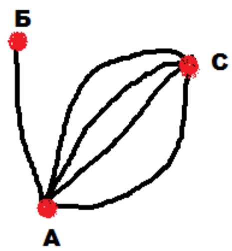


рис.12

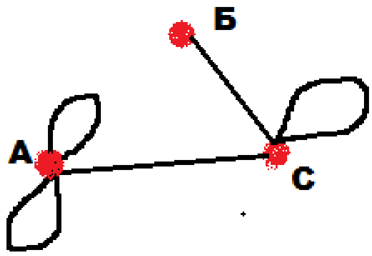


рис.13

Завдання типу: «без побудови графа, визначити число ребер графа».

Властивість 2: *Для того щоб знайти кількість ребер в графі, треба скласти степені вершин і результат розділити навпіл.*

Завдання 3: Дани степені вершин графа: А - 2, Б - 5, С - 1, Д - 4. Без побудови графа, визначити число ребер графа.

Розв'язок: Перше, що треба перевірити: чи можлива побудова такого графа. Щоб перевірити це, треба порахувати число непарних вершин - їх повинно бути парне. За умовою завдання, 2 непарних вершини Б і С, значить побудова можлива. Тепер можна відповісти на питання завдання, використовуючи другу властивість: (2 + 5 + 1 + 4): 2 = 6.

Після рішення задачі можна побудувати цей граф і перевірити рішення. Причому малюнки можуть вийти зовсім різні, в залежності від того, які вершини будуть з'єднані (рис.14-16). Найголовніше, щоб степені вершин відповідали умові завдання.

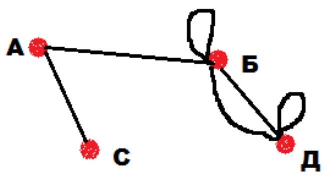


рис.14

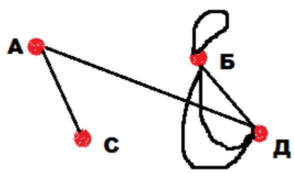


рис.15

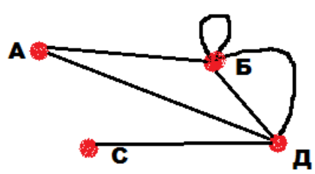


рис.16

Зв'язний граф - граф, у якого будь-які дві його вершини можна з'єднати безперервною послідовністю ребер. Іншими словами: з будь-якої вершини можна пройти в іншу вершину по ребрах (рис.17-18).

Незв'язний граф - граф, який складається з декількох частин, кожна з яких або зв'язний граф, або окремі вершини (рис.19)

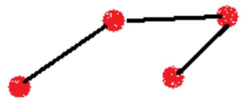


рис.17

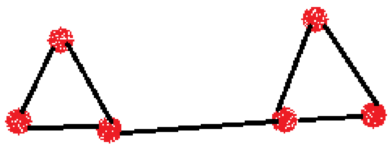


рис.18

рис.19

Цикл - замкнутий шлях в графі. Графи бувають з циклом (рис.20 цикл виділено блакитним кольором) і без циклу (рис.21).

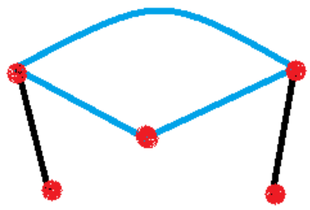


рис.20

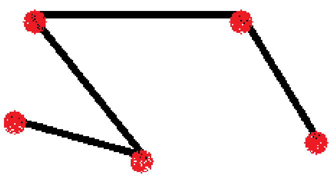


рис.21

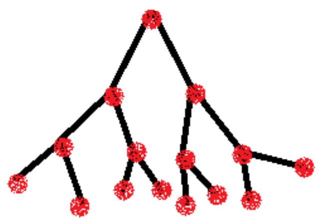


рис.22

Дерево - зв'язний граф, який не має циклів (рис.22).

Властивість 3: *Якщо граф зв'язний і непарних вершин у нього 0 або 2, то його можна обійти, пройшовши по кожному ребру тільки один раз.* По-іншому можна переформулювати цю властивість так: *Якщо граф зв'язний і непарних вершин у нього 0 або 2, то його можна накреслити, не відриваючи олівець від паперу і не проходячи по будь-якому ребру двічі.*

Якщо можна накреслити граф, не відриваючи олівець від паперу і не проходячи по будь-якому ребру двічі, то такий граф називають ***унікурсальним*** або ***Ейлеровим графом.***

Швидкий і правильний спосіб ***зображення графів***: якщо граф має дві непарних вершини, то його зображення треба починати з однієї непарної вершини, а закінчувати - в іншій. Якщо ж все вершини графа парні, то початок і кінець графа збігаються.

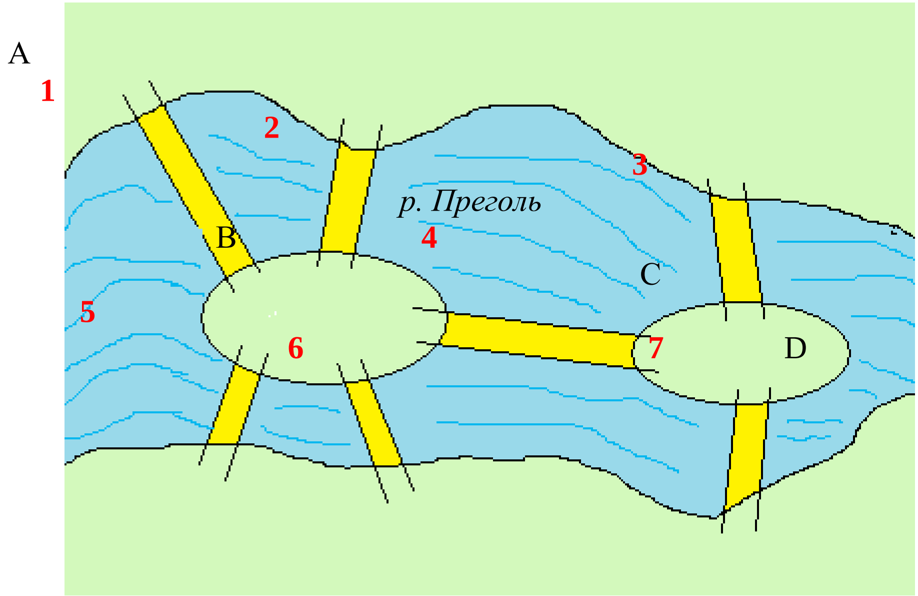
Правило Ейлера.
Обхід можливий: якщо всі вершини - парні, його можна почати з будь-якої ділянки; якщо 2 вершини - непарні, то його потрібно почати з однієї з непарних вершин.
Обхід неможливий: якщо непарних вершин більше 2.

Для розв'язку задач, із застосуванням теорії графів, можна виділити наступні етапи:
1. Аналіз умови задачі і переведення її на мову графів;

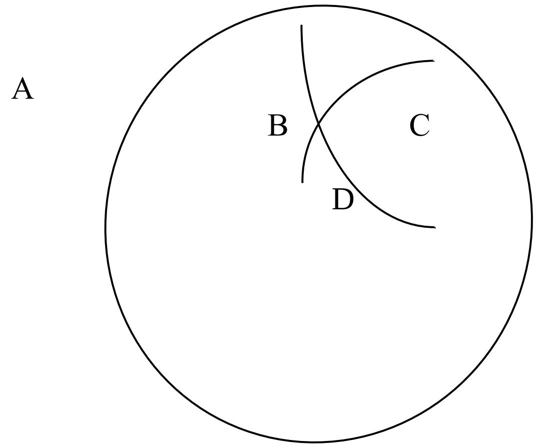
2. Геометрична інтерпретація умови, побудова графа. Саме на цьому етапі дуже важливий елемент творчості тому, що далеко не просто знайти відповідності між елементами умови і відповідними елементами графа;
3. Точками позначають об'єкти завдання (вершини графа). Якщо в задачах дано кілька груп об'єктів, то краще їх зображати в різних площинах і різними кольорами;
4. Лініями (відрізками, дугами) позначають відносини між об'єктами (ребра графа). Відносини можуть бути двох типів: належить і не належить. Якщо відношення «належить», то лінії суцільні, якщо відношення «не належить» - пунктирні;
5. Виділяємо ключові фрази завдань і, аналізуючи їх, проводимо ребра;
6. Якщо ключових фраз мало для вирішення завдання, то аналізуємо граф і проводимо відсутні ребра;
7. Вибираємо потрібні відносини (суцільні лінії) і записуємо відповідь.

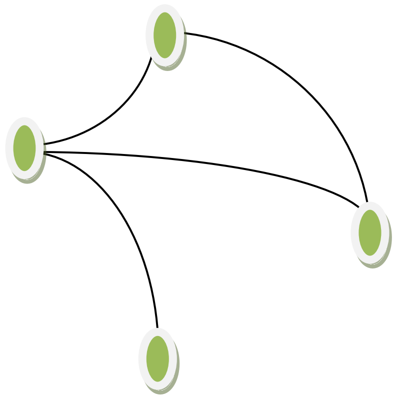
II. Задачі

Задача 1. **«Про кенігсберзькі мости».** *Раніше місто Кенігсберг було розташоване на берегах і двох островах річки Преголю. Різні частини міста були з'єднані сім'ю мостами. Здійснюючи прогулянки в недільні дні, городяни почали сперечатися: чи можна вибрати маршрут так, щоб пройти один і тільки один раз по кожному мосту і потім повернутися в початкову точку шляху?*



Розв'язок. План міста для розв'язку цього завдання можна зобразити графом, який буде мати чотири вузли графа - це берега A і D, острова B і C; 7 ребер - мости 1 - 7. Якби існував шуканий маршрут, то цей граф можна було б викреслити одним розчерком. Чого зробити не можна, так як кількість непарних вузлів більше двох.





Задача 2. *5 друзів при зустрічі обмінялися рукостисканнями (кожен потиснув руку кожному по одному разу). Обміняйтесь, будь ласка, рукостисканнями. Скільки всього рукостискань було зроблено?*

Розв'язок. Задача легко розв’язується за допомогою теорії графів.

Зобразіть у зошиті 5 точок: А, Б, В, Г, Д.

Скільки всього рукостискань було зроблено?

До розв’язку можна прийти чисто логічно. Але графи надали наочність, спростили рішення.

Якщо підвести підсумок, то можна стверджувати: якщо повний граф має *n* вершин, то кількість ребер дорівнюватиме. $\frac{n(n-1)}{2}$.

Задача-загадка 3. *Перед вами граф- "роздрукований лист". Спробуйте накреслити цей граф не відриваючи олівця від паперу і не проводячи по одній лінії двічі.*

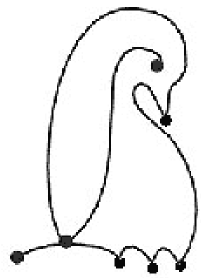
Розв'язок. У вершині А сходиться 3 ребра, в вершині В-4, в вершині С-2, в вершині Д-4.

- Що ви скажете про парності вершин у цьому графі? (Три вершини- парні, дві- непарні.)

- Як потрібно зробити обхід цього графа, згідно з правилом Ейлера? (Почати обхід в одній із непарних вершин А чи Е, а завершити в іншій.)

Задача 4. *Креслення фігур одним розчерком*

Отже, ми побачили, що на мові теорії графів кожна розв’язана задача виглядає як завдання на зображення "одним розчерком" графа, представленого на малюнку.
Тепер нам неважко буде розібратися і показати, яку з будь-яких даних фігур можна накреслити одним розчерком, без повторення ліній, а яку ні. Кожну із задач подібного роду можна звести до розібраної вже нами ейлерової задачі про мости.
Наприклад, на малюнку зображений птах.



Взявши за вершини графа точки перетину лінії, отримаємо 7 вершин, тільки дві з яких мають непарну степінь.

Тому в цьому графі існує Ейлера шлях, а значить, птицю можна намалювати одним розчерком.

Непарні вершини: дві.

Задача 5. *Десять чоловік вітали один одного рукостисканнями. П'ятеро людей зробили по сім рукостискань, троє - по п'ять, двоє - по чотири. Скільки всього було зроблено рукостискань?*
Розв'язок. Спочатку треба розібратися, чи правильно розуміється поняття рукостискання на мові графів. Одне рукостискання - це дві вершини з'єднані одним ребром. Тобто, дві людини і у них одне рукостискання на двох. Дану задачу можна переформулювати на мову графів наступним чином: дано 10 вершин, відомі степеня кожної вершини і потрібно дізнатися, скільки ребер у цьому графі. Щоб дізнатися кількість ребер в графі треба скласти степеня кожної вершини і розділити навпіл - застосувати другу властивість. Так як п'ять осіб зробили по сім рукостискань, то це означає, що з п'яти вершин виходить сім ребер, а всього ребер: 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 5 * 7. Аналогічно міркуємо і з іншими вершинами, отримуємо: (5 * 7 + 3 * 5 + 2 * 4) / 2 = (35 + 15 + 8) / 2 = 58/2 = 29

Задача 6. *Чи можливо організувати футбольний турнір дев'яти команд так, щоб кожна команда провела по чотири зустрічі?*

Розв'язок. Переформулюємо задачу на мову графів: чи можна побудувати такий граф, у якого 9 вершин і степінь кожної вершини дорівнює 4. По 2 властивості, знайдемо число ребер і якщо воно буде цілим числом, то такий турнір можна організувати, в іншому випадку - не можна . (9 * 4) / 2 = 18. Так, можна і буде зіграно 18 ігор.

Задача 7. *Чи можливо 15 телефонів з'єднати між собою так, щоб кожен з них був пов'язаний рівно з 11 іншими?*
Розв'язок. Переформулюємо задачу на мову графів: чи можна побудувати такий граф, у якого 15 вершин і степінь кожної вершини дорівнює 11. Застосуємо 2 властивість: 15 * 11/2 = 82,5. Отримали не натуральне число, значить не можна з'єднати телефони.

Задача 8. *Чи можливо в державі, в якій з кожного міста виходить 3 дороги, бути рівно 100 доріг?*
Розв'язок. Розв’яжемо задачу, склавши рівняння: х * 3/2 = 100, де *х* - число міст в державі. Х * 3 = 200, х = 66, (6) - число не натуральне, значить в такій державі не може бути рівно 100 доріг.

Задача 9. *Зустрілись троє друзів - Бєлов, Сєров і Чернов. Чернов сказав одному, одягненому в сірий костюм: «На одному з нас білий костюм, на іншому - сірий і на третьому - чорний, але на кожному костюм кольору, який не відповідає прізвищу». Який колір костюма у кожного?*
Розв'язок. Почнемо розв’язувати задачу з побудови графа. Перші три вершини будуть позначати прізвища трьох друзів. Другі три вершини - кольори їхніх костюмів. Причому, для більшої наочності, друга трійка вершин повинна знаходитися праворуч від першої трійки. Наша задача побудувати три ребра, тобто з'єднати прізвище з кольором костюма. Так як колір костюма не відповідає прізвищу, то пунктиром покажемо, куди не можна проводити ребра. Далі аналізуємо умову задачі: «Чернов сказав одному, одягненому в сірий костюм», значить на Чернові не сірий костюм. Покажемо цю умову так само пунктиром. Залишається, що на Чернові білий костюм, покажемо цю умову ребром. Так як білий костюм вже зайнятий, то залишається Сєрову - чорний, а Бєлову - сірий, покажемо це теж ребрами. Отже, ми розв’язали задачу з побудовою незв'язного графа, який містить 6 вершин і 3 ребра.

Задача 10. *В одному класі навчаються Іван, Петро і Сергій. Їх прізвища Іванов, Петров і Сергєєв. Установи прізвище кожного з хлопців, якщо відомо, що Іван не Іванов, Петро не Петров і Сергій не Сергєєв і що Сергій живе в одному будинку з Петровим.*
Розв'язок. Задача розв’язується аналогічно попередній задачі з побудовою незв'язного графа, який містить 6 вершин і 3 ребра. Ключова фраза, яка

допомагає розв’язати задачу: «Сергій живе в одному будинку з Петровим», значить Сергій не Петров. Ребра і показують відповідь завдання.

Задача 11. *Три товариша Альоша, Боря і Вова після школи їдуть додому на різному транспорті: автобусі, маршрутці, трамваї. Одного разу після уроків Альоша пішов проводити свого друга до зупинки автобуса. Коли повз них проходила маршрутка, третій друг крикнув з вікна: «Боря, ти забув в школі зошит!» Хто на чому їздить додому?*

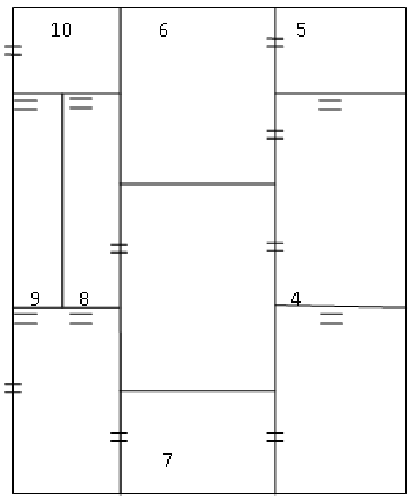
Розв'язок. Завдання відрізняється від попередньої задачі тим, що в ній кілька ключових фраз, але розв’язується теж з побудовою незв'язною графа, який містить 6 вершин і 3 ребра. Перша ключова фраза, яка допомагає розв’язати задачу: «Альоша пішов проводити свого друга до зупинки автобуса», значить Альоша їздить не на автобусі. Друга ключова фраза: «Коли повз них проходила маршрутка», значить Альоша їздить не на маршрутці. Залишається - Альоша на трамваї. Третя ключова фраза: «третій друг крикнув з вікна:« Боря, ти забув в школі зошит! »»», Значить один, якого проводжав Альоша до автобуса - Боря, а Вова їде на маршрутці. Ребра і показують відповідь задачі.

