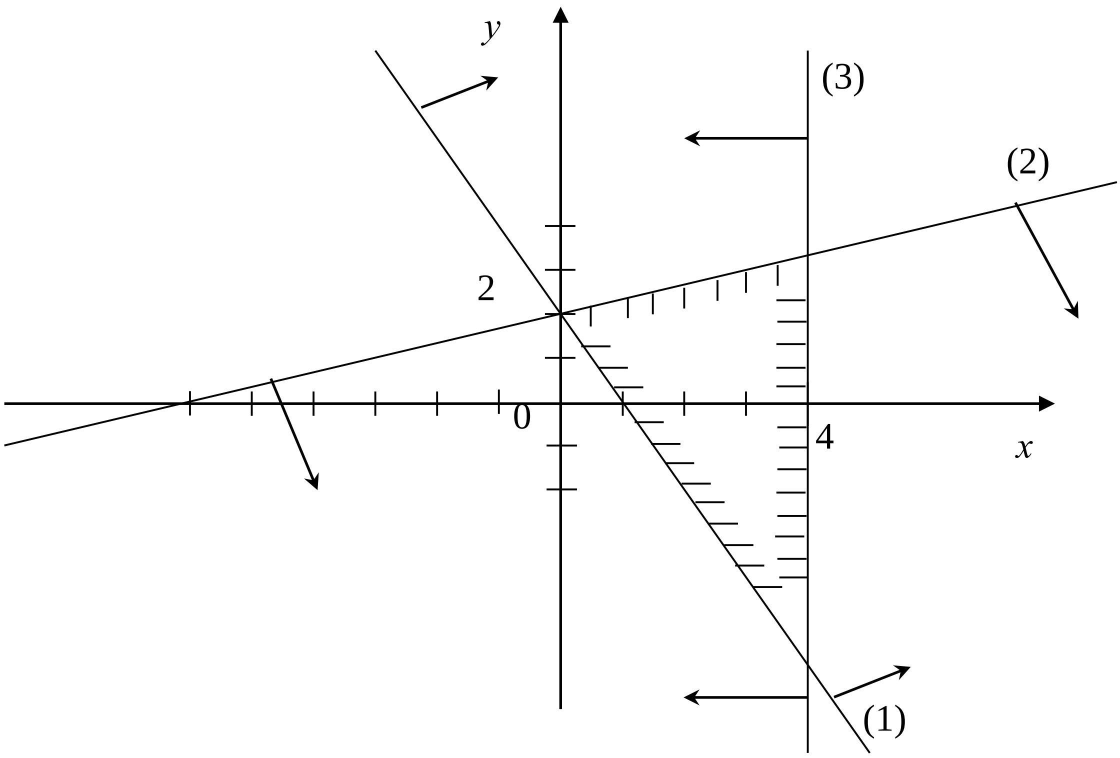
НАРОДНА УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ

**Серія «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ ТА СОЦІОЛОГІВ»**

С. В. Михайленко, Є. В. Свіщова

# ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник




Видавництво НУА

НАРОДНА УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ

С. В. Михайленко, Є. В. Свіщова

# ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

*Видання друге, виправлене та доповнене*

Харків
Видавництво НУА
2023

УДК 512.64+514.12] (075.8)
М 69

*Затверджено на засіданні*
*кафедри інформаційних технологій та математики*
*Протокол № 2 від 05.09.2022*

Рецензент канд. фіз.- мат. наук, доц. О. Г. Ніколаєва
(ХНУ ім. В. Н. Каразіна)

Навчальний посібник містить такі розділи вищої математики: елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії (вектори в $R_3$ та в $R_n$, аналітична геометрія на площині та в просторі), елементи лінійної алгебри (теорії матриць і визначників, теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь, метод повного виключення та його застосування).

**Михайленко, Світлана Василівна**.
М 69 Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії : навчальний посібник / С. В. Михайленко, Є. В. Свіщова; Нар. укр. акад. [каф. інформ. технологій та математики]. – 2-е вид., випр. – Харків : Вид-во НУА, 2023. – 104 с.