Задача 12. *Андрій, Борис, Вітя і Гриша - друзі. Один з них - лікар, інший - журналіст, третій - тренер, четвертий - будівельник. Журналіст написав статті про Андрія, Бориса і Гришу. Тренер і журналіст разом з Борисом ходили в похід. Андрій і Борис були на прийомі у лікаря. У кого яка професія?*

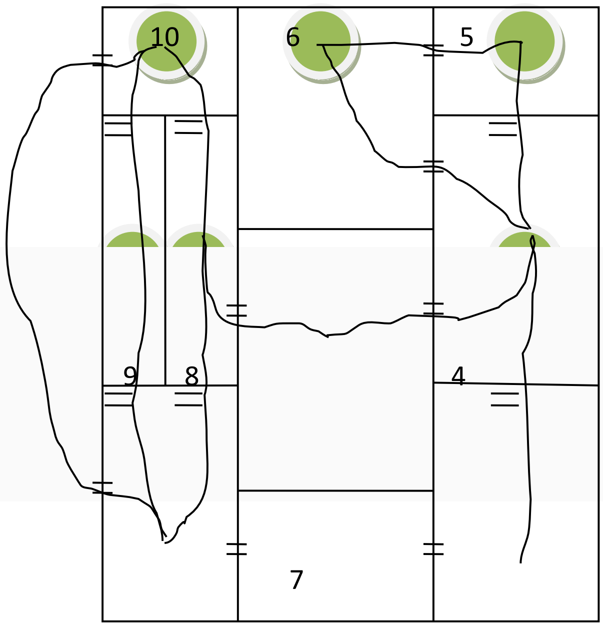
Розв'язок. У цій задачі граф буде складатися з 8 вершин і 4 ребер. Перша ключова фраза, яка допомагає розв’язати задачу: «Журналіст написав статті про Андрія, Бориса і Гриші», значить журналіст це Вітя. Друга ключова фраза: «Тренер і журналіст разом з Борисом ходили в похід», значить Борис не тренер і не журналіст. Третя ключова фраза: «Андрій і Борис були на прийомі у лікаря», значить лікар не Андрій і не Борис. Так як більше з умовою завдання працювати не можна, то будемо працювати по графу. За графу видно, що Борис не лікар, не журналіст, не тренер, а значить - будівельник. Андрій - не лікар, але і не журналіст (Вітя) і не будівельник (Борис), а значить - тренер. А Гриші залишається лікар. Ребра і показують відповідь завдання.

Додаткові задачі

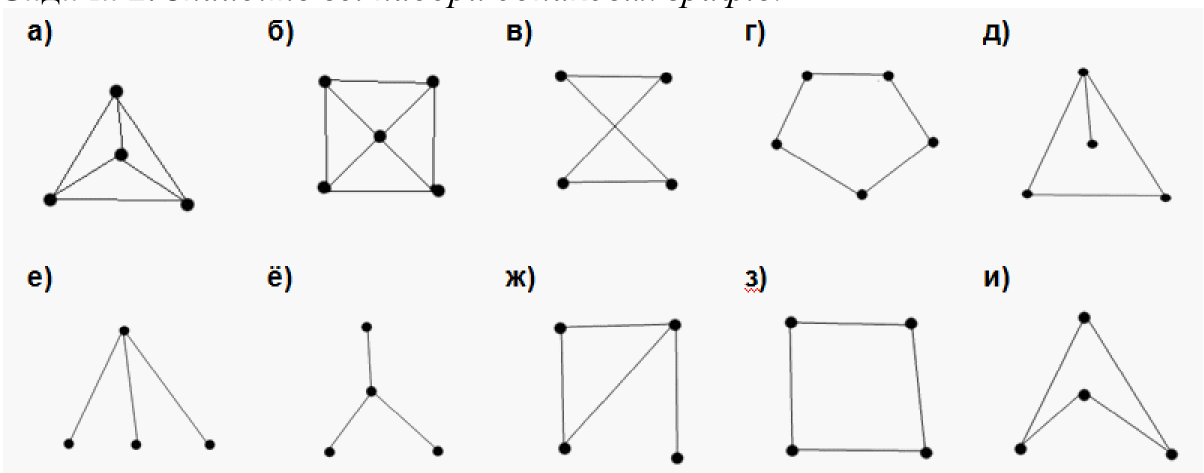
Задача 1. *На рис. зображено план підвалу з десяти кімнат. Чи можна пройти через всі двері всіх кімнат, замикаючи кожен раз ті двері, через яку ви проходите? З якої кімнати треба починати рух?*



Розв'язок. Необхідно почати з непарного вузла.



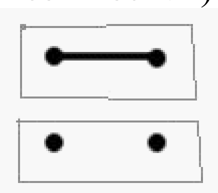
Задача 2. *Знайдіть всі набори однакових графів:*



Розв'язок. Порахуємо для кожного графа пару чисел: число його вершин і число його ребер. Якщо у графів відрізняється число вершин або число ребер, то вони не можуть бути однаковими.
Графи Б і Г відрізняються від інших числом вершин (у них по 5 вершин, а в інших по 4) і один від одного числом ребер. Тому вони ні з ким більше не однакові.
З решти графів тільки у графа А 6 ребер, тому він теж ні з ким не однаковий.
У графів Е і Ё по 4 вершини і по 3 ребра. Легко перевірити, що вони однакові.
У решти графів В, Д, Ж, З, І по 4 вершини і по 4 ребра. Але у них різні степені вершин: у графів В, З, І степені всіх вершин рівні 2, а у графів Д і Ж по дві вершини степеню 2 і по одній вершині степеню 1 і 3. Легко переконатися, що В = З = І і Д = Ж, але В ≠ Д. Таким чином, ми перерахували всі набори однакових графів і довели, що інших немає. **Відповідь.** В = З = И, Д = Ж, Е = Ё.

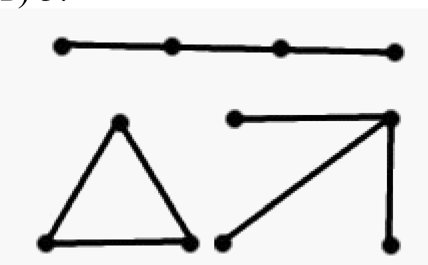
Задача 3. *Знайдіть кількість:*
а) графів з двома вершинами;
б) графів з трьома ребрами;
в) зв'язних графів з трьома ребрами;
г) незв'язних графів з чотирма вершинами.

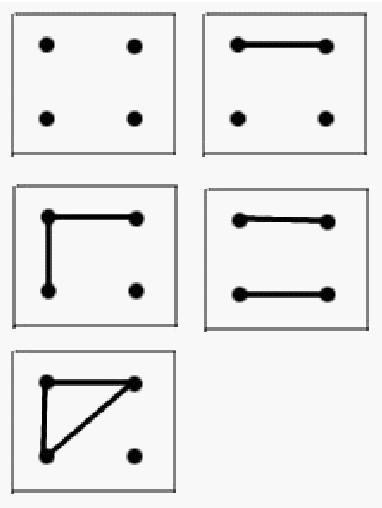
Розв'язок. а) 2:



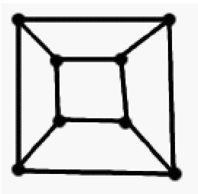
б) Таких графів нескінченно багато: до будь-якого зв'язного графу з трьома ребрами (див. пункт в) можна додати необмежену кількість окремих вершин.

в) 3:



г) 5: 

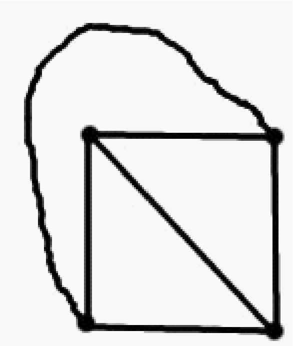
Задача 4. *Дан дріт довжиною 12 см. Чи можна скласти з нього каркас куба з ребром в 1 см? Дріт не можна різати.*
Розв'язок. У куба 12 ребер по 1 см, а у нас є рівно 12 см дроту. Значить, робити подвійні ребра не можна, інакше нам не вистачить дроту. Каркас куба можна зобразити у вигляді графа:



Якби каркас можна було скласти з дроту, не розрізаючи його, то і граф можна було б намалювати, не відриваючи олівця від паперу (малюючи ребра в тому порядку, в якому ми робимо їх з дроту). А це неможливо в силу попередньої задачі: адже у цього графа цілих вісім вершин степеня 3.
Відповідь. Не можна.

Задача 5. *Докажіть, що серед будь-яких шести чоловік обов'язково знайдуться або три попарно знайомих, або три попарно незнайомих.*
Розв'язок. Розглянемо одного з цих шістьох. Назвемо його A. Серед інших п'яти у нього обов'язково є або троє знайомих, або троє незнайомих.
Спочатку розглянемо випадок, коли A знайом принаймні з трьома іншими: B, C і D. Якщо хоч якісь двоє з цих трьох знайомі між собою (наприклад, B і C), то ми отримуємо трійку попарно знайомих людей A, B , C. Якщо ж вони все незнайомі між собою, то ми отримуємо трійку попарно незнайомих: B, C і D.
Аналогічно розглядається випадок, коли A не знайомий принаймні з трьома іншими (назвемо їх знову B, C і D). Якщо хоч якісь двоє з цих трьох не знайомі між собою (наприклад, B і C), то ми отримуємо трійку попарно незнайомих людей A, B, C. Якщо ж вони всі знайомі між собою, то ми отримуємо трійку попарно знайомих: B , C і D.

Задача 6. *Пішохід обійшов шість вулиць одного міста, пройшовши кожну рівно два рази, але не зміг обійти їх, пройшовши кожну лише один раз. Чи могло таке бути, якщо в місті немає тупиків?*
Відповідь. Могло. Наприклад, місто з такою картою:

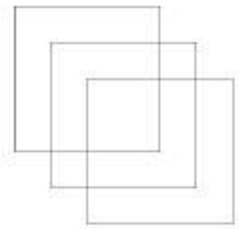


Розв'язок. Доведемо, що місто з картою, наведеного у відповіді, задовольняє умові задачі.
Спочатку доведемо, що вулиці цього міста можна обійти, пройшовши кожну по одному разу. Якби це було можливо, то і граф, який зображає карту міста, можна було б намалювати одним розчерком (просто малюючи відповідний маршрут обходу вулиць). А цього зробити не можна в силу задачі 5: в цьому графі всі чотири вершини мають непарну степінь 3.
Наступний малюнок показує, як можна обійти вулиці цього міста, пройшовши кожну по два рази. Для наочності ми зображуємо кожну вулицю двома ребрами і показуємо цифрами порядок обходу вулиць. Червоною крапкою позначено початок і кінець маршруту.

Задача 7. *Пішохід обійшов шість вулиць одного міста, пройшовши кожну рівно два рази, але не зміг обійти їх, пройшовши кожну лише раз. Чи могло це бути?*

Розв'язок. Розглянемо шість вулиць, що виходять з центру міста в різних напрямках (тобто шість відрізків із загальним початком і без інших спільних точок). Пішохід може, вийшовши з центру, пройти кожну вулицю туди-назад. Але, очевидно, пройти по кожній вулиці рівно один раз неможливо. **Відповідь.** Могло.

Задача 8. *Чи можна намалювати цю картинку (див. рис.), не відриваючи олівця від паперу і проходячи по кожній лінії по одному разу?*



Розв'язок. Пронумеруємо три квадрата, з яких складається фігура. Почнемо малювати перший квадрат з будь-якої його точки до тих пір, поки не дійдемо до точки перетину з другим квадратом. Потім перериваємо обхід першого квадрата і малюємо другий до тих пір, поки не дійдемо до його точки перетину з третім. Потім малюємо повністю третій квадрат, закінчивши домальовувати другий, потім - перший. Щоразу ми будемо закінчувати малювати квадрат в тій же точці, в якій починали, тобто в точці перетину з попереднім квадратом. **Відповідь.** Можно.

Задача 9. *а) Дан шматок дроту довжиною 120 см. Чи можна, не ламаючи дроту, виготовити каркас куба з ребром 10 см?*

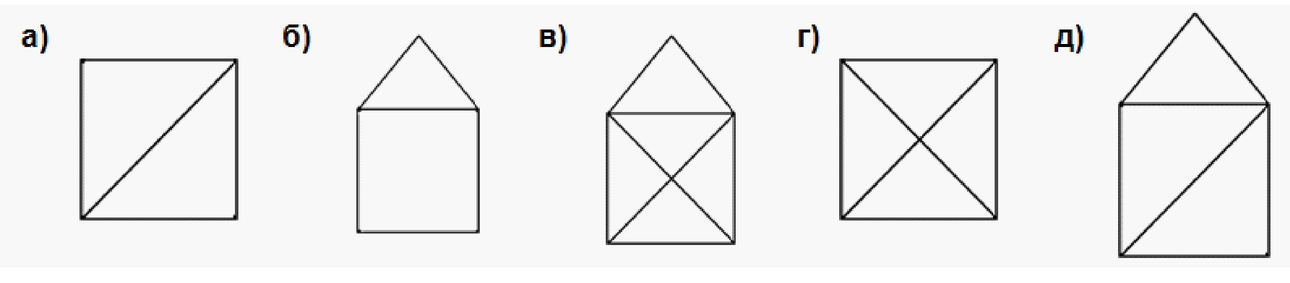
б) Яке найменше число раз доведеться ламати дріт, щоб все ж таки виготовити необхідний каркас?

Розв'язок. а) Якщо б це вдалося, то дріт йшов би по ребрах куба без накладання, тобто ми як би намалювали каркас куба, не відриваючи олівця від паперу. Але це неможливо, так як у куба вісім непарних вершин.

б) Оскільки непарних вершин вісім, то таких шматків потрібно не менше чотирьох. Чотирьох шматків досить: наприклад, у кубі ABCDA'B'C'D 'дріт по ламаній ABCDAA'B'C'D'A'. Решта три ребра BB ', CC', DD 'покриємо трьома окремими шматками дроту. **Відповідь.** а) Не можна; б) три рази.

III. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Чи можно накреслити дані графи одним розчерком (не відриваючи руки від паперу і не проходячи по ребру двічі)?



Задача 2. Чарівна країна Фарг майже вся складається з неперехідних гір і річок. У ній є шість міст: А, Б, В, Г, Д і Е. Відомо, що з А прокладені дороги в Б і Г, з Б - в А, Г і Д, з В - в Г і Е, з Г - в В і Д, з Д - в Б і Г, з Е - тільки в В. Всі інші дороги непрохідні.

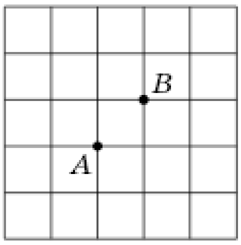
а) Намалюйте карту країни Фарг.
б) Намалюйте карту так, щоб дороги не перетиналися.
в) Чи може житель міста А потрапити в місто Д, якщо йому не можна проходити через Г?
г) Чи зможе він при тих же умовах потрапити в місто Е?

Задача 3. Три подруги Тамара, Валя і Ліда були в білій, червоній і блакитній сукнях. Їх туфлі були тих же кольорів. Тільки у Тамари колір сукні та туфель збігалися. Валя була в білих туфлях. Ні плаття, ні туфлі Ліди не були червоними. Визначте колір сукні і колір туфель кожної з подруг.

Задача 4. Три товариша - Льоша, Сергій і Денис - купили цуценят різної породи: цуценя такси, щеня коллі і цуценя вівчарки. Відомо, що: щеня Льоші темніше по окрасу, ніж такса, Лесі і Гриф; щеня Сергія старше Грифа, вівчарки і такси; Джек і такса завжди гуляють разом. У кого якої породи щеня? Назвіть клички щенят.

Задача 5. Із набірного полотна взяли дві картки з цифрою 1 і три картки з цифрою 5. Скільки різних п'ятизначних чисел можна скласти з цих карток?

Задача 6. Допитливий турист хоче прогулятися вулицями Старого міста від вокзалу (точка А на плані) до свого готелю (точка В). Турист хоче, щоб його маршрут був якомога довше, але двічі опинятися на одному і тому ж перехресті йому нецікаво, і він так не робить. Намалюйте на плані найдовший можливий маршрут і доведіть, що довшого немає.



IV. Тести

1. У державі 100 міст, із кожного виходить 4 дороги. Скільки всього доріг в державі?

Виберіть відповідь:
А) 100 В) 400
Б) 25 Г) 200

2. Чи можна накреслити, не відриваючи олівця від паперу (одним розчерком)
а) квадрат з діагоналями?

б) шестикутник з усіма діагоналями?

Виберіть відповідь:

А) можливо

Б) не можливо

В) інша відповідь

3. Художник-авангардист намалював картину "Контур квадрата і його діагоналі".

Чи міг він намалювати свою картину, не відриваючи олівця від паперу і не проводячи одну лінію двічі?

Виберіть відповідь:

А) можливо

Б) не можливо

В) інша відповідь

4. У Льови 2 конверта: звичайний і авіа і 3 марки: прямокутна, квадратна і трикутна. Скількома способами він може вибрати конверт і марку, щоб відправити лист?

Виберіть відповідь:

А) 17 В) 9

Б) 6 Г) 10

5. У їдальні на гаряче можна замовити щуку, гриби і баранину, на гарнір - картоплю і рис, а з напоїв - чай і каву. Скільки різних варіантів обідів можна скласти із зазначених страв?

Виберіть відповідь:

А) 12 В) 9

Б) 6 Г) 10

6.Алла вирішила мамі на день народження подарувати букет квітів (троянди, тюльпани або гвоздики) і поставити їх або в вазу або в глечик. Скількома способами це можна зробити?

Виберіть відповідь:

А) 17 В) 9

Б) 6 Г) 10

V. Самооцінка учня:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Вдалося отримати результат (рішення, відповідь)?						
Правильно чи з помилкою?						
Самостійно або з чиєюсь допомогою?						

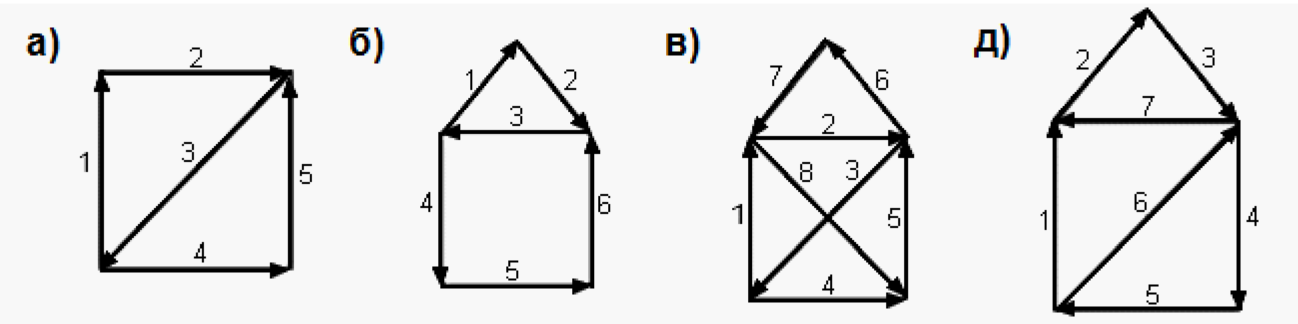
Відповіді до тестів:

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
Г)	**Б)**	**Б)**	**Б)**	**А)**	**Б)**

Розв'язки до задач

<u>Задача 1.</u>

Розв'язок. а, б, в, д) На малюнку нижче показано, як можна намалювати кожен з цих графів одним розчерком. Послідовність і напрямок обходу показані цифрами і стрілками:



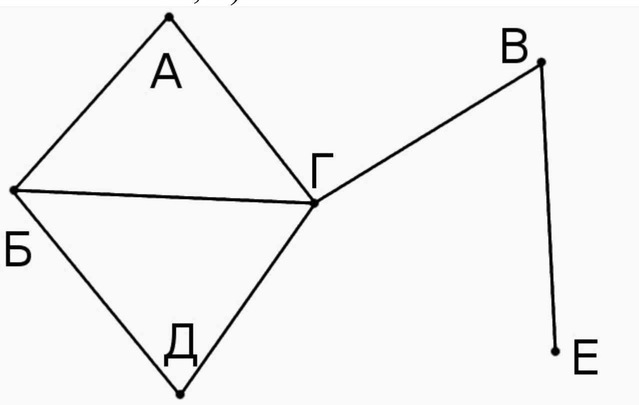
Зверніть увагу: якщо в графі є непарна вершина, обхід повинен починатися або закінчуватися в ній. Якщо непарних вершин дві, то обхід починається в одній з них і закінчується в іншій. Чому так має відбуватися, пояснює розв'язання задачі 5.

г) У графі з пункту г є чотири вершини непарного степеня 3, тому в силу задачі 5 його не можна намалювати одним розчерком.

Відповідь. а, б, в, д) Можна; г) не можна.

Задача 2.

Розв'язок. а, б)



в) Може: А → Б → Д.

г) Не зможе: якщо заборонити проходити через місто Г, міста Е і В перестають з'єднуватися з містами А, Б і Д.

Задача 3.

Розв'язок. У цій задачі граф буде складатися з 9 вершин і 6 ребер. Причому вершини треба розбити на три трійки: перша - імена, друга - колір туфель, третя - колір сукні і розмістити їх для наочності в різних площинах. Перша ключова фраза, яка допомагає вирішити задачу: «Валя була в білих туфлях», значить проводимо перше ребро від Валі до білих туфель. Друга ключова фраза: «Ні плаття, ні туфлі Ліди не були червоними», значить проводимо пунктири від Ліди до червоних туфель і червоного плаття. Третя ключова фраза: «Тільки у Тамари колір сукні та туфель збігалися», значить у Валі не біла сукня (так як у неї білі туфлі). Так як більше з умовою задачі працювати не можна, то будемо працювати по графу. За графу видно, що у Ліди блакитні туфлі (так як червоні бути не можуть, а білі у Валі), значить, проводиться друге ребро. Далі видно, що Тамарі залишаються червоні туфлі і значить і червоне плаття (третя ключова фраза), проводимо ще два ребра. У Валі блакитне плаття (так так червоне у Тамари, а біле не може бути по графу). Залишається Ліди біле плаття, проводимо останнє ребро. Ребра і показують відповідь завдання.

Задача 4.

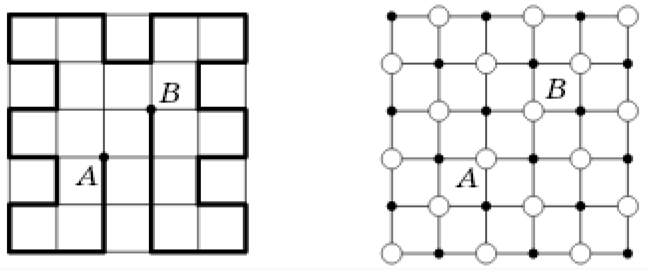
Розв'язок. У цій задачі граф буде складатися з 9 вершин і 6 ребер. Причому вершини треба розбити на три трійки: перша - імена, друга - клички, третя - порода і розмістити їх для наочності в різних площинах. Перша ключова фраза, яка допомагає вирішити задачу: «: щеня Льоші темніше по окрасу, ніж такса, Лесі і Гриф», значить у Льоші не такса, не Лесі, не Гриф. Друга ключова фраза: «щеня Сергія старше Грифа, вівчарки і такси», значить у Сергія не Гриф, не вівчарка, не такса. Третя ключова фраза: «Джек і такса завжди гуляють разом», значить Джек це не такса. Так як більше з умовою задачі працювати не можна, то будемо працювати по графу. По графу видно, що у Сергія не такса і не вівчарка, а значить - коллі, тому проводимо перше ребро. Далі видно, що у Льоші не такса і не коллі, а значить - вівчарка, проводимо ще ребро. Денису залишилася такса. У Льоші не Лесі і не Гриф, значить Джек. У Сергія не Гриф і не Джек, а Лесі. Залишається Денису Гриф, проводимо останнє ребро. Ребра і показують відповідь завдання.

Задача 5.

Розв'язок. Рішенням завдання буде незв'язний граф, що складається з двох граф-дерев. У кожному граф-дереві буде по 5 ланок, так як треба скласти п'ятизначне число. За графом легко порахувати, що можна скласти 10 чисел.

Задача 6.

Розв'язок. *Приклад.* Один з можливих маршрутів туриста зображений на малюнку. Рухаючись цим шляхом, турист пройде 34 вулиці (вулицею ми називаємо відрізок між двома сусідніми перехрестями).



Оцінка. Всього в Старому місті 36 перехресть. Всякий раз, коли турист проходить чергову вулицю, він потрапляє на нове перехрестя. Таким чином, більше 35 вулиць турист пройти не зможе (початкове перехрестя A не рахується). Покажемо, що відвідати 35 перехресть (і, отже, пройти 35 вулиць) турист теж не зможе. Для цього розфарбуємо перехрестя в чорний і білий кольори в шаховому порядку (рис. праворуч). Всякий раз, проходячи вулицю, турист потрапляє на перехрестя іншого кольору. І готель, і вокзал розташовані на білих перехрестях. Тому будь-який маршрут містить парне число вулиць, а число 35 непарне.

Розв'язки до тестів

1. Розв'язок. Одна дорога з'єднує два міста, тобто дві вершини з'єднані одним ребром. Застосуємо другу властивість: 100 * 4/2 = 200.

2. Розв'язок. а) У цьому графі 4 непарні вершини.

б) У цьому графі 6 непарних вершин.

Відповідь. Не можна.

3. Розв'язок. Треба застосувати правило Ейлера. *Відповідь.* Не міг.

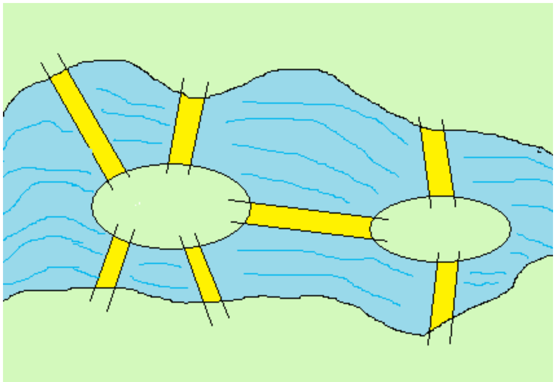
4. Розв'язок. Рішенням задачі буде незв'язний граф, що складається з двох граф-дерев (ріс.58). У кожному граф-дереві буде по 2 ланки. Перша ланка - тип конверта, друга - тип марки. За графом легко порахувати, що можливо 6 варіантів.

5. Розв'язок. Рішенням задачі буде незв'язний граф, що складається з трьох граф-дерев. Першою ланкою графа будуть гарячі страви, другою - гарнір, третьою - напої. За графом легко скласти всі можливі комбінації обідів: Щ-К-Ч, Щ-К-К, Щ-Р-Ч, Щ-Р-К, Г-К-Ч, Г-К-К, Г-Р-Ч , Г-Р-К, Б-К-Ч, Б-К-К, Б-Р-Ч, Б-Р-К - 12 варіантів.

6. Розв'язок. Рішенням задачі буде незв'язний граф, що складається з трьох граф-дерев. Першою ланкою графа будуть квіти, другою - вази. За графом легко скласти всі можливі комбінації букетів: Р-В, Р-К, Т-В, Т-К, Г-В, Г-К - 6 способів.

Роздатковий матеріал до уроку

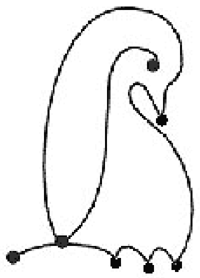
Задача 1. «Про кенігсберзькі мости». *Раніше місто Кенігсберг було розташоване на берегах і двох островах річки Преголю. Різні частини міста були з'єднані сім'ю мостами. Здійснюючи прогулянки в недільні дні, городяни почали сперечатися: чи можна вибрати маршрут так, щоб пройти один і тільки один раз по кожному мосту і потім повернутися в початкову точку шляху?*



Задача 2. *5 друзів при зустрічі обмінялися рукостисканнями (кожен потиснув руку кожному по одному разу). Обміняйтесь, будь ласка, рукостисканнями. Скільки всього рукостискань було зроблено?*

Задача-загадка 3. *Перед вами граф - "роздрукований лист". Спробуйте накреслити цей граф не відриваючи олівця від паперу і не проводячи по одній лінії двічі.*

Задача 4. *Креслення фігур одним розчерком*



Задача 5. *Десять чоловік вітали один одного рукостисканнями. П'ятеро людей зробили по сім рукостискань, троє - по п'ять, двоє - по чотири. Скільки всього було зроблено рукостискань?*

Задача 6. *Чи можливо організувати футбольний турнір дев'яти команд так, щоб кожна команда провела по чотири зустрічі?*

Задача 7. *Чи можливо 15 телефонів з'єднати між собою так, щоб кожен з них був пов'язаний рівно з 11 іншими?*

Задача 8. *Чи можливо в державі, в якій з кожного міста виходить 3 дороги, бути рівно 100 доріг?*

Задача 9. *Зустрілись троє друзів - Бєлов, Сєров і Чернов. Чернов сказав одному, одягненому в сірий костюм: «На одному з нас білий костюм, на іншому - сірий і на третьому - чорний, але на кожному костюм кольору, який не відповідає прізвищу». Який колір костюма у кожного?*

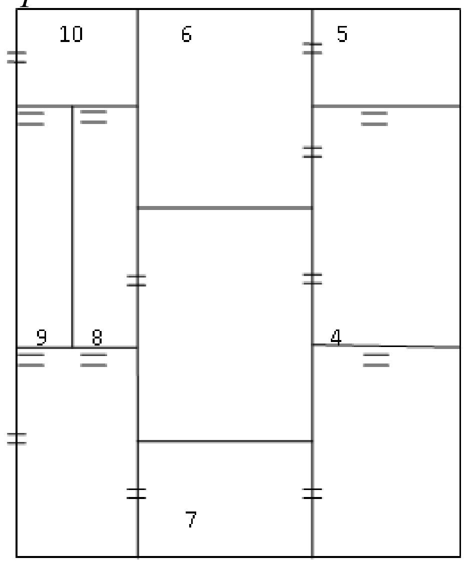
Задача 10. *В одному класі навчаються Іван, Петро і Сергій. Їх прізвища Іванов, Петров і Сергєєв. Установи прізвище кожного з хлопців, якщо відомо, що Іван не Іванов, Петро не Петров і Сергій не Сергєєв і що Сергій живе в одному будинку з Петровим.*

Задача 11. *Три товариша Альоша, Боря і Вова після школи їдуть додому на різному транспорті: автобусі, маршрутці, трамваї. Одного разу після уроків Альоша пішов проводити свого друга до зупинки автобуса. Коли повз них проходила маршрутка, третій друг крикнув з вікна: «Боря, ти забув в школі зошит!» Хто на чому їздить додому?*

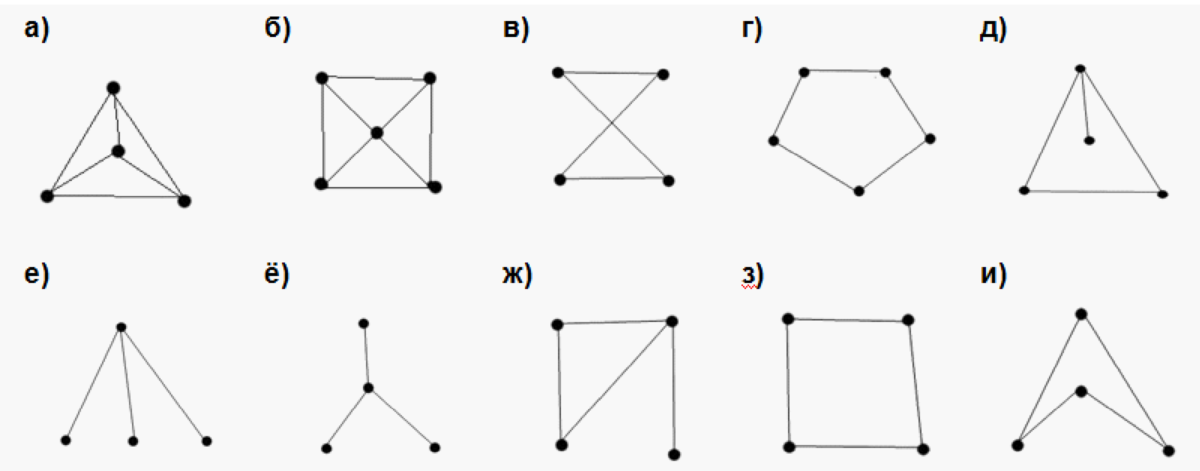
Задача 12. *Андрій, Борис, Вітя і Гриша - друзі. Один з них - лікар, інший - журналіст, третій - тренер, четвертий - будівельник. Журналіст написав статті про Андрія, Бориса і Гришу. Тренер і журналіст разом з Борисом ходили в похід. Андрій і Борис були на прийомі у лікаря. У кого яка професія?*

Додаткові задачі

Задача 1. *На рис. зображено план підвалу з десяти кімнат. Чи можна пройти через всі двері всіх кімнат, замикаючи кожен раз ті двері, через яку ви проходите? З якої кімнати треба починати рух?*



Задача 2. *Знайдіть всі набори однакових графів:*



Задача 3. *Знайдіть кількість:*
а) графів з двома вершинами;
б) графів з трьома ребрами;
в) зв'язних графів з трьома ребрами;
г) незв'язних графів з чотирма вершинами.

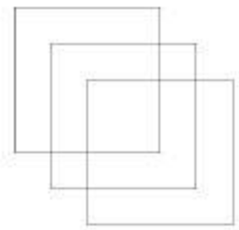
Задача 4. *Дан дріт довжиною 12 см. Чи можна скласти з нього каркас куба з ребром в 1 см? Дріт не можна різати.*

Задача 5. *Докажіть, що серед будь-яких* *шести чоловік обов'язково знайдуться або три попарно знайомих, або три попарно незнайомих.*

Задача 6.*Пішохід обійшов шість вулиць одного міста, пройшовши кожну рівно два рази, але не зміг обійти їх, пройшовши кожну лише один раз. Чи могло таке бути, якщо в місті немає тупиків?*

Задача 7. *Пішохід обійшов шість вулиць одного міста, пройшовши кожну рівно два рази, але не зміг обійти їх, пройшовши кожну лише раз. Чи могло це бути?*

Задача 8. *Чи можна намалювати цю картинку (див. рис.), не відриваючи олівця від паперу і проходячи по кожній лінії по одному разу?*



Задача 9. *а) Дан шматок дроту довжиною 120 см. Чи можна, не ламаючи дроту, виготовити каркас куба з ребром 10 см?*
б) Яке найменше число раз доведеться ламати дріт, щоб все ж таки виготовити необхідний каркас?

Урок № 10. Тема. Ігрові стратегії

Є речі, які спокійно можна пояснити двічі і тричі,
не боючись, що тебе зрозуміють.
Премудра Сова

Мета уроку:

- *освітня:* володіти базовими поняттями - гра з повною інформацією, виграшні (програшні) позиції, стратегія гри; формування вміння розв'язувати задачі на подану тему;
- *розвиваюча:* розвиток інтересу до вивчення теми і мотивування бажання застосовувати набуті знання і вміння, вміти точно і грамотно викладати свої думки; проявляти пізнавальний інтерес до вивчення предмета, до способів вирішення нових навчальних завдань;
- *виховна:* вміти контролювати процес і результат навчальної математичної діяльності; розуміти значимость інформаційної діяльності для сучасної людини;

Рекомендації до уроку

I. Познайомитись з основними поняттями «Теорії ігор»

II. На прикладах розібрати методи розв'язування задач №1-12, за необхідністю розібрати додаткові задачі № 1-7

III. На вибір виконати завдання для самостійного розв'язку або виконати тести, відповіді записати в таблицю

IV. Зробити самоаналіз

Хід уроку

I. Основні поняття «Теорії ігор»

Теорія ігор - математичний метод вивчення оптимальних стратегій в іграх.
Теорія ігор - розділ математики,який вперше був викладений в класичній книзі 1944 року Джона фон Неймана і Оскара Моргенштерна «Теорія ігор і економічної поведінки»

Під ***грою*** розуміється процес, в якому беруть участь дві і більше сторін, які ведуть боротьбу за реалізацію своїх інтересів. Кожна зі сторін має свою мету і використовує деяку стратегію, яка може вести до виграшу або програшу - залежно від поведінки інших гравців. Ми розглянемо ігри з повною інформацією, в них на кожному кроці хід робить один гравець, який має повну інформацію про поточний стан всіх процесів, що відбуваються і спільні правила гри. Нашим завданням є пошук найкращого способу гри або виграшної стратегії для одного з гравців .