**УДК 512.64+514.12] (075.8)**

# ВСТУП

У господарській практиці людини математика використовується з моменту свого зародження. Протягом тисячоліть арифметика та геометрія застосовувалися для різноманітних вимірів та обчислень. Подальший розвиток математики тривалий час визначався переважно потребами природничих та технічних наук, і навіть внутрішньою логікою розвитку математики. Потім виникла нагальна потреба в застосуванні математики у сфері соціальних та гуманітарних наук. Математичні теорії та методи буквально пронизали всі інші науки. Навряд чи можна вказати сферу практичної та духовної діяльності людини, де зараз не застосовуються методи математичного дослідження.

Сучасний економіст, якому доводиться працювати в умовах ринкової комп'ютеризованої економіки, не уявляється без знань у галузі моделювання економічних явищ. Коли ми говоримо про застосування математики в економіці, то маємо на увазі не просто проведення різноманітних економічних розрахунків, а використання математики для вивчення економічних закономірностей, отримання нових теоретичних висновків, знаходження найкращих соціально-економічних рішень. Економіко-математичні методи, що базуються на сучасних досягненнях в галузі економічної теорії, математики та інформаційних технологій, збагачують економічну науку та сприяють її переходу на новий, більш високий рівень. Це не тільки задовольняє безпосередні запити практики, а й дає новий плідний підхід до вирішення різноманітних теоретичних проблем у економічній науці. Застосування економіко-математичних методів може бути ефективним лише за наявності висококваліфікованих кадрів.

Робота соціолога пов'язана, як правило, зі збором кількісних даних, їх обробкою та подальшим аналізом отриманих результатів. Таку обробку допомагають проводити саме математичні методи. Наприклад, найпростіші обчислення дозволяють знайти такі важливі показники як середній відсоток народжуваності за рік, відсоток безробіття тощо. Для більш складних досліджень необхідно застосовувати статистичні методи обробки інформації. Для оволодіння цими методами необхідні знання деяких розділів вищої математики. Очевидно, що зараз більшій кількості студентів-соціологів, ніж раніше, доведеться користуватися математикою у своїй майбутній професійній діяльності.

Щоб застосовувати математику як метод дослідження, важливо усвідомити і добре засвоїти сутність та взаємозв'язок її основних ідей та понять, опанувати процес творчого, а не формального мислення. Це непросте завдання може бути вирішено кожним, хто серйозно і послідовно займеться вивченням математики.

Для кращого оволодіння викладеним в посібнику теоретичним матеріалом рекомендуємо звернутися до посібника [1], де можна знайти приклади розв’язаних задач и задачі для самостійного розв’язання по розглянутим темам.

# РОЗДІЛ I. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

## Глава 1. Вектори в $R_3$

### 1.1. Основні відомості про вектор. Лінійні операції над векторами

Величини, що використовуються на практиці, можна поділити на два види. Одні з них задаються одним числом (наприклад, довжина відрізка, ціна однієї одиниці деякого товару тощо) у деяких одиницях виміру (довжина в см, м, або км, ціна товару в гривнях, доларах, євро тощо). Такі величини називаються скалярними величинами чи просто скалярами. В той же час зустрічаються величини, для характеристики яких недостатньо лише одного числа. Розглянемо ***геометричне означення*** вектора в $R_3$. ***Вектор*** – це напрямлений відрізок. Щоб зобразити вектор у декартовій системі координат, необхідно задати напрямок вектора та його довжину, яку називають також ***модулем*** вектора. Позначається вектор $\overline{a}$ або $\overline{AB}$, де точка $A$ – початок вектора, точка $B$ – кінець вектора. Модуль вектора позначається $|\overline{a}| = a$ або . $|\overline{AB}| = AB$. Вектор, кінець якого збігається з його початком, називається ***нульовим*** вектором. Модуль нульового вектора дорівнює нулю. Вектори називаються ***колінеарними***, якщо вони розташовані на одній або паралельних прямих. Два вектори вважатимемо ***рівними***, якщо вони колінеарні, однаково спрямовані і мають рівні довжини. Можна сказати, що це той самий вектор, але перенесений в інше місце.