Стратегія - це набір правил, за якими гравець повинен робити свої ходи в залежності від ходів противника, щоб виграти. Для гравця, що робить перший хід, стратегія повинна включати в себе і опис першого ходу.

Усі позиції в іграх діляться на виграшні і програшні.

***Виграшна позиція* (**в) - така, отримавши яку, можна грати так, щоб виграти, щоб не робив суперник. Це така позиція, в якій гравець, що робить перший хід, може гарантовано виграти при будь-якій грі суперника, якщо не зробить помилку; при цьому говорять, що у нього є виграшна стратегія - алгоритм вибору чергового ходу, що дозволяє йому виграти.

Програшна позиція (п) - така, отримавши яку, ви програєте, якщо тільки суперник не помилиться.

Якщо гравець починає грати в програшній позиції (п), він обов'язково програє, якщо помилку зробить його суперник; в цьому випадку говорять, що у нього немає виграшної стратегії; загальна стратегія гри полягає в тому, щоб своїм ходом створити програшну позицію для суперника.

Виграшні і програшні позиції можна охарактеризувати так:

- позиція, з якої всі можливі ходи ведуть у виграшні позиції - програшна (п);

- позиція, з якої хоча б один з можливих ходів веде в програшну позицію - виграшна (в), при цьому стратегія гравця полягає в тому, щоб перевести гру в цю програшну (для суперника) позицію.

Задачі з іграми поділяють на:
1. «Метод виграшних і програшних позицій» або «аналіз гри з кінця»
2. Ігри-жарти (результат гри не залежить від ходу супротивників)
3. Симетричні стратегії

1. «Метод виграшних і програшних позицій» або «аналіз гри з кінця»

Задача 1. *Сидить на узліссі Баба Яга нудьгує. Раптом бачить, йде до неї синок багатого купця нероба Онуфрій.*
- *Добрий день, добрий молодець! Куди йдеш? - запитала Баба Яга.*
- *А мені нудно! Пограємо з тобою в гру, а потім я тобі дорогу покажу, - казала Баба Яга. - І робити тобі особливо нічого не доведеться.*

Є у мене мішок, а в ньому 45 кульок.
- Кожен із нас по черзі буде виймати з мішка будь-яке число кульок від 1 до 5. Виграє той, хто витягне останню кульку.
Онуфрій погодився. Хто б гру не починав, Онуфрій не виграв жодного разу. Баба Яга була в захваті і радісно вказала Онуфрію шлях додому!
Яку хитрість знала Баба Яга? Як вона повинна була грати, щоб перемогти в будь-якому випадку?

Розв'язок. Почнемо з кінця. Важливо чим закінчиться гра. Якщо гравцеві Онуфрію в мішку дістанеться 6 куль він програє, тому що суперник виймає від 1 до 5. Баба Яга бере останню або всі решта кулі (серед яких є остання); вона виграє. Стратегія гри Баби Яги - виймати стільки куль, щоб в мішку залишалося число куль кратних 6.

Відповідь: Онуфрій програє, якщо після ходу Баби Яги в мішку залишиться кількість кульок кратних 6.

Задача 2. *Малюк і Фрекен Бок грають в гру. На столі лежать цукерки. Першим ходом Малюк ділить цукерки на три не пусті купки, потім Фрекен Бок віддає дві купки Карлсону, а третю знову ділить на три не пустих, потім Малюк також дві віддає Карлсону, третю ділить і так далі. Хто не зможе зробити хід програє. Хто переможе при правильній грі, якщо на столі: а) 7 цукерок? б) 9 цукерок? в) 12 цукерок? г) 14 цукерок?*

Розв'язок. Нехай гра почалася з якогось великого числа цукерок. Чим вона закінчилася? Тим, що у гравця немає ходу. Це буває, коли цукерок йому дісталося 1 або 2. Це позиції програшні для того, кому вони дістались (п). Позиція 3-виграшна (в). Маючи три цукерки, гравець ділить їх на три купки по цукерці, і супернику залишається одна цукерка. Гравець виграв. Виграти можна і при 4, 5 і 6 цукерках. Ділити 6 цукерок треба з розумом (6 = 2 + 2 + 2), ділячи на (6 = 1 + 1 + 4) гравець програє.

Тепер розглянемо 7 цукерок. Гравець може їх розкласти на купки (3 + 3 + 1), (4 + 2 + 1), (5 + 1 + 1). Суперник залишає йому 1 цукерку. Гравець програв.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
П	П	В	В	В	В	П	П	В	В	В	В	П	П	В

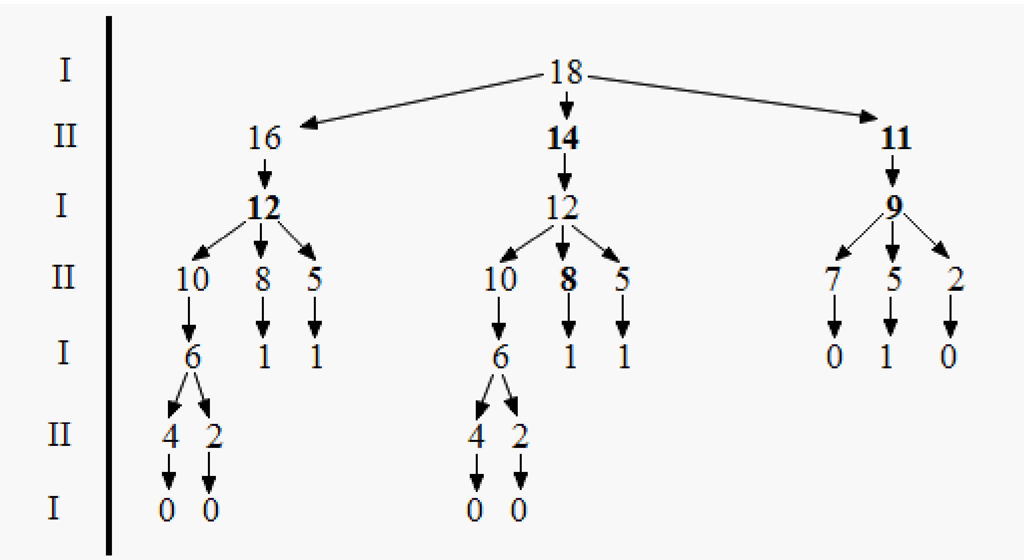
Відповідь: а) Малюк програв, якщо в купці 7 цукерок б) Малюк виграв, якщо в купці 9 цукерок в) Малюк виграв, якщо в купці 12 цукерок г) Малюк програв, якщо в купці 14 цукерок при правильній грі.
Стратегія виграшу Малюка: якщо в купці 7,8 або 13,14 цукерок, то Малюк повинен запропонувати Фрекен Бок перший хід і вести правильну гру. Якщо в купці від 3 до 6 цукерок або від 9 до 12, то його хід повинен бути першим.

Задача 3. *Мальвіна дала Буратіно завдання: «Порахуй плями в своєму зошиті, додай до їх числа 7, розділи на 8 помнож на 6 і відніми 9. Якщо зробиш все правильно, отримаєш просте число». Буратіно все переплутав. Плями він підрахував точно, але потім помножив їх кількість на 7, відняв з результату 8, потім розділив на 6 і додав 9. Яка відповідь вийшла в Буратіно?*

Розв'язок. Розглянемо обчислення за планом Мальвіни. Сусідні операції «розділи на 8 і помнож на 6» замінимо на одну операцію множення на 6/8 = 3/4. Якби після множення на 3/4 вийшло дробове число, то віднявши з нього 9, ми б знову отримали дробове число, а повинні отримати ціле. Значить при множенні на 3/4 ми отримуємо ціле число. Причому це число ділиться на 3 (при множенні на 3/4 трійці «ні з чим скоротиться»). Тоді після віднімання 9 вийде число, яке теж ділиться на 3.
І відомо, що це число просте. Це може бути тільки число 3, значить за планом Мальвіни в кінці маємо отримати 3. Провівши операції в зворотному порядку, знайдемо число плям: (3 + 9): 6 * 8 - 7 = 9. Буратіно отримав число (9 * 7 - 8): 6 + 9 = 18 + 1/6. ***Відповідь:*** Буратіно отримав відповідь «18 + 1/6».

Задача 4. *В купці 25 каменів. Двоє по черзі беруть з купки 2, 4 або 7 каменів. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто виграє при правильній грі?*

Розв'язок. Виграє перший. Першим ходом він повинен взяти 4 каменю, а далі діяти за наведеною нижче схемою. (Вказано кількість каменів, які залишаються в купі після того, як гравець зробить черговий хід). ***Відповідь.*** Виграє перший.



<u>2. Ігри-жарти (результат гри не залежить від ходу супротивників)</u>

Задача 5. *У рядок виписано 100 одиниць. Кирило та Данило по черзі ставлять між якими-небудь двома сусідніми одиницями знак плюс або мінус. Коли між усіма сусідніми числами поставлені знаки, обчислюється результат. Якщо* *отримане число парне, то виграє Кирило, в іншому випадку - Данило. Хто виграє, якщо починає Кирило?*

Розв'язок. Як при додаванні, так і при відніманні одиниці з будь-якого числа парність цього числа змінюється. Так як було виписано парне число одиниць (100 штук), результат буде парним незалежно від розстановки плюсів і мінусів. Дійсно, якщо, рухаючись зліва направо, послідовно обчислювати значення записаного виразу, то ми будемо 100 раз додавати або віднімати одиницю, і парність зміниться 100 раз, тобто збережеться (адже в самому початку був нуль). Тому виграє Кирило незалежно від ходів супротивників. ***Відповідь.*** Виграє Кирило.

Задача 6. *На дошці написано 10 одиниць і 10 двійок. Двоє грають за такими правилами: за хід дозволяється стерти дві будь-які цифри і, якщо вони були однаковими, написати двійку, а якщо різними - одиницю. Якщо остання залишилася на дошці цифра - одиниця, то виграв перший гравець, якщо двійка - то другий. Хто виграє?*

Розв'язок. Будемо стежити за сумою чисел, написаних на дошці. Зауважимо, що при кожному ході вона не змінюється, тому що або віднімається парне число і додається двійка, або віднімається непарне число і додається одиниця. Оскільки спочатку сума чисел була парною, то остання цифра, що залишилася на дошці, парна, тобто це двійка. Тому виграє другий гравець. ***Відповідь.*** Виграє другий гравець.

Задача 7. *Маша і Ваня по черзі ламають шоколадку «Оленка» розміром 6 × 8. За один хід можна зробити прямолінійний розлом будь-якого з шматків уздовж поглиблення. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє, якщо перший розлом робить Маша?*

Розв'язок. Спочатку шоколадка складалася з одного шматка. Після кожного ходу кількість шматків збільшується на один. В кінці гри стало 48 шматків, тому було зроблено 47 розломів, тобто непарне число. Так як Маша робить кожен непарний розлом, то вона зробить і останній хід, тому виграє. ***Відповідь.*** Виграє Маша.

Задача 8. *Є три купки по 40 каменів. Петро і Василь ходять по черзі, починає Петро. За хід треба об'єднати дві купки, після чого розділити ці камені на чотири купки. Хто не може зробити хід - програв. Хто з гравців (Петро або Василь) може виграти, як би не грав суперник?*

Розв'язок. За хід дві купи замінюються на чотири, тобто число куп збільшується на 2. А скільки буде куп, коли гра закінчиться? На початку число куп було непарним, тому, збільшуючись на два, воно весь час буде залишатися непарним.

Якщо черговий хід зробити не можна, то в двох найбільших купках в сумі не більше 3 каменів. Тоді у всіх інших купках по 1 каменю і їх не менше 120 - 3 = 117 штук. Тобто всього має бути (хоча б) 119 куп.

Але щоб отримати 119 куп, треба зробити (119 - 3): 2 = 58 ходів. Це число парне, значить, останній хід зробив Вася (і він виграв). ***Відповідь.*** Вася.

Коментар. Насправді це гра-жарт: Вася виграє незалежно від дій гравців.

3. Симетричні стратегії

Задача 9. *Прийшовши в школу, Микола і Аліса побачили на дошці напис: "ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА". Вони домовилися зіграти в наступну гру: за один хід в цьому написі дозволяється стерти будь-яку кількість однакових букв, а виграє той, хто стирає останню букву. Першим ходив Микола і витер останню букву "А". Як треба грати Алісі, щоб забезпечити собі виграш?*

Розв'язок. Назвемо ***кратністю букви*** ту кількість разів, в якому ця буква зустрічається в написі. Після ходу Миколи, літери "А" і "О" мають кратність 3, літери "Д", "И", "С" і "Я" - кратність 2, а літери "Г", "К", "Л", "М", "Н", "П", "Р", "Т" і "У" - кратність 1. Для того, щоб виграти, Алісі треба спочатку стерти будь-яку букву кратності 1, щоб кількість букв кожної кратності стало парним. Далі Алісі треба грати так, щоб після кожного її ходу кількість букв кожної кратності було парним. Для цього їй слід у відповідь на кожен Миколин хід витирати таку ж кількість букв тієї ж кратності. Наприклад, якщо Микола зітре три букви "А", то Аліса повинна стерти три букви "О", а якщо Микола зітре одну букву "Д", то Аліса може стерти також одну букву "И". Тоді на кожен хід Миколи у Аліси буде відповідний хід, тому саме вона зробить останній хід і виграє.

Задача 10. *Остап Бендер провів сеанс одночасної гри в шахи з двома гросмейстерами, причому з одним із суперників він грав чорними фігурами, а з іншим - білими. За цей сеанс Остап отримав 1 очко. (За перемогу в шаховій партії дається 1 очко, за нічию пів-очка, за поразку - 0 очок.) Як він зміг цього добитися?*

Розв'язок. Першим ходив суперник Остапа, який грає білими. Після цього Остап повторив його хід на іншій дошці. Таким чином, в кожній з партій Остап Бендер повторював ходи суперника з іншої партії. Фактично гросмейстери грали один з одним на різних дошках. Якщо один з суперників Бендера отримав 1 очко, то Бендер отримав 1 очко в партії з іншим. У разі нічиєї кожен гравець отримав за кожну зіграну партію по 0,5 очка, а тоді і Бендер в сумі набрав 0,5 + 0,5 = 1 очко.

Задача 11. *а) Є дві купки по 10 сірників. Двоє по черзі беруть сірники, причому за один хід дозволяється брати будь-яку кількість сірників, але тільки з однієї купки. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє при правильній грі?*
б) а якщо в одній купці 20, а в іншій 30 сірників?

Розв'язок. а) Виграшна стратегія для другого гравця: брати з купки, недоторканою першим на попередньому ході, стільки ж сірників, скільки взяв до цього перший.
б) Виграшна стратегія для першого гравця: першим ходом взяти з більшою купки 10 сірників, а потім скористатися стратегією з попереднього пункту. ***Відповідь.*** а) Виграє другий. б) Виграє перший.

Задача 12. *У рядок написано кілька мінусів. Два гравці по черзі переправляють один або два сусідніх мінуса на плюс. Виграє той, хто переправить останній мінус. Хто виграє при правильній грі, той хто починав або його партнер?*

Розв'язок. Початківець виграє, розбивши першим ходом мінуси на дві «частини» рівної довжини. Після цього початківець може кожним ходом переправляти мінуси, симетричні тим, які перед цим переправив другий. ***Відповідь.*** Переможе початківець.

Додаткові задачі

Інші стратегії (вдала відповідність, рішення з кінця)

Задача 1. *Тура стоїть на полі a1. За хід дозволено зрушити її на будь-яку кількість клітин вправо або на будь-яке число клітин вгору. Виграє той, хто поставить човен на поле h8. У кого є виграшна стратегія?*

Розв'язок. Виграшна стратегія є у другого гравця: кожним своїм ходом він може повертати туру на діагональ a1-h8. Перший гравець змушений буде кожен раз відводити туру з цієї діагоналі. Оскільки поле h8 належить діагоналі a1-h8, на нього поставить туру другий гравець.
Коментар. Проаналізуємо це рішення. Ми виділили клас програшних позицій - діагональ a1-h8. Всі інші початкові позиції - виграшні. Класи виграшних і програшних позицій мають наступні *властивості:*
всякий хід з програшної позиції веде в виграшну (тільки виграє, на жаль, противник!);
для будь-якої виграшної позиції є хід, який переводить її в програшну позицію.
Відповідь. У другого.

Задача 2. *Є а) 2; б) 3 однакові купи каміння. Грають двоє, беруть по черзі будь-яке число каменів з будь-якої купи, але тільки з однієї. Виграє той, хто візьме останні камені. Хто виграє при правильній грі?*

Вказівка. б) Зведіть завдання до пункту а).
Розв'язок. а) Другий гравець виграє, підтримуючи рівність куп (спочатку купи рівні; перший своїм ходом змушений порушити рівність, а другий може її відновити, взявши стільки ж каменів з іншої купи).
б) Перший гравець може взяти всі каменюки з третьої купи. Таким чином, після його ходу почнеться гра пункту а), але він буде вже другим в цій грі, а значить, переможе.
Коментар. Порівняйте пункт а) цієї задачі із попередньою задачею . Спробуйте побачити, що це одна і та ж задача (якщо в купках по 8 каменів).
Відповідь. а) другий, б) перший.