***Лінійні операції над векторами***

**1. Множення вектора на число.**

***Добутком вектора*** $\overline{a}$ ***на число k*** називається вектор $\overline{b} = k\overline{a}$, колінеарний вектору $\overline{a}$, що має однаковий напрямок з вектором $\overline{a}$ при $k > 0$, протилежний при $k < 0$ і $|\overline{b}| = |k| \cdot |\overline{a}|$.

Зокрема, якщо $\overline{b} = (-1) \cdot \overline{a} = -\overline{a}$, то вектор $\overline{b} = -\overline{a}$ називається ***протилежним*** вектору $\overline{a}$.

**2. Додавання векторів.**

Для додавання векторів можна використовувати два правила.

***Перше правило*** ( *правило паралелограма* ): для знаходження суми двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ переносять початок векторів в одну точку, потім на них будують паралелограм. Діагональ паралелограма, що виходить із цієї точки, і дає суму $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ (рис.1).

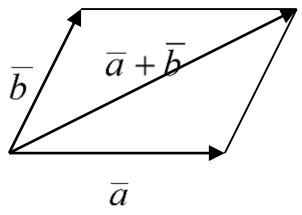



Рис. 1

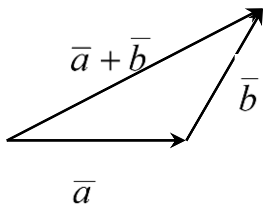



Рис. 2

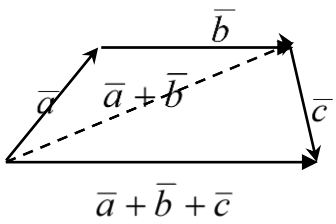



Рис. 3

***Друге правило** (правило трикутника)*: для знаходження суми двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ до кінця першого вектора треба приставити початок другого, тоді сумою векторів буде вектор, що їх замикає, тобто вектор, що йде від початку першого вектора до кінця другого (рис. 2). Друге правило зручно застосовувати, якщо потрібно знайти суму більше, ніж двох векторів (рис. 3).

**3. Віднімання векторів.**

Різницею векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається такий вектор, який в сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$ (рис. 4).

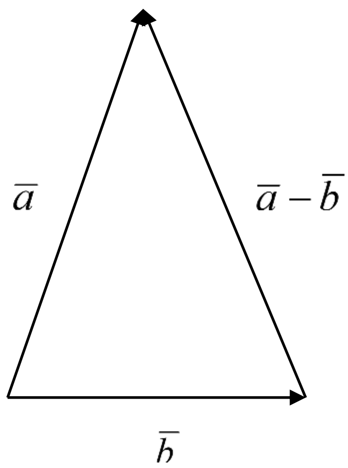



Рис. 4

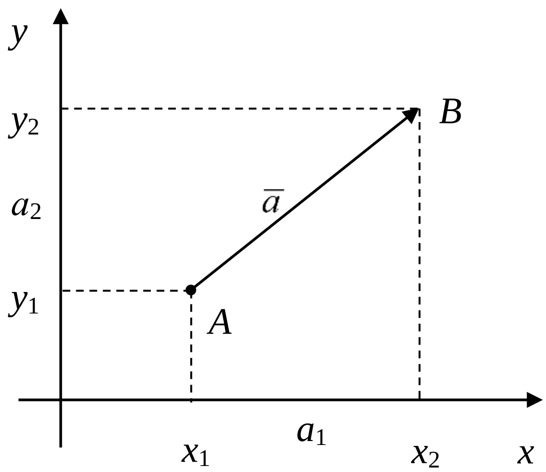



Рис. 5

Поряд із геометричним використовується також ***аналітичне означення*** вектора.

Розглянемо спочатку вектор $\overline{a}$ на площині. Він повністю визначається своїми проекціями $a_1$ та $a_2$ на осі координат.

Записується це у вигляді $\overline{a}=(a_1, a_2)$. Числа $a_1$ та $a_2$ називаються координатами вектора $\overline{a}$. Нехай точка $A$ $(x_1, y_1)$ – початок вектора $\overline{a}$, а точка $B$ $(x_2, y_2)$ – його кінець (рис. 5) . Тоді

$$\overline{a}=\overline{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1).$$

Вектор, що має дві координати, називається ***двовимірним*** . Сукупність всіх двовимірних векторів утворює векторний двовимірний простір $R_2$.

Аналогічно у просторі $R_3$ вектор $\bar{a}$ можна записати у вигляді $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, де $a_1$, $a_2$, $a_3$ – координати вектора. Якщо відомі координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overline{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$.

Зокрема, всі координати нульового вектора дорівнюють нулю.

Два вектори $\bar{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ та $\bar{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ називаються ***рівними***, якщо рівні відповідні координати, тобто якщо $a_i = b_i$, $i = \overline{1, 3}$.

Над векторами, заданими в аналітичному вигляді, можна виконувати ***лінійні операці***.

1. М**ноження вектора на число.**

Добутком вектора $\bar{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ на число $k$ називається вектор

$$k\bar{a} = \mathbf{(}ka_1\mathbf{,}\ ka_2\mathbf{,}\ ka_3\mathbf{)}.$$

2. **Додавання векторів.**

Сумою векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ називається вектор

$$\bar{a} + \bar{b} = \mathbf{(}a_1 + b_1\mathbf{,}\ a_2 + b_2\mathbf{,}\ a_3 + b_3\mathbf{)}.$$

3. **Віднімання векторів.**

Різницею векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3).$$

Неважко перевірити, що введені таким чином лінійні операції над векторами, заданими координатною формою, узгоджуються з лінійними операціями над векторами, заданими в геометричному вигляді.

З визначення лінійних операцій над векторами випливають такі властивості:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$; 2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$;

3) $k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$; 4) $(k_1 + k_2)\bar{a} = k_1\bar{a} + k_2\bar{a}$;

5) $\bar{a} + \bar{o} = \bar{a}$; 6) $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{o}$.

Нехай $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\bar{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ – колінеарні вектори. Тоді вектор $\bar{a}$ можна виразити через вектор $\bar{b}$ як $\bar{a} = k\bar{b}$. Звідси отримуємо:

$$(a_1, a_2, a_3) = k\ (b_1, b_2, b_3) = (kb_1, kb_2, kb_3).$$

З рівності векторів випливає:

$$a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, a_3 = kb_3.$$

З цих співвідношень отримуємо ***умову колінеарності*** двох векторів:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

**Приклад.**

Дано точки $A(1; -2; 3)$, $B(3; y; 1)$, $C(4; 1; 3)$ та $D(5; -2; z)$. За яких значень $y$ та $z$ вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ будуть колінеарними?

*Розв'язок.*

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ та записуємо ці вектори:

$$\overline{AB} = (2; y+2; -2),\ \overline{CD} = (1; -3; z-3).$$

Для знаходження невідомих величин $y$ і $z$ скористаємося умовою колінеарності двох векторів:

$$\frac{2}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{-2}{z-3}$$

Це рівносильно виконанню двох рівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{y+2}{-3} = 2, \\ \dfrac{-2}{z-3} = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+2 = -6, \\ 2z-6 = -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -8, \\ z = 2. \end{cases}$$

Таким чином, вектори $\overline{AB}$ та $\overline{CD}$ будуть колінеарними при $y = -8$ та $z = 2$.