Задача 3. *Грають двоє, по черзі переводять годинникову стрілку на 2 або 3 години вперед. Спочатку годинникова стрілка вказує на 12; переможцем оголошують того, після чийого ходу вона вказала на 6. Хто переможе при правильній грі? (Стрілка може зробити кілька оборотів, перш ніж зупиниться на цифрі 6.)*

Вказівка. Аналізуйте завдання «з кінця», відзначаючи виграшні і програшні позиції, як ми це робили в попередніх завданнях.
Розв'язок. Очевидно, позиції 3 і 4 - виграшні. Значить, позиція 1 - програшна (всі ходи з неї ведуть на виграшні позиції), 10 і 11 - виграшні (з них можна піти на програшну позицію 1). Міркуючи таким чином і далі, отримаємо, що позиція 8 - програшна, 5 - виграшна, 2 - програшна і, нарешті, 12 - виграшна. ***Відповідь.*** Переможе початківець.

Симетричні стратегії

Задача 4. *У кожній клітині дошки 7 × 7 стоїть шашка. Двоє по черзі знімають з дошки будь-яку кількість шашок, які стоять поряд або з одного вертикального, або з одного горизонтального ряду. Виграє той, хто зняв останню шашку. Вкажіть виграшну стратегію для першого гравця.*

Розв'язок. Першим ходом необхідно зняти шашку з центру дошки, а потім робити ходи, симетричні щодо центру дошки ходам другого гравця.

Задача 5. *Двоє по черзі кладуть п'ятаки на круглий стіл, причому так, щоб вони не накладалися один на одного. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє при правильній грі?*

Розв'язок. Перший гравець першим ходом кладе п'ятак в центр столу. Потім робить ходи симетрично ходам першого щодо центру стола. Тому перший завжди зможе зробити хід у відповідь. ***Відповідь.*** Виграє перший.

Задача 6. *На дошці розміром 7 × 7 двоє по черзі зафарбовують клітини так, щоб вони не мали жодної спільної а) сторони; б) точки. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто виграє при правильній грі?*

Розв'язок. Своїм перший ходом початківець може зафарбувати центральну клітку квадрата, а потім підтримувати центральну симетрію. ***Відповідь.*** Виграє перший.

Задача 7. *На колі дано 20 точок. Грають двоє. Кожним ходом гравець проводить хорду з кінцями в даних точках так, щоб хорди не перетиналися всередині кола. (Мати загальні кінці хорди можуть.) Програє той, хто не зможе провести хорду. Хто переможе при правильній грі?*

Розв'язок. Першим своїм ходом початківець може провести хорду АВ, по обидва боки якої буде однакова кількість зазначених точок. Занумеруем точки, що лежать по одну сторону від АВ в порядку проходження червоними цифрами 0 (точка А), 1, 2, ..., 9, 10 (точка В), а точки, що лежать по інший бік - зеленими цифрами 0 (точка А), 1, 2, ..., 9, 10 (точка В). Тепер перший гравець може симетрично відображати ходи свого суперника щодо хорди АВ, а саме: з'єднувати точки з тими ж номерами, що з'єднав перед цим суперник, але іншого кольору (різнокольорові точки суперник з'єднати не зможе, оскільки в цьому випадку йому доведеться перетнути хорду АВ, що заборонено правилами). ***Відповідь.*** Виграшна стратегія є у початківця.

ІІІ. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. а) В купці лежить 20 олівців. Каляка і Маляка по черзі беруть олівці з купки. За один хід дозволяється взяти від 1 до 4 олівців. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто виграє, якщо починає гру Каляка? б) А якщо за один хід дозволяється брати від 1 до 5 олівців?

Задача 2. Грають двоє. Перший називає довільне ціле число від 2 до 9. Другий помножає це число на довільне ціле число від 2 до 9. Потім перший множить результат на будь-яке ціле число від 2 до 9, і так далі. Виграє той, хто першим отримає добуток більше 1000. Хто при правильній грі виграє - початківець або його партнер?

Задача 3. Двоє по черзі ставлять на шахову дошку тури (за один хід - одну туру), щоб вони не били один одного. (Хто яку туру поставив, не враховується. Не можна ставити туру навіть під бій своєї тури.) Хто не може поставити туру, програє. Хто виграє при правильній грі - перший або другий?

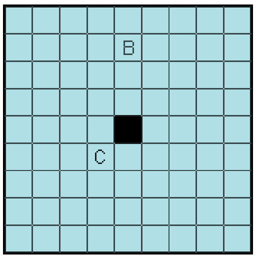
Задача 4. На дошці спочатку написано число 1. Кожним ходом до числа можна додати 3, 5 або 7. Чуня і Проня ходять по черзі так, що після будь-якого ходу Чуні виходять парні числа, а після будь-якого ходу Проні - непарні. Потрібно, щоб всі ці непарні числа були простими. (Просте число - це натуральне число р, яке має рівно два різних дільника: 1 і р. Перші прості числа такі: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 .. .) Мета Проні - назвати число, більше ста. Мета Чуні -

перешкодити Проні. (Якщо першим назве число, більше 100, Чуня, виграє все рівно Проня.) Хто виграє при правильній грі?

Задача 5. Двоє по черзі обривають пелюстки у ромашки, причому за один раз можна обірвати 1 або 2 сусідніх (поруч зростаючих) пелюстки. Виграє той, хто зробить останній хід. Хто виграє при правильній грі?

Задача 6. Соти мають форму квадрата 9 × 9. Всі квадратики, крім центрального, заповнені медом. У центрі - дьоготь. За один хід дозволено розламати соти уздовж будь-якої вертикальної або горизонтальної лінії і з'їсти ту частину, де немає дьогтю. Програє той, кому залишиться тільки дьоготь. а) хто виграє при

правильній грі? б) а якщо дьоготь знаходиться не в центрі, а в клітці В? в) а якщо дьоготь знаходиться в клітці С?



IV. Тести

1. На картатному папері намальований прямокутник 5х9. У лівому нижньому кутку стоїть фішка. Микола і Сергій по черзі пересувають її на будь-яку кількість клітин або вправо, або вгору. Першим ходить Микола. Виграє той, хто поставить фішку в правий верхній кут. Хто виграє при правильній грі?
Виберіть відповідь:
А) Сергій
Б) Микола
В) інша відповідь

2. Аня і Таня виписують 8-значний номер, ставлячи цифри по черзі, починаючи зі старшого розряду. Починає Аня. Чи зможе Таня домогтися, щоб число ділилося на 9?
Виберіть відповідь:
А) зможе
Б) не зможе
В) інша відповідь

3. В ряд розташовані 12 клітин. На самій правій клітині стоїть біла фішка, на самій лівій - чорна. Два гравці по черзі пересувають свою фішку на одне поле -

вперед або назад. (Пропустити хід не можна.) Програвшим вважають того, у кого немає ходу. Хто виграє: перший гравець, хто починав або його партнер?
Виберіть відповідь:

А) перший

Б) другий

В) інша відповідь

4. Є три купки каменів: 10, 15 і 20 каменів відповідно. За хід дозволяється розділити будь-яку купку на дві менші. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто виграє при правильній грі?
Виберіть відповідь:

А) перший

Б) другий

В) інша відповідь

5. Двоє по черзі ставлять по одному коню на шахову дошку. Не можна ставити фігуру під бій раніше (не важливо, самим гравцем або його противником) поставленої фігури. Хто не може зробити хід, програє. Хто переможе при правильній грі?

А) перший

Б) другий

В) інша відповідь

6. У першій купці лежить 100 цукерок, а в другій - 200 цукерок. За хід можна взяти будь-яку кількість цукерок з будь-якої купки. Виграє той, хто взяв останню. Хто виграє при правильній грі?

А) перший

Б) другий

В) інша відповідь

V. Самооцінка учня:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Вдалося отримати результат (рішення, відповідь)?						
Правильно чи з помилкою?						
Самостійно або з чиєюсь						

допомогою?						

Відповіді до тестів:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Б)	**А)**	**Б)**	**Б)**	**Б)**	**А)**

Розв'язки до задач

Задача 1.

Розв'язок. а) Виграшна стратегія для Маляки: якщо Каляка бере а олівців, то наступним ходом Маляка бере (5-а) олівців. Так як після кожної пари ходів кількість олівців у купці зменшується на 5, а 20 ділиться на 5, то через 4 пари ходів Маляка виграє. б) Виграшна стратегія для Каляки: першим ходом взяти 2 олівця, щоб кількість олівців, які залишились, ділились на 6. Наступні ходи Каляка робить за правилом: якщо Маляка бере а олівців, то наступним ходом Каляка бере (6-а олівців). Після триразового застосування цього правила Каляка виграє***. Відповідь.*** а) Виграє Маляка. б) Виграє Каляка.

Задача 2.

Розв'язок. Очевидно, гравець, перед ходом якого вийшло число, що не менше 112 (але менше 1000), виграє. Значить, гравець, який починав з числа, не меншого 55, але меншого 112, програє (будь-який його хід дасть число в проміжку від 112 до 999). Тепер ті числа, із яких одним ходом можна отримати число від 56 до 111 (включно), є виграшними. Це числа від 8 до 55. Нарешті, числа від 4 до 7 - програшні. Таким чином, перший гравець може назвати одне з чисел від 4 до 7, і при правильній грі виграє. ***Відповідь.*** Переможе початківець.

Задача 3.

Вказівка. Результат гри не залежить від того, як ходять суперники.
Розв'язок. Гра закінчиться, коли на дошці будуть стояти 8 тур (справді, якщо тур менше восьми, то існуює хоча б одна вільна від тур горизонталь і хоча б одна вільна вертикаль; на клітку їх перетину можна поставити чергову туру). Таким чином, перемагає другий. (Незалежно від того, як він буде ходити; навіть якщо він захоче програти, але не зважиться порушити правила, у нього це не вийде). ***Відповідь.*** Виграє другий.

Задача 4.

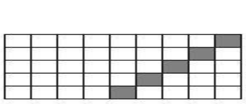
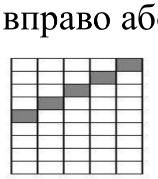
Вказівка І. Якщо до деякого парного числа додати 3, 5 або 7, то вийде одне з трьох послідовних непарних чисел. Знайдіть в першій сотні три послідовних непарних складених числа.
Вказівка ІІ. У першій сотні є лише одна трійка послідовних непарних складених чисел: 91, 93 і 95. Тому єдиний шанс зупинити гру в межах першої сотні - отримати число 88.
Розв'яок. Чуня може незалежно від ходів Проні називати числа 8, 18, 28, 38, ..., 88 (справді, якщо Проня додасть 3, то Чуня додасть 7; якщо 5 - то 5, якщо 7 - то 3). ***Відповідь.*** Чуня..

<u>Задача 5.</u>
Розв'язок. Своїм першим ходом другий гравець може зірвати одну або дві сусідніх пелюстки, так розташованих навпроти зірваної першим гравцем пелюстки (або пелюсток), щоб всі інші пелюстки виявилися розділені на дві однакові групи. Після цього другий гравець зможе здійснювати такі ж ходи, як і перший, але в іншій групі. ***Відповідь.*** Виграє другий.

<u>Задача 6.</u>
Розв'язок. а) Для перемоги другому гравцеві достатньо здійснювати ходи, симетричні ходам суперника щодо центру квадрата. ***Відповідь.*** Виграшна стратегія є у другого гравця.
б) Початківець може своїм першим ходом відламати і з'їсти нижні 6 горизонтальних рядів. Після цього залишиться прямокутник з дьогтем в центрі. Далі працює центрально-симетрична стратегія. ***Відповідь.*** Переможе початківець.
в) Клітка С знаходиться на діагоналі квадрата. Другий гравець може робити розломи вздовж прямих, симетричних прямим, уздовж яких робить розломи перший гравець, щодо цієї діагоналі. Таким чином, після кожного ходу другого гравця буде виходити все менший і менший квадрат, в якому клітина з дьогтем, як і раніше лежить на діагоналі. ***Відповідь.*** Переможе другий гравець.

Розв'язки до тестів

1. Розв'язок. Кожним своїм ходом Микола ставить фішку на одну з кліток зазначеної діагоналі (див.рис). Сергій своїм ходом її звідти прибирає. Оскільки вони ходять тільки вправо або вгору, то коли-небудь гра закінчиться.

Завдання можна також вирішувати з кінця за допомогою аналізу виграшних і програшних позицій. *Відповідь.* Виграє Микола.

2. Розв'язок. При зміні останньої цифри числа від 0 до 9 ми отримаємо 10 послідовних натуральних чисел. Серед будь-яких десяти (і навіть серед будь-яких дев'яти) послідовних натуральних чисел обов'язково є число, що ділиться на 9. Таким чином, Таня може перші три ходи ні про що не думати, а останнім ходом - виграти! Якщо Тані лінь підсумувати сім цифр, вона може вести себе інакше: на кожну написану Анею цифру n відповідати цифрою 9 - n. *Відповідь.* Може.

3. *Вказівка.* Простежте за тим, як змінюється парність відстані між фішками в процесі гри.
Розв'язок. Назвемо відстанню між фішками число порожніх клітин між ними. У початковому положенні воно дорівнює 10. Очевидно, після кожного ходу відстань між фішками збільшується або зменшується на 1, а значить, змінюється парність. Таким чином, після кожного ходу першого гравця відстань буде непарною, тобто між фішками буде хоча б одна клітина і у другого гравця завжди буде можливість піти «вперед» (в напрямку фішки суперника). ***Відповідь.*** Виграє другий гравець.

4. *Розв'язок:* Всього в купках 45 каменів. Гра закінчиться тільки тоді, коли всі камені будуть лежати окремо, тобто буде 45 купок по 1 каменю в кожній. За кожен хід кількість купок збільшується на 1. Спочатку купок 3, повинно вийти 45. Значить, всього буде зроблено 42 ходи. Так як кількість ходів парне, то останнім зробить хід другий гравець. Значить, програє перший гравець. ***Відповідь:*** виграє другий гравець.

5. *Розв'язок:* Для перемоги другому гравцеві достатньо здійснювати ходи, симетричні ходам першого щодо центру дошки. *Відповідь.* Переможе другий.

6. *Розв'язок:* Перший бере з другої купки 100 цукерок, а потім повторює ходи другого, беручи стільки ж цукерок, скільки і другий, але з іншої купки. *Відповідь.*Виграє перший гравець.

Роздатковий матеріал до уроку

Задача 1. *Сидить на узліссі Баба Яга нудьгує. Раптом бачить, йде до неї синок багатого купця нероба Онуфрій.*
- *Добрий день, добрий молодець! Куди йдеш? - запитала Баба Яга.*
- *А мені нудно! Пограємо з тобою в гру, а потім я тобі дорогу покажу, - казала Баба Яга. - І робити тобі особливо нічого не доведеться.*
Є у мене мішок, а в ньому 45 кульок.
- *Кожен із нас по черзі буде виймати з мішка будь-яке число кульок від 1 до 5. Виграє той, хто витягне останню кульку.*
Онуфрій погодився. Хто б гру не починав, Онуфрій не виграв жодного разу. Баба Яга була в захваті і радісно вказала Онуфрію шлях додому!

Яку хитрість знала Баба Яга? Як вона повинна була грати, щоб перемогти в будь-якому випадку?

Задача 2. *Малюк і Фрекен Бок грають в гру. На столі лежать цукерки. Першим ходом Малюк ділить цукерки на три не пусті купки, потім Фрекен Бок віддає дві купки Карлсону, а третю знову ділить на три не пустих, потім Малюк також дві віддає Карлсону, третю ділить і так далі. Хто не зможе зробити хід програє. Хто переможе при правильній грі, якщо на столі: а) 7 цукерок? б) 9 цукерок? в) 12 цукерок? г) 14 цукерок?*

Задача 3. *Мальвіна дала Буратіно завдання: «Порахуй плями в своєму зошиті, додай до їх числа 7, розділи на 8 помнож на 6 і відніми 9. Якщо зробиш все правильно, отримаєш просте число». Буратіно все переплутав. Плями він підрахував точно, але потім помножив їх кількість на 7, відняв з результату 8, потім розділив на 6 і додав 9. Яка відповідь вийшла в Буратіно?*

Задача 4. *В купці 25 каменів. Двоє по черзі беруть з купки 2, 4 або 7 каменів. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто виграє при правильній грі?*

Задача 5. *У рядок виписано 100 одиниць. Кирило та Данило по черзі ставлять між якими-небудь двома сусідніми одиницями знак плюс або мінус. Коли між усіма сусідніми числами поставлені знаки, обчислюється результат. Якщо отримане число парне, то виграє Кирило, в іншому випадку - Данило. Хто виграє, якщо починає Кирило?*

Задача 6. *На дошці написано 10 одиниць і 10 двійок. Двоє грають за такими правилами: за хід дозволяється стерти дві будь-які цифри і, якщо вони були однаковими, написати двійку, а якщо різними - одиницю. Якщо остання залишилася на дошці цифра - одиниця, то виграв перший гравець, якщо двійка - то другий. Хто виграє?*

Задача 7. *Маша і Ваня по черзі ламають шоколадку «Оленка» розміром 6 × 8. За один хід можна зробити прямолінійний розлом будь-якого з шматків уздовж поглиблення. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє, якщо перший розлом робить Маша?*

Задача 8. *Є три купки по 40 каменів. Петро і Василь ходять по черзі, починає Петро. За хід треба об'єднати дві купки, після чого розділити ці камені на чотири купки. Хто не може зробити хід - програв. Хто з гравців (Петро або Василь) може виграти, як би не грав суперник?*

Задача 9. *Прийшовши в школу, Микола і Аліса побачили на дошці напис: "ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА". Вони домовилися зіграти в наступну гру: за один хід в цьому написі дозволяється стерти будь-яку кількість однакових букв, а виграє той, хто стирає останню букву. Першим ходив*

Микола і витер останню букву "А". Як треба грати Алісі, щоб забезпечити собі виграш?

Задача 10. *Остап Бендер провів сеанс одночасної гри в шахи з двома гросмейстерами, причому з одним із суперників він грав чорними фігурами, а з іншим - білими. За цей сеанс Остап отримав 1 очко. (За перемогу в шаховій партії дається 1 очко, за нічию пів-очка, за поразку - 0 очок.) Як він зміг цього добитися?*

Задача 11. *а) Є дві купки по 10 сірників. Двоє по черзі беруть сірники, причому за один хід дозволяється брати будь-яку кількість сірників, але тільки з однієї купки. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє при правильній грі?*
б) а якщо в одній купці 20, а в іншій 30 сірників?

Задача 12. *У рядок написано кілька мінусів. Два гравці по черзі переправляють один або два сусідніх мінуса на плюс. Виграє той, хто переправить останній мінус. Хто виграє при правильній грі, той хто починав або його партнер?*

Додаткові задачі

Інші стратегії (вдала відповідність, рішення з кінця)

Задача 1. *Тура стоїть на полі a1. За хід дозволено зрушити її на будь-яку кількість клітин вправо або на будь-яке число клітин вгору. Виграє той, хто поставить човен на поле h8. У кого є виграшна стратегія?*

Задача 2. *Є а) 2; б) 3 однакові купи каміння. Грають двоє, беруть по черзі будь-яке число каменів з будь-якої купи, але тільки з однієї. Виграє той, хто візьме останні камені. Хто виграє при правильній грі?*

Задача 3. *Грають двоє, по черзі переводять годинникову стрілку на 2 або 3 години вперед. Спочатку годинникова стрілка вказує на 12; переможцем оголошують того, після чийого ходу вона вказала на 6. Хто переможе при правильній грі? (Стрілка може зробити кілька оборотів, перш ніж зупиниться на цифрі 6.)*

Симетричні стратегії

Задача 4. *У кожній клітині дошки 7 × 7 стоїть шашка. Двоє по черзі знімають з дошки будь-яку кількість шашок, які стоять поряд або з одного вертикального, або з одного горизонтального ряду. Виграє той, хто зняв останню шашку. Вкажіть виграшну стратегію для першого гравця.*

Задача 5. *Двоє по черзі кладуть п'ятаки на круглий стіл, причому так, щоб вони не накладалися один на одного. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє при правильній грі?*

Задача 6. *На дощці розміром 7 × 7 двоє по черзі зафарбовують клітини так, щоб вони не мали жодної спільної а) сторони; б) точки. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто виграє при правильній грі?*

Задача 7. *На колі дано 20 точок. Грають двоє. Кожним ходом гравець проводить хорду з кінцями в даних точках так, щоб хорди не перетиналися всередині кола. (Мати загальні кінці хорди можуть.) Програє той, хто не зможе провести хорду. Хто переможе при правильній грі?*

Урок № 11. Тема. Принцип «крайнього»

Мета уроку:

• *освітня:* познайомити учнів з принципом «крайнього» і задачами, що розв'язуються цим методом.
• *розвиваюча*: через розв'язування задач за допомогою правила «крайнього» розвивати вміння аналізувати, систематизувати, узагальнювати.
• *виховна:* за допомогою організації заняття виховувати посидючість, наполегливість в досягненні мети, інтерес до математики.

Рекомендації до уроку
I. Познайомитись з поняттям принцип «крайнього»
II. На прикладах розібрати методи розв'язування задач №1-9
III. На вибір виконати завдання для самостійного розв'язку або виконати тести, відповіді записати в таблицю
IV. Зробити самоаналіз

Хід уроку

I. Принцип «крайнього»

У різних розділах математики зустрічаються задачі, в яких розглядаються сукупності об'єктів з певними властивостями, наприклад: набір чисел, комбінація геометричних фігур і т.д ... В таких наборах зустрічаються об'єкти, що займають особливе (крайнє) положення, наприклад: найбільше, найменше, центральне число , найближча точка, найбільша або найменша геометрична фігура, або фігура, що лежить в стороні від решти. Такі крайні об'єкти несуть важливу інформацію про всю сукупність, і їх треба розглянути в першу чергу. Особливі, крайні об'єкти часто служать «краєкутовим каменем» розв'язку.

Наприклад, окремим випадком принципу крайнього є метод екстремального контрприкладу: припустимо, твердження задачі невірно. Тоді існує екстремальний в деякому сенсі контрприклад. І якщо виявиться, що його можна ще зменшити або збільшити, то вийде шукане протиріччя.

В цьому і полягає принцип (правило) крайнього - розглянь крайній об'єкт в наборі об'єктів. Цей принцип є методом доведення тверджень або розв'язку задач. Розгледіти крайній об'єкт не просто. Іноді існування крайнього очевидно, а іноді вимагає непростого доказу.

Якщо мова в задачі йде про безліч точок на прямій (площині), то правило «розглянь крайнє» радить нам зосередити увагу на самій крайній точці множини. Якщо в задачі фігурує деякий набір чисел, то принцип крайнього рекомендує розглянути найбільше або найменше з чисел.

ІІ. Задачі

Задача 1. *По колу записано 100 чисел, кожне з яких дорівнює середньому арифметичному своїх сусідів. Доведіть, що всі 100 чисел рівні.*

Розв'язок. Розглянемо найбільше із записаних чисел (або одне з них, якщо таких чисел декілька). З того, що воно не менше своїх сусідів і дорівнює їх середньому арифметичному, слідує, що воно дорівнює своїм сусідам. Проводячи аналогічні міркування далі, отримуємо, що все числа рівні.
Примітка. Аналогічно можна було міркувати, розглядаючи спочатку не найбільше, а найменше число.

Задача 2. *Сім грибників зібрали разом 100 грибів, причому ніякі двоє не зібрали однакового числа грибів. Доведіть, що є троє грибників, які зібрали разом не менше 50 грибів.*

Розв'язок. Розташуємо грибників за спаданням кількості знайдених кожним з них грибів і розглянемо трьох перших грібників. Якщо третій зібрав 16 грибів, то разом три грибника зібрали грибів не менш, ніж 16 + 17 + 18 = 51, тоді необхідне доведено.
Якщо третій знайшов максимум 15 грибів, то решта чотири грибника зібрали разом не більше 14 + 13 + 12 + 11 = 50 грибів. Звідси робимо висновок, що перші троє зібрали разом не менше 50 грибів. |

Задача 3. *По колу виписано кілька натуральних чисел, кожне з яких не перевищує одного з сусідніх з ним. Доведіть, що серед цих чисел точно є хоча б два рівних.*

Розв'язок. Розглянемо найбільше з цих чисел (або одне з них, якщо таких чисел декілька). Так як воно не менше і не більше одного зі своїх сусідів, то воно дорівнює йому. Ми знайшли пару рівних чисел.

Задача 4. *8 грибників зібрали 37 грибів. Відомо, що ніякі двоє не зібрали грибів порівну і кожен знайшов хоча б один гриб. Доведіть, що якісь двоє з них зібрали більше, ніж якісь п'ятеро.*

Розв'язок. Пронумеруємо грибників так, щоб перший набрав більше всіх грибів, другий більше серед решти і т.д. Ясно, що перший не міг набрати менше 9 грибів, тому що тоді б всі разом набрали максимум 1 + ... + 8 = 36 <37 грибів.

Також другий не міг набрати менше 7 грибів. Значить, перший і другий разом набрали хоча б 7 + 9 = 16 грибів. З огляду на те, що третій набрав хоча б 6 грибів, то 4-й, 5-й, ..., 8-й набрали разом максимум 37 - 16 - 6 = 15 <16 грибів

Задача 5. *У країні є кілька міст. Божевільний мандрівник їде з міста А в саме далеке від нього місто В. Потім їде в саме далеке від В місто С і т.д. Доведіть, що якщо місто С не збігається з містом А, то мандрівник ніколи не повернеться назад в місто А.*

Розв'язок. Припустимо, що на другому кроці подорожуючий не повернувся в А, тобто місто С відмінне від міста А. Тоді маршрут від А до В коротше маршруту з В в С (оскільки С - найбільш віддалене від В місто). Надалі кожен наступний маршрут буде не коротшим від попереднього, так як кожен раз ми в якості наступного пункту призначення вибираємо найбільш віддалене місто. Нехай на деякому кроці мандрівник все ж таки повернувся в місто А, вийшовши з деякого міста Х. За доведеним, маршрут від Х до А довше маршруту від А до В, а це суперечить тому, що В - найбільш віддалене від А місто.

Задача 6. *У космічному просторі літаюь 2011 астероїдів, на кожному з яких сидить астроном. Всі відстані між астероїдами різні. Кожен астроном спостерігає за найближчим астероїдом. Доведіть, що за одним із астероїдів ніхто не спостерігає.*

Розв'язок. Розглянемо два астероїда А і В, відстань між якими найменша. Астроном на астероїді А дивиться на астероїд В, а астроном на астероїді В дивиться на астероїд А. Якщо знайдеться астроном, який дивиться на астероїд А або В, то знайдеться астероїд на якого ніхто не дивиться. В іншому випадку виключимо з розгляду астероїди А і В. Отримаємо систему з 2011 - 2 = 2009 астероїдів, для яких очевидно виконується умова завдання. Продовжуючи так далі, прийдемо до випадку трьох астероїдів. Вибравши, серед них два, відстань між якими найменша, отримаємо, що на залишений астероїд ніхто не дивиться.

Задача 7. *Гоша задумав чотири невід'ємних числа і порахував їх всі попарні суми (всього 6 штук). Які числа він задумав, якщо ці суми - 1, 2, 3, 4, 5, 6?*

Розв'язок. Нехай Гоша задумав числа $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Усі суми різні, тому найменша з порахованих сум - $c + d$, наступна за нею - $d + b$, також найбільша -$a+b$, а наступна за нею -$a+c$.
Значить, $c + d = 1$, $d + b = 2$, $a + b = 6$, $a + c = 5$.
Тоді $c = 1 - d$, $b - c = 1$, $b = c + 1 = 2 - d$, $a = 5 - c = 4 + d$.
Замітимо, що $a + d = 4 + 2d$ і $b + c = 3 - 2d$ є числа 3 и 4 в деякому порядку. Число d невід'ємно, значить, $a + d \geq 4$ і $b + c \leq 3$, значить, $d = 0$,тоді $c = 1$, $b = 2$, $a = 4$. ***Відповідь*:** 0, 1, 2, 4.

Задача 8. *По колу стоїть 6 чисел; кожне дорівнює модулю різниці двох чисел, що стоять після нього за годинниковою стрілкою. Сума всіх чисел дорівнює 1.*
а) Знайдіть набір чисел, що задовольняє даній умові.
б) Скільки різних таких наборів існує? Рішення, що виходять один з одного поворотом окружності, вважаються однаковими.

Розв'язок. Оскільки кожне з виписаних чисел дорівнює модулю різниці двох інших, а модуль будь-якої величини завжди невід'ємний, то всі числа повинні бути невід'ємні. Нехай найбільше з них одно x. Два наступних за ним числа повинні бути не більше x і відрізнятися на x. Це можливо лише в разі, коли одне з них одно x, а інше - нулю. Отже, в якомусь місці повинні стояти або числа x, x, 0, або числа x, 0, x. Рухаючись по колу проти годинникової стрілки, ми однозначно відновимо інші числа. В обох випадках виходить один і той же набір - x, x, 0, x, x, 0. Із умови, що сума всіх чисел дорівнює 1, знаходимо x = ¼.

Задача 9. *Шеренга солдат називається неправильною, якщо ніякі три поспіль солдата не стоять по зростанню (ні в порядку зростання, ні в порядку убивання). Скільки неправильних шеренг можна побудувати з n солдатів різного зросту, якщо n = 4?*

Розв'язок. Розглянемо найвищого солдата в деякій неправильній шерензі. Доведемо, що після нього можуть стояти не більше двох солдатів. Для цього припустимо противне, що після нього стоять принаймні троє. Якщо вони стоять в порядку зростання, то це суперечить умові неправильності шеренги. Якщо ж якісь двоє з них стоять в порядку спадання, то вони разом з найвищим солдатом утворюють трійку стоячих по зростанню солдат, що знову суперечить умові неправильності шеренги. Отримане в обох випадках протиріччя доводить сформульоване твердження. Аналогічні міркування показують, що і перед найвищим солдатом в неправильній шерензі можуть стояти не більше двох солдатів, і що те ж саме вірно для найнижчого солдата.

Позначимо солдат буквами A, B, C і D (по зростанню). Наведене вище міркування показує, що в неправильній шерензі солдати A і D повинні стояти в середині, а солдати B і C, тим самим, по краях. Таким чином, ми можемо отримати 4 неправильних шеренги: BADC, BDAC, CADB і CDAB.

III. Задачі для самостійного розв'язування

<u>Задача 1.</u> На кожній з 15 планет, відстані між якими попарно різні, знаходиться по астроному, кожен з яких спостерігає за найближчій до нього планетою. Доведіть, що є планета, яку ніхто не спостерігає.

<u>Задача 2.</u> По колу виписано кілька чисел, кожне з яких дорівнює середньому арифметичному своїх сусідів. Доведіть, що всі числа рівні.

<u>Задача 3.</u> На площині синім і червоним кольором забарвлене кілька точок так, що ніякі три точки одного кольору не лежать на одній прямій (точок кожного кольору не менше трьох). Доведіть, що можна знайти трикутник з однокольоровими вершинами, на трьох сторонах якого лежить не більше двох точок іншого кольору.

Задача 4. Вісім тенісистів провели круговий турнір. Доведіть, що можна знайти чотири тенісиста A, B, C, D, таких що тенісист A виграв у B, C, D, тенісист B виграв у C і D, а тенісист C виграв у D.

Задача 5. Доведіть, що числа від 1 до 16 можна записати в рядок, але не можна записати по колу так, щоб сума будь-яких двох сусідніх чисел була квадратом натурального числа.

Задача 6. На площині задана деяка безліч точок A, таких, що кожна з точок безлічі A є серединою відрізка, що з'єднує будь-яку пару точок із тієї ж безлічі. Доведіть, що безліч A містить нескінченно багато точок.

IV. Тести

1. Зайчиха купила для своїх сімох зайчат сім барабанів різних розмірів і сім пар паличок різної довжини. Якщо зайченя бачить, що у нього і барабан більше, і палички довші, ніж у кого-то з братів, він починає голосно барабанити. Яке найбільше число зайчат зможе почати барабанити?

Виберіть відповідь:

А) 17 В) 9
Б) 6 Г) 10

2. На шахівниці стоять кілька тур. Чи обов'язково знайдеться тура, що б'є не більше двох інших? (Перестрибувати через інші фігури тура не може.)

Виберіть відповідь:

А) Так, обов'язково.

Б) Ні

В) Інша відповідь

3. Шеренга солдат називається неправильною, якщо ніякі три поспіль солдата не стоять по зростанню (ні в порядку зростання, ні в порядку убивання). Скільки неправильних шеренг можна побудувати з n солдатів різного зросту, якщо n = 5?

Виберіть відповідь:

А) 50 В) 25
Б) 20 Г) побудувати не можна

4. Маляр-хамелеон ходить по картатій дошці як кульгава тура (на одну клітку по вертикалі або горизонталі). Потрапивши в чергову клітку, він або перефарбовується в її колір, або перефарбовує клітку в свій колір. Білого маляра-хамелеона кладуть на чорну дошку розміром 8 × 8 клітин. Чи зможе він розфарбувати її в шаховому порядку?

Виберіть відповідь:

А) зможе
Б) не зможе
В) інша відповідь

5. В клітинах таблиці 6 * 6 стоять числа так, що кожне число дорівнює середньому арифметичному своїх сусідів. Сума чисел в нижньому рядку дорівнює 30. Чому дорівнює сума чисел у кутових клітинах?

Виберіть відповідь:

А) 17
Б) 36
В) 9
Г) 20

6. На столі лежали дві колоди, по 36 карт в кожній. Першу колоду перетасували і поклали на другу. Потім для кожної карти першої колоди підрахували кількість карт між нею і такою же картою другою колоди (тобто скільки карт між сімірками чірв, між дамами пік, і т.д.). Чому дорівнює сума 36 отриманих чисел?

Виберіть відповідь:

А) 102
Б) 144
В) 1260
Г) 1224

V. Самооцінка учня:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Вдалося отримати результат (рішення, відповідь)?						
Правильно чи з помилкою?						
Самостійно або з чиєюсь допомогою?						

Відповіді до тестів:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Б)	**А)**	**Г)**	**Б)**	**Г)**	**В)**

Розв'язки до задач

Задача 1.

Розв'язок. Відзначимо відразу, що якщо на якусь планету дивляться відразу два астронома, то на якусь планету ніхто не дивиться (так як планет і астрономів однакова кількість). Припустимо тому, що за кожною планетою спостерігає рівно один астроном. Розглянемо дві планети, відстань між якими найменша серед усіх попарних відстаней. Ясно, що астрономи, що знаходяться на цих двох планетах, дивляться один на одного. Подивимося тепер на решту 13 планет. З них знову можна вибрати дві з найменшою відстанню - астрономи, що знаходяться на них, повинні дивитися один на одного. Продовжуючи такі міркування, ми знайдемо планету, яку ніхто не спостерігає (так як число 15 непарне).

Задача 2

Розв'язок. Розглянемо максимальне з цих чисел. З одного боку, воно не менше кожного із своїх сусідів, а з іншого боку, так само дорівнює їх середньому арифметичному. Тому це число має дорівнювати кожному із своїх сусідів. Аналогічним чином продовжуючи розглядати наступних сусідів, доводимо, що всі числа, які стоять по колу, рівні між собою.

Задача 3.

Розв'язок. З усіх трикутників із однокольоровими вершинами виберемо трикутник найменшої площі. Припустимо, що на його сторонах розташоване не менш трьох точок іншого кольору. Так як вони не можуть всі лежати на одному боці цього трикутника, то ці три точки є вершинами деякого трикутника, площа якого, очевидно, менше площі спочатку обраного трикутника, а це суперечить тому, що той трикутник мав найменшу площу з усіх трикутників з одноколірними вершинами .

Задача 4.