## 1.2. Поділ відрізка у заданому відношенні

Нехай точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ – кінці відрізка $AB$, а точка $M(x, y, z)$ ділить цей відрізок у відношенні $\dfrac{AM}{MB} = \lambda$. Потрібно знайти координати точки $M$.

Вектори $\overline{AM}$ та $\overline{MB}$ колінеарні (рис. 6). Використовуючи відношення

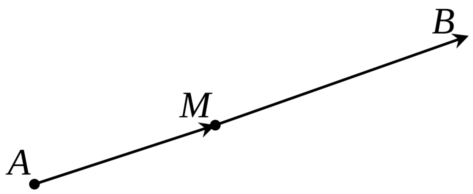



Рис. 6

$\dfrac{AM}{MB} = \lambda$, можна записати $\overline{AM} = \lambda\,\overline{MB}$. Записуючи вектори $\overline{AM}$ та $\overline{MB}$ в координатній формі, отримуємо:

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \lambda(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z).$$

З рівності векторів маємо:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \qquad y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \qquad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Звідси отримуємо координати точки $M$:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\; y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\; z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Зокрема, якщо $M$ – середина відрізка $AB$ , то $\lambda = 1$ та

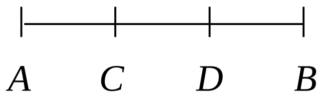
$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\; y=\frac{y_1+y_2}{2};\; z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

**Приклад**.

Дано точки $A(1; -2; 0)$ і $B(3; 2; 4)$. Відрізок $AB$ точками $C$ і $D$ поділяється на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.

*Розв'язок*.

За умовою відрізок $AB$ ділиться точками $C$ на $D$ три рівні частини, тобто $AC = CD = DB$ .




Для точки $C$ $\quad \lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{1}{2}$.

Використовуючи формули для обчислення координат точки розподілу, отримуємо:

$$x_C=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5}{3};\; y_C=\frac{-2+\frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3};\; z_C=\frac{0+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}.$$

Таким чином, отримали точку $C(\frac{5}{3};\, -\frac{2}{3};\, \frac{4}{3})$.

Для точки $D$ $\quad \lambda=\frac{AD}{DB}=2$.

$$x_D=\frac{1+2\cdot 3}{1+2}=\frac{7}{3};\quad y_D=\frac{-2+2\cdot 2}{1+2}=\frac{2}{3};\quad z_D=\frac{0+2\cdot 4}{1+2}=\frac{8}{3}.$$

Отримали точку $D(\frac{7}{3};\, \frac{2}{3};\, \frac{8}{3})$.

## 1.3. Скалярний добуток векторів

***Скалярним добутком*** двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута $\varphi$ між ними:

$$(\overline{a},\overline{b})=\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi .$$

Якщо вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ задані своїми координатами, тобто $\overline{a}=(a_1,\, a_2,\, a_3)$ і $\overline{b}=(b_1, b_2, b_3)$, то їх скалярний добуток визначається за формулою:

$$(\overline{a},\overline{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 .$$

З означення скалярного добутку випливають такі його ***властивості***:

1. $(\bar{a},\ \bar{b}) = (\bar{b},\ \bar{a})$;

2. $(\lambda\bar{a},\ \bar{b}) = (\bar{a},\ \lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a},\ \bar{b})$;

3. $(\bar{a} + \bar{b},\ \bar{c}) = (\bar{a},\ \bar{c}) + (\bar{b},\ \bar{c})$;

4. Скалярний добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ ортогональні (перпендикулярні). Таким чином, ***умова ортогональності*** двох векторів має вигляд:

$$(\bar{a},\ \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 .$$

Розглянемо деякі ***застосування скалярного добутку***.

1. **Обчислення довжини (модуля) вектора**.

Розглянемо скалярний добуток $(\bar{a},\ \bar{a})$:

$$(\bar{a},\ \bar{a}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos 0 = |\bar{a}|^2 .$$

Звідси одержуємо формулу: $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\ \bar{a})}$.