Розв'язок. З усіх тенісистів виберемо який виграв найбільшу кількість ігор (або одного з таких, якщо їх було кілька) і назвемо його А. Він виграв принаймні у чотирьох осіб (так як всього було зіграно $7 \cdot 4 = 28$ ігор, то за принципом Діріхле знайдеться учасник, який здобув не менше чотирьох перемог). Розглянемо тепер підтурнір між цими чотирма тенісистами без урахування ігор з іншими. Один з них (назвемо його В) виграв хоча б у двох інших (всього було зіграно $3 \cdot 2 = 6$ ігор, значить, хтось переміг хоча б два рази). З цих двох один - тенісист С - виграв у іншого - D.

Задача 5.

Розв'язок. Якщо поруч із 16 стоїть число х, то $16+1 \leq 16+x=a^2 \leq 16+15$, звідки $a^2=25$ та $x=9$. Тому у 16 не може бути більше одного сусіда, і умова, яка задовольняє розташування чисел по колу, неможлива. Приклад розташування в рядок: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

Задача 6.

Розв'язок. Розглянемо саму ліву нижню точку безлічі A. Нехай це буде точка B. Але якщо точка B найлівіша і нижня, то вона не може бути серединою відрізка з безлічі A. Звідси випливає, що безліч A містить нескінченно багато точок.

Розв'язки до тестів

1. ***Розв'язок.*** Всі зайчата барабанити не можуть, так як свідомо не буде барабанити зайченя, якому дістанеться найменший барабан. З іншого боку, якщо дати цьому ж зайчонку найкоротші палички, то всі інші зайчата будуть барабанити. ***Відповідь:*** 6 зайченят.

2. ***Розв'язок.*** Розглянемо саму верхню туру, якщо таких декілька, то ту, яка лівіша з них . Тоді вище і лівіше цієї тури немає інших тур, значить, вона б'є не більше двох інших. ***Відповідь.*** Так, обов'язково.

3. ***Розв'язок.*** Розглянемо найвищого солдата в деякій неправильній шерензі. Доведемо, що після нього можуть стояти не більше двох солдатів. Для цього припустимо противне, що після нього стоять принаймні троє. Якщо вони стоять в порядку зростання, то це суперечить умові неправильності шеренги. Якщо ж якісь двоє з них стоять в порядку спадання, то вони разом з найвищим солдатом утворюють трійку стоячих по зростанню солдат, що знову суперечить умові неправильності шеренги. Отримане в обох випадках протиріччя доводить сформульоване твердження. Аналогічні міркування показують, що і перед найвищим солдатом в неправильній шерензі можуть стояти не більше двох солдатів, і що те ж саме вірно для найнижчого солдата.

З наведеного вище міркування випливає, що в неправильній шерензі з п'яти солдатів найвищий повинен стояти посередині (на третьому місці), те ж саме можна стверджувати і про найнижчого. Значить, неправильної шеренги з п'яти солдатів побудувати не можна.

4. ***Підказка.*** Розгляньте момент, коли була перефарбована остання клітина. ***Розв'язок.*** Припустимо, що перефарбувати в шаховому порядку вдалося. Розглянемо останню перефарбовану клітку. Припустимо, вона стала чорною. Тоді всі її сусіди - білі. Маляр прийшов на неї, будучи білим, значить, не міг перефарбувати її в чорний колір. ***Відповідь.*** Не зможе.

5. Розв'язок. Розглянемо найбільше число, написане в таблиці. Всі його сусіди не більше нього, тому, якщо хоч одне з сусідніх чисел менше обраного числа, то і середнє арифметичне сусідів буде менше обраного, що суперечить умові завдання. Значить, всі сусіди цього числа рівні цьому числу, і їх сусіди теж їм рівні. Отримуємо, що все числа рівні. 6 чисел в нижньому рядку рівні по 30: 6 = 5, значить сума чисел у кутових клітинах дорівнює 20. ***Відповідь.*** 20.

6. *Розв'язок.* Розглянемо окремо, скільки разів була підрахована кожна карта у верхній і в нижній колоді. У верхній колоді сама верхня картка не була підрахована жодного разу, так як вона не знаходиться між будь-якими картами. Друга зверху карта була підрахована один раз, так як знаходиться між однією парою однакових карт: верхньої картою верхньої колоди і такою же картою нижньої колоди. Наступна карта зверху підрахована два рази, і так далі, тобто N -а зверху карта верхньої колоди була підрахована N - 1 раз, так як знаходиться між N - 1 парою однакових карт. Таким чином, шукана сума дорівнює (0 + 1 + 2 + ... + 35) • 2 = 1260.

Роздатковий матеріал до уроку

Задача 1. *По колу записано 100 чисел, кожне з яких дорівнює середньому арифметичному своїх сусідів. Доведіть, що всі 100 чисел рівні.*

Задача 2. *Сім грибників зібрали разом 100 грибів, причому ніякі двоє не зібрали однакового числа грибів. Доведіть, що є троє грибників, які зібрали разом не менше 50 грибів.*

Задача 3. *По колу виписано кілька натуральних чисел, кожне з яких не перевищує одного з сусідніх з ним. Доведіть, що серед цих чисел точно є хоча б два рівних.*

Задача 4. *8 грибників зібрали 37 грибів. Відомо, що ніякі двоє не зібрали грибів порівну і кожен знайшов хоча б один гриб. Доведіть, що якісь двоє з них зібрали більше, ніж якісь п'ятеро.*

Задача 5. *У країні є кілька міст. Божевільний мандрівник їде з міста А в саме далеке від нього місто В. Потім їде в саме далеке від В місто С і т.д. Доведіть, що якщо місто С не збігається з містом А, то мандрівник ніколи не повернеться назад в місто А.*

Задача 6. *У космічному просторі літають 2011 астероїдів, на кожному з яких сидить астроном. Всі відстані між астероїдами різні. Кожен астроном* *спостерігає за найближчим астероїдом. Доведіть, що за одним із астероїдів ніхто не спостерігає.*

Задача 7. *Гоша задумав чотири невід'ємних числа і порахував їх всі попарні суми (всього 6 штук). Які числа він задумав, якщо ці суми - 1, 2, 3, 4, 5, 6?*

Задача 8. *По колу стоїть 6 чисел; кожне дорівнює модулю різниці двох чисел, що стоять після нього за годинниковою стрілкою. Сума всіх чисел дорівнює 1.*
а) Знайдіть набір чисел, що задовольняє даній умові.
б) Скільки різних таких наборів існує? Рішення, що виходять один з одного поворотом окружності, вважаються однаковими.

Задача 9. *Шеренга солдат називається неправильною, якщо ніякі три поспіль солдата не стоять по зростанню (ні в порядку зростання, ні в порядку убивання). Скільки неправильних шеренг можна побудувати з n солдатів різного зросту, якщо n = 4?*

Урок № 12 .Тема. Пошук закономірностей.

Я повторюю шлях земний колишніх існувань людських:
ніщо не ново під місяцем, крім моїх переживань.
І. Губерман

Мета уроку: створення умов для розвитку пізнавальної сфери, а також формування пізнавального інтересу в учнів за допомогою включення їх в пошук закономірностей.

Завдання уроку:
Навчальні: Актуалізація знань і розширення уявлень про порівняння понять.
• Закріплення вмінь у визначенні узагальнюючих слів і навичок знаходження істотних ознак.
• Вчити проводити класифікацію понять і встановлювати закономірності.
• Відпрацювання вміння розв’язувати логічні завдання.
Розвиваючі: Розвиток вміння цілеспрямовано сприймати інформацію (в тому числі із засобів масової інформації), аналізувати її, робити на її основі висновки.
•Розвиток пізнавальної сфери (сприйняття, слухової і зорової уваги, спостережливості, пам'яті, логічного мислення).
• Розвиток допитливості, кмітливості при виконанні завдань проблемного та евристичного характеру.
• Розвиток комунікативних умінь
Виховні: Стимулювання внутрішньої мотивації на вивчення математики - як необхідна умова для саморозвитку.
• Створення умов для формування пізнавального інтересу.

Рекомендації до уроку
І. Познайомитись з поняттям «математична закономірність»
ІІ. На прикладах розібрати методи розв’язування задач №1-10
ІІІ. На вибір виконати завдання для самостійного розв’язку або виконати тести, відповіді записати в таблицю
ІV. Зробити самоаналіз

Хід уроку

І. «Математична закономірність»
Математична закономірність - це певне правило, за яким в числовому, фігурному або іншому ряду елементів відбувається повторення або зміна самих елементів або їх властивостей відповідно до заданого правила.

Під ***числовою закономірністю*** ми розуміємо стійкий взаємозв'язок між числовими об'єктами (числа в ряду чисел, вирази в ряду виразів і т. п.). Так, наприклад, моделювання процесу виявлення закономірності побудови числового ряду вимагає виконання наступних операцій: порівняння запропонованих об'єктів, знаходження в них загального (схожого) і різного (порівняльні ознаки), узагальнення результатів порівняння і формулювання висновку (повне узагальнення), в результаті якого відбувається абстрагування від конкретних особливостей кожного окремого об'єкта та повне їх порівняння. Якщо закономірність знайдена (розкрита), то на її основі робиться загальний висновок (формулювання загального правила) і вже з використанням знайденої закономірності (знайденого правила) триває числовий ряд.

Загальна схема роботи (система питань) із завданнями на пошук числових закономірностей може виглядати так: Чим схожі об'єкти? Як на висновок впливає схожість? Чим вони відрізняються? Як на висновок впливає порівняння? Яким чином вони відрізняються? (Окремо за кожною ознакою) Який загальний висновок можна зробити? Третє питання дозволяє учням виділити якусь одну ознаку і повністю абстрагуватися при цьому від усіх інших ознак, що в свою чергу дає їм можливість без будь-яких ускладнень сформулювати адекватний висновок про числову закономірность.

Числові закономірності можна розбити на наступні групи:
1. Числові закономірності з використанням дії ділення і (або) множення
а) Закономірності з використанням правила ділення із залишком
б) Закономірності з використанням окремих випадків ділення та (або) множення
 * Закономірності з використанням дії ділення і (або) множення на ступінь десяти
 * Закономірності з використанням властивостей ділення і (або) множення
  - Закономірності порівняння виразів з використанням властивостей ділення
2. Числові закономірності з використанням дій над величинами
3. Числові закономірності на виявлення правила побудови числового ряду
 а) Закономірності на виявлення правила побудови ряду чисел
 б) Закономірності на виявлення правила побудови ряду величин

ІІ. Задачі на пошук закономірностей

Задача 1. *Переконайтеся, що а) 1/3 = 0, (3); б) 1/6 = 0,1 (6);*
в) 7/30 = 0,2 (3); г) 7/11 = 0, (63).

Вказівка. Виконайте ділення «куточком»!

Задача 2. *Знайдіть соту цифру після коми десяткового запису числа 1/7.*

Вказівка. 1/7 = 0, (142857). Залишилося помітити, що число 100 при діленні на 6 дає залишок 4, а на четвертому місці після коми в цьому прикладі знаходиться цифра 8.
Відповідь. 8.

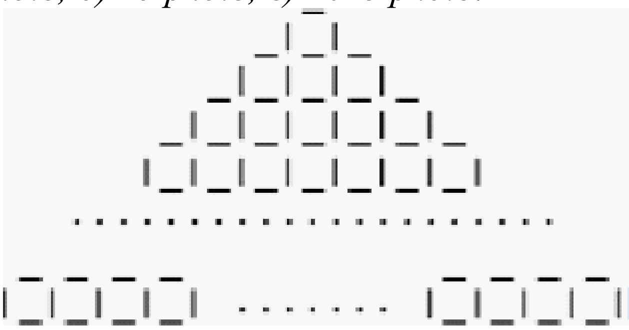
Задача 3. *Знайдіть суму: а) всіх натуральних чисел від 1 до 50;*
б) всіх двозначних чисел;
Розв'язок. а) Позначимо шукану суму S:
S = 1 + 2 + 3 + ... + 50
Потім запишемо ту ж суму в зворотному порядку:
S = 50 + 49 + 48 + ... + 1
Напишемо ці формули одну під одній і «додамо в стовпчик», додаючи доданки, написані один під одним:
S = 1 + 2 + 3 + ... + 50
S = 50 + 49 + 48 + ... + 1
2S = 51 + 51 + 51 + ... + 51
В останній сумі 50 доданків (як і у вихідній сумі), тому 2S = 51 • 50,
звідси S = 51 • 50: 2 = 1275.
б) Розв'язуємо аналогічно пункту а:
S = 10 + 11 + 12 + ... + 99
S = 99 + 98 + 97 + ... + 10
2S = 109 + 109 + 109 + ... + 109
В останній сумі 90 доданків (саме стільки існує двозначних чисел і саме стільки доданків у вихідній сумі), тому 2S = 109 • 90, звідки S = 109 • 90: 2 = 4905.
Відповідь. а) 1275; б) 4905;

Задача 4. *Чи ділиться на 2013 сума 1 + 2 + 3 + ... + 2013?*
Розв'язок. Отримаємо більш простий вислів для шуканої суми, діючи за аналогією з задачею 3.
S = 1 + 2 + 3 + ... + 2013
S = 2013 + 2012 + 2011 + ... + 1
2S = 2014 + 2014 + 2014 + ... + 2014
В останній сумі 2013 доданків (як і у вихідній сумі), тому 2S = 2014 • 2013, звідки S = 2014 • 2013: 2 = 1007 • 2013. З останній рівності випливає, що сума S ділиться на 2013.
Відповідь. Ділиться.

Задача 5. Знайдіть суму: а) всіх непарних чисел від 1 до 100;
б) всіх натуральних чисел від 1 до 150, що діляться на 3;
Розв'язок. Будемо розв'язувати цю задачу за аналогією з задачею 3.
а) Позначимо шукану суму S:
S = 1 + 3 + 5 + ... + 99
S = 99 + 97 + 95 + ... + 1

2S = 100 + 100 + 100 + ... + 100
В останній сумі 50 доданків (як і у вихідній сумі: серед 100 чисел від 1 до 100 рівно половина непарних), тому 2S = 100 • 50, звідки S = 100 • 50: 2 = 2500.
б) розв’язуємо аналогічно пункту а:
S = 3 + 6 + 9 + ... + 150
S = 150 + 147 + 144 + ... + 3
2S = 153 + 153 + 153 + ... + 153
В останній сумі 150: 3 = 50 доданків (як і у вихідній сумі: серед 150 чисел від 1 до 150 рівно третина ділиться на 3), тому 2S = 153 • 50, звідки S = 153 • 50: 2 = 3825.
Відповідь. а) 2500; б) 3825;

Задача 6. *На картатному папері намальована фігура (див. рисунок): у верхньому ряду - одна клітинка, в другому зверху - три клітинки, в наступному ряду - 5 клітинок, і так далі. Скільки всього в цій фігурі клітинок, якщо в ній: а) 5 рядів; б) 25 рядів; в) 2013 рядів?*

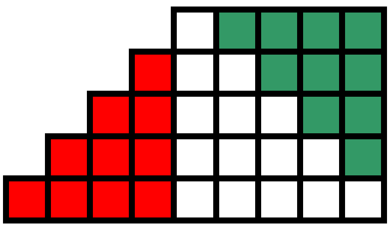


Розв’язок. Число клітин в k-му ряду фігури одно k-му непарному числу. Значить, площа такої фігури з n рядів дорівнює сумі перших n непарних чисел.

а) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.

б) двадцять п'яте непарне число - це число 49. Аналогічно пункту а) обчислимо, що 1 + 3 + 5 + ... + 49 = (1 + 49) • 25: 2 = 252 = 625.

в) Зауважимо, що число клітин в такій фігурі завжди дорівнює квадрату числа рядів. Це найлегше помітити геометрично (див. рисунок нижче).



Для цього частину фігури, зафарбовану червоним, відріжемо і прикладемо до фігури з іншого боку (частина, зафарбована зеленим). В результаті вийде квадрат, число клітин в стороні якого дорівнює кількості рядів у вихідній фігурі. Площа цього квадрата, з одного боку, дорівнює площі вихідної фігури, а з іншого боку, дорівнює квадрату кількості рядів у вихідній фігурі. Зокрема, якщо фігура складається з 2013 рядів, то кількість клітин в ній так само 20132 = 4052169.

Можна отримати той же результат і інакше. Зауважимо, що k є непарне число, яке дорівнює (2k-1) (перевірте!). Таким чином, якщо фігура складається з n рядів, число клітин в ній дорівнює сумі непарних чисел від 1 до (2n-1). Обчислимо цю суму:

$$S = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)$$
$$S = (2n-1) + (2n-3) + (2n-5) + ... + 1$$
$$2S = 2n + 2n + 2n + ... 2n = 2n \bullet n$$
$$S = n \bullet n = n2.$$

Висновок: Послідовність Фібоначчі - така послідовність натуральних чисел, в якій перші два числа - одиниці, а кожне наступне число дорівнює сумі двох попередніх: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Відповідь. а) 52 = 25; б) 252 = 625; в) 20132 = 4052169.

Задача 7. *Хтось придбав пару кроликів і помістив їх у загін. Скільки кроликів буде в загоні через рік, якщо вважати, що кожен місяць пара дає в якості приплоду нову пару кроликів, які з другого місяця життя також починають приносити приплід?*

Розв'язок. Кожна пара, яка народилася два місяці тому, в поточному місяці дає одну нову пару. Кожна пара, яка народилася місяць тому, в поточному місяці приплоду не дає, але у неї є пара батьків, які в поточному місяці теж дадуть одну нову пару. Інших нових пар кроликів не буде. Тому кількість нових пар в поточному місяці дорівнює кількості нових пар минулого місяця плюс кількість нових пар в позаминулому місяці. Таким чином, число пар кроликів, що народилися в кожному місяці, утворюють послідовність Фібоначчі. Щоб отримати відповідь, потрібно скласти перші 12 чисел Фібоначчі і ще додати до цього одну пару, яку купили спочатку. Отримаємо 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 + 1 = 377 пар.

Відповідь. 377 пар.

Задача 8. *а) Скільки є способів розрізати смужку 2 × 3 на доміношки 1 × 2? Те ж питання для полоси: б) 2 × 4; в) 2 × 5. Смужки можна перевертати.*
г) Даша порахувала число способів розрізання для смужки 2 × 2013 і відняла з нього число способів розрізання для смужки 2 × 2012. А Таня вважала число способів розрізання для смужки 2 × 2011. У кого з них в результаті вийшло більше число?

Розв'язок. а) Очевидно, що смужку 2 × 1 можна розрізати на доміношки одним способом, а смужку 2 × 2 - двома. Далі, якщо від смужки 2 × 3 спочатку відрізати одну вертикальну доміношку, залишиться смужка 2 × 2, яку можна розрізати одним із двох способів (як ми відзначили вище). Якщо ж від смужки 2 × 3 спочатку відрізати дві горизонтальні доміношки, залишиться прямокутник 2

× 1, який можна розрізати одним способом. Разом смужку 2 × 3 можна розрізати 2 + 1 = 3 способами.
б) Аналогічно зробимо зі смужкою 2 × 4. Або ми спочатку відрізаємо одну вертикальну доміношку, і залишається прямокутник 2 × 3, який можна розрізати п'ятьма способами, або ми спочатку відрізаємо дві горизонтальні доміношки, і залишається прямокутник 2 × 2, який можна розрізати трьома способами. Разом смужку 2 × 4 можна розрізати на доміношки 5 + 3 = 8 способами.
в) Міркуючи таким же чином, як в пунктах а і б, порахуємо, що смужку 2 × 5 можна розрізати 8 + 5 = 13 способами.
Доведемо, що (число способів розрізати смужку 2 × 2013) = (число способів розрізати смужку 2 × 2012) + (число способів розрізати смужку 2 × 2011). Справді, якщо спочатку відрізати від смужки 2 × 2013 одну вертикальну доміношку, залишиться смужка 2 × 2012, яку ще треба розрізати; якщо ж спочатку відрізати дві горизонтальні доміношки, залишиться розрізати смужку 2 × 2011. А з цього випливає, що Даша і Таня в результаті отримали одне й те саме число.
Відповідь. а) 3; б) 5; в) 8; г) у них вийшли однакові числа.

Задача 9. *Чи може сума перших кількох поспіль натуральних чисел закінчуватися цифрою 7?*

Розв'язок. Обчислимо суму перших n поспіль натуральних чисел:

$S = 1 + 2 + 3 + ... + n$

$S = n + (n-1) + (n-2) + ... + 1$

$2S = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + ... (n + 1) = n \bullet (n + 1)$

$S = n \bullet (n + 1): 2.$

Щоб це число закінчувалося цифрою 7, вдвічі більше число n • (n + 1) повинно закінчуватися цифрою 4 (так як остання цифра числа 2 • 7 = 14 дорівнює 4). Остання цифра добутку двох чисел дорівнює останній цифрі добутку їх останніх цифр (згадайте правило множення в стовпчик). Користуючись цим міркуванням, складемо таблицю:

Остання цифра числа n	Остання цифра числа $(n+1)$	Остання цифра числа $n \cdot (n+1)$
0	1	0
1	2	2
2	3	6
3	4	2
4	5	0
5	6	0
6	7	2

7	8	6
8	9	2
9	0	0

В останньому стовпці цієї таблиці ніде не зустрічається цифра 4. Значить, число n • (n + 1) ні за яких n не може закінчуватися цифрою 4, а число

n • (n + 1): 2 ні за яких n не може закінчуватися цифрою 7.

Відповідь. Не може.

Задача 10. *а) Льоша піднімається по сходах із 10 сходинок. За один крок він піднімається вгору або на одну сходинку, або на дві сходинки. Скількома способами Льоша може піднятися по цих сходах? б) При спуску з тих же сходах Льоша перестрибує через деякі сходинки (може навіть через всі 10). Скількома способами він може спуститися по цих сходах?*

Розв'язок. а) Позначимо через a_n число способів піднятися на сходи з n сходинок, дотримуючись умов завдання. Очевидно, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Нехай Льоша застрибує на сходи з n> 2 сходинок. Якщо перший стрибок був на дві сходинки, то йому залишилося застрибнути на (n - 2) сходинки, і число способів закінчити підйом дорівнює a_{n-2}. Якщо ж перший стрибок був на одну сходинку, то число способів закінчити підйом дорівнює a_{n-1}. Звідси, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Тому числа a_n утворюють послідовність Фібоначчі: $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$.

б) Кожну з 9 сходинок (крім останньої) Льоша може або перестрибнути, або не перестрибнути незалежно від того, на яких з верхніх сходинок він зупинявся. Тому кількість способів спуститися сходами дорівнює $2^9 = 512$.

Відповідь. а) 89; б) $2^9 = 512$.

Додаткові задачі

Задача 1. *Продовжіть наступну послідовність літер: В Ж Л Г С Л Б ...*

Розв'язок. Тут використана послідовність перших букв в назві місяців року, починаючи з вересня: Вересень, Жовтень, Листопад, Грудень, Січень, Лютий, Березень. Отже, наступною буквою буде «К» - Квітень.
Відповідь: К

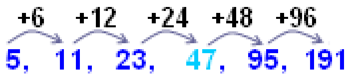
Задача 2. *Встановіть, за яким принципом побудована дана послідовність:*
8 2 9 0 1 5 7 3 4 6

Відповідь: Все цифри слідують один за одним відповідно до алфавітного порядку їх назв (вісім, два, дев'ять, нуль і т.д.).

Задача 3. *Вам необхідно з'ясувати закономірність, за якою цифри стоять в даній послідовності і вказати цифру, яка повинна продовжити дану послідовність:*
2 1 9 7 6 4 0 8 ...

Розв'язок. Розв'язок пов'язаний з алфавітним порядком назв цифр, тільки не по першій букві, а по другий (якщо другі однакові, то по третій).
Відповідь: Цифра 3.

Задача 4. *Знайдіть закономірність і запишіть відсутнє число: 5, 11, 23, ..., 95, 191*



Відповідь: 47.

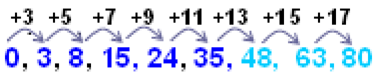
Задача 5. *Знайдіть закономірність і запишіть наступні три числа: 1, 8, 27, 64, ...*

Розв'язок. Дані числа - це куби послідовних чисел 1^3, 2^3, 3^3, 4^3.
Звідси, наступні три числа - це $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$.
Відповідь: 125, 216, 343.

Задача 6. *Знайдіть закономірність і запишіть наступні три числа: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...*

Розв'язок. Кожне наступне число дорівнює сумі двох попередніх чисел.
Відповідь: 13, 21, 34.

Задача 7. *Знайдіть закономірність і запишіть наступні три числа: 0, 3, 8, 15, 24, 35, ...*

Розв'язок. 

Відповідь: 48, 63, 80.

III. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Яке число має стояти в порожній клітинці, якщо числа, які стоять у другому рядку деяким чином пов'язані з відповідними над ними числами першого рядка?

4	5	6	7	8	9
61	52	63	94	46	

<u>Задача 2.</u> Спробуйте зрозуміти, за яким правилом сформовані числові послідовності і запишіть наступне число

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
1113213211

<u>Задача 3.</u> Яке число стане продовженням наступного ряду:
1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, ... Чи з'явиться в даному ряду число 5?

<u>Задача 4.</u> Будемо вважати пальці на руці таким чином: нехай 1-м буде великий, 2-м - вказівний, 3-м - середній, 4-м - безіменний, 5-м - мізинець, 6-м - знову безіменний, 7-м - середній, 8-м - вказівний, 9-м - великий, 10-м - вказівний, і так далі. Який палець буде 2017-им?

<u>Задача 5.</u> Знайдіть суму всіх чотиризначних чисел.

<u>Задача 6.</u> Знайдіть суму всіх натуральних чисел, що не перевищують 80 і діляться на 6 із залишком 1.

IV. Тести

1. Вам необхідно з'ясувати закономірність, за якою цифри стоять в даній послідовності і визначити цифру, яка повинна стояти замість знака.
1 = 4, 2 = 3, 3 = 3, 4 = 6, 5 = 4, 6 = 5, 7 = 3, 8 =?

Виберіть відповідь:

А) 4 В) 5
Б) 6 Г) 3

2. Нижче вказана послідовність літер. Не існує правила порядку, за яким дана послідовність складена. Однак для повноти не вистачає двох букв, назвіть ці дві букви? Л С Б Г К Ж Т В Ч Л

Виберіть відповідь:

А) А, Д В) В, Б
Б) Л, С Г) К, М

3. Знайдіть закономірність і запишіть четверте число, завершивши ряд: 88, 64, 24, ...

Виберіть відповідь:
А) 12 В) 16
Б) 6 Г) 8

4. Знайдіть закономірність і запишіть п'яте число, закінчивши ряд: 77, 49, 36, 18, ...

Виберіть відповідь:
А) 8 В) 12
Б) 2 Г) 6

5. Знайдіть закономірність і запишіть наступні три числа: 3, 5, 9, 17, ...

Виберіть відповідь:
А) 34, 66, 130 В) 22, 55, 119
Б) 33, 65, 129 Г) 11, 56, 129

6. Знайдіть закономірність і продовжите ряд чисел: 1, 3, 2, 6, 4, 12, 8, ...

Виберіть відповідь:
А) 24, 16, 48, 32 В) 42, 61, 84,92
Б) 9, 18, 32, 64 Г) 18, 20, 22, 24

V. Самооцінка учня:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Вдалося отримати результат (рішення, відповідь)?						
Правильно чи з помилкою?						
Самостійно або з чиєюсь допомогою?						

Відповіді до тестів:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
В)	**Б)**	**Г)**	**А)**	**Б)**	**А)**

Розв'язки до задач

Задача 1.

Відповідь: 18. (У нижньому рядку стоять квадрати чисел верхнього рядка, записані в зворотному порядку)

Задача 2.

Розв'язок. Кожне наступне число описує одне попереднє. Наприклад: число у другому рядку «11» каже, що в попередньому рядку одна одиниця (1 (одна) 1 (одиниця)); число в третьому рядку «21» каже, що в попередньому рядку дві одиниці або 2 (дві) 1 (одиниці); число в четвертому рядку «1211» говорить, що в попередньому рядку одна двійка і одна одиниця або 1 (одна) 2 (двійка) 1 (одна) 1 (одиниця). І так далі.

Відповідь: 31131211131221.

Задача 3.

Розв'язок. Даний ряд заснований на кількості символів в римському поданні чисел.

Римські числа - це букви латинського алфавіту:

1 - I, 2 - II, 3 - III, 4 - IV, 5 - V і т. д.

Наступне число буде 3 - це XVI (16).

І число 5 в цій послідовності буде - це 18 = XVIII в ньому п'ять латинських букв.

Відповідь: 3, число 5 з'явиться.

Задача 4.

Вказівка. Пальці будуть повторюватися з періодом 8, тому досить розглянути залишок від ділення 2017 на 8.

Відповідь. Вказівний.

Задача 5.

Розв'язок. S = 1000 + 1001 + 1002 + ... + 9999

S = 9999 + 9998 + 9997 + ... +1000

2S = 1099 + 1099 + 1099 + ... + 1099

В останній сумі 9000 доданків (саме стільки існує чотиризначних чисел і саме стільки доданків у вихідній сумі), тому 2S = 1099 • 9000,

звідки S = 1099 • 9000 2 = 49495500.

Відповідь. 49495500

Задача 6.

Розв'язок.

S = 1 + 7 + 13 + ... + 79

S = 79 + 73 + 67 + ... + 1

2S = 80 + 80 + 80 + ... + 80

В останній сумі 14 доданків (як і у вихідній сумі: неповні частки від ділення цих чисел на 6 рівні, слідовно, 0, 1, 2, ..., 13), тому 2S = 80 • 14, звідси

S = 80 • 14 : 2 = 560.

Зверніть увагу: оскільки 1 = 6 • 0 + 1, число 1 теж ділиться на 6 із залишком 1 (і неповною часткою 0).

Відповідь. 560.

Розв'язки до тестів

1. Розв'язок. Кожна перша цифра - це порядкова цифра, а цифра після рівності вказує кількість букв, з яких складається назва цифри. Наприклад, 1 = «один» (4 букви), 2 = «три» (3 літери) і т.д.

Відповідь: Цифра «5». В)

2. Розв'язок. Група букв складається з перших букв назв місяців в році. Всі вони розташовані хаотично, але для повноти не вистачає ще двох букв (адже їх повинно бути 12).

Відповідь: Літери «Л» і «С». Б)

3. Розв'язок. Кожне наступне число дорівнює добутку цифр попереднього числа.

64 = 8 * 8, 24 = 6 * 4. Звідси, четверте число дорівнюватиме 2 * 4 = 8.

Відповідь: 8. Г)

4. Розв'язок. Кожне наступне число дорівнює добутку цифр попереднього числа.

49 = 7 * 7, 36 = 4 * 9, 18 = 3 * 6. Значить, п'яте число дорівнюватиме 1 * 8 = 8.

Відповідь: 8. А)

5. Відповідь: 33, 65, 129. Б)

6. *Розв'язок.* на непарних місцях стоять числа, які отримані множенням попереднього числа на 2, на парних місцях числа також отримують множенням на два.
Відповідь: 24, 16, 48, 32, ... А)

Роздатковий матеріал до уроку

Задача 1. *Переконайтеся, що а) 1/3 = 0, (3); б) 1/6 = 0,1 (6);*
в) 7/30 = 0,2 (3); г) 7/11 = 0, (63).

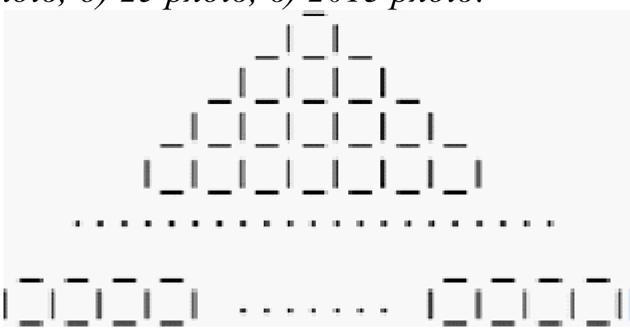
Задача 2. *Знайдіть соту цифру після коми десяткового запису числа 1/7.*

Задача 3. *Знайдіть суму: а) всіх натуральних чисел від 1 до 50;*
б) всіх двозначних чисел;

Задача 4. *Чи ділиться на 2013 сума 1 + 2 + 3 + ... + 2013?*

Задача 5. Знайдіть суму: а) всіх непарних чисел від 1 до 100;
б) всіх натуральних чисел від 1 до 150, що діляться на 3;

Задача 6. *На картатному папері намальована фігура (див. рисунок): у верхньому ряду - одна клітинка, в другому зверху - три клітинки, в наступному ряду - 5 клітинок, і так далі. Скільки всього в цій фігурі клітинок, якщо в ній:*
а) 5 рядів; б) 25 рядів; в) 2013 рядів?



Задача 7. *Хтось придбав пару кроликів і помістив їх у загін. Скільки кроликів буде в загоні через рік, якщо вважати, що кожен місяць пара дає в якості приплоду нову пару кроликів, які з другого місяця життя також починають приносити приплід?*

Задача 8. *а) Скільки є способів розрізати смужку 2 × 3 на доміношки 1 × 2? Те ж питання для полоси: б) 2 × 4; в) 2 × 5. Смужки можна перевертати.*
г) Даша порахувала число способів розрізання для смужки 2 × 2013 і відняла з нього число способів розрізання для смужки 2 × 2012. А Таня вважала число способів розрізання для смужки 2 × 2011. У кого з них в результаті вийшло більше число?

Задача 9. *Чи може сума перших кількох поспіль натуральних чисел закінчуватися цифрою 7?*

Задача 10. *а) Льоша піднімається по сходах із 10 сходинок. За один крок він піднімається вгору або на одну сходинку, або на дві сходинки. Скількома способами Льоша може піднятися по цих сходах? б) При спуску з тих же сходах Льоша перестрибує через деякі сходинки (може навіть через всі 10). Скількома способами він може спуститися по цих сходах?*

Додаткові задачі

Задача 1. *Продовжіть наступну послідовність літер: В Ж Л Г С Л Б ...*

Задача 2. *Встановіть, за яким принципом побудована дана послідовність:*
8 2 9 0 1 5 7 3 4 6

Задача 3. *Вам необхідно з'ясувати закономірність, за якою цифри стоять в даній послідовності і вказати цифру, яка повинна продовжити дану послідовність:*
2 1 9 7 6 4 0 8 ...

Задача 4. *Знайдіть закономірність і запишіть відсутнє число: 5, 11, 23, ..., 95, 191*

Задача 5. *Знайдіть закономірність і запишіть наступні три числа: 1, 8, 27, 64, ...*

Задача 6. *Знайдіть закономірність і запишіть наступні три числа: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...*

Задача 7. *Знайдіть закономірність і запишіть наступні три числа: 0, 3, 8, 15, 24, 35, ...*

Література

1. Балаян, Э. Н. (2008). 1*001 олимпиадная и занимательная задачи по математике*. Ростов на Дону: Феникс, 364 с.

2. Бугаенко, В. О. (1995). *Турниры им. Ломоносова. Конкурсы по математике*. Москва,110 с.

3. Екимова, М. А. (2002). *Задачи на разрезание*. Москва: МЦНМО, 120 с.

4.Морозова, Е. А., Петраков, И. С. (1967). *Международные матемаические олимпиады.* М:Просвещение, 288 с.

5.Соловьева, И. О. (2010). *Практикум по решению олимпиадных задач по математике: учебное пособие*. Псков:ПГПУ, 96 с.

6. Спивак, А. В. (2004). *Математический празник*. Москва, 288 с.

Навчальне видання

Аніщенко Вікторія Вікторівна

МАТЕМАТИКА. ПІДГОТОВКА ДО ОЛІМПІАДИ.

Цикл уроків для вчителів і учнів 5-6 класів

В авторській редакції
Комп’ютерний набір В.В. Аніщенко

Підписано до друку . Формат
Папір офсетний. Гарнітура «Таймс».
Ум. друк. арк. Обл.-вид.арк.
Тираж екз. Зам. №

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво № 1153 від 16.12.2002

Надруковано у видавництві
Народної української академії

Україна, 61000, Харків, МСП, вул. Лермонтовська, 27.