Якщо вектор $\bar{a}$ заданий координатами, тобто $\bar{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, то його довжину обчислюємо за формулою:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\ \bar{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} .$$

**2. Обчислення відстані між двома точками.**

Потрібно обчислити відстань між двома заданими точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Знаходимо координати вектора $\overline{M_1 M_2}$:

$$\overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1) .$$

Відстань між точками $M_1$ і $M_2$ - *це* довжина вектора $\overline{M_1 M_2}$, тобто

$$M_1 M_2 = \left|\overline{M_1 M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

**3. Обчислення кута між векторами.**

Зі співвідношення $(\bar{a},\ \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$ ($\varphi$ – кут між векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$), отримуємо:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\ \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} .$$

Якщо вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ задані координатами, то кут $\varphi$ між цими векторами знаходимо за допомогою формули:

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

**4. Обчислення проекції вектора $\bar{a}$ на вісь, що визначається вектором $\bar{b}$ .**

Проекцією вектора $\bar{a}$ на вісь, що визначається вектором $\bar{b}$, є відрізок $AC$ (рис. 7).

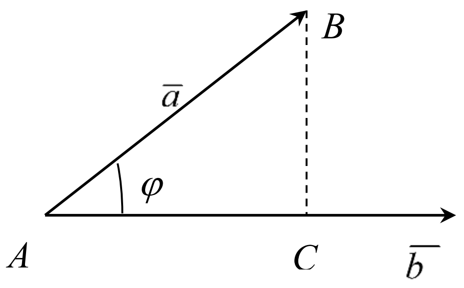



Рис. 7

$$\text{пр}_{\bar{b}}\, \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi = |\bar{a}| \cdot \frac{(\bar{a},\, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{(\bar{a},\, \bar{b})}{|\bar{b}|}.$$

Таким чином,

$$\text{пр}_{\bar{b}}\, \bar{a} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

**5. Обчислення напрямних косинусів вектора $\bar{a}$ .**

Нехай $\alpha, \beta, \gamma$ – це кути між вектором $\bar{a}$ та додатними напрямками осей $0x$, $0y$, $0z$ . Тоді $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають напрямними косинусами вектора $\bar{a}$ .

Кут $\alpha$– це кут між вектором $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і вектором (1; 0; 0), що має напрямок осі $0x$. Використовуючи формулу для знаходження кута між векторами, знаходимо $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Аналогічно отримуємо:

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\bar{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

**Приклад 1**.

Знайти кут $B$ і довжину медіани $BK$ трикутника $ABC$, якщо відомі координати його вершин $A(3; -1; 5)$, $B(0; -1; 1)$, $C(1; -3; 3)$.

*Розв'язання*.

Кут $B$ – це кут між векторами $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$ (рис 8). Знаходимо координати векторів $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ та їх довжини:

$$\overline{BA} = (3; 0; 4); \qquad |\overline{BA}| = \sqrt{9 + 0 + 16} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\overline{BC} = (1; -2; 2); \qquad |\overline{BC}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Отже:

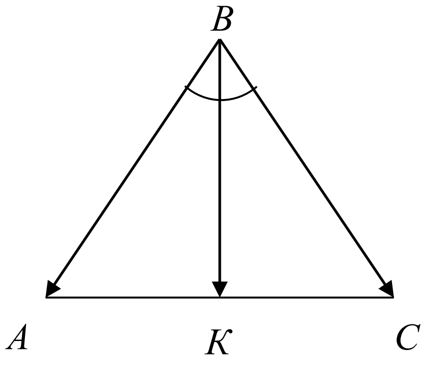



Рис. 8

$$\cos\angle B = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|} = \frac{3+0+8}{5\cdot 3} = \frac{11}{15};$$

$$\angle B = \arccos\frac{11}{15}.$$

Для знаходження довжини медіани $BK$ обчислюємо координати точки $K$. Точка $K$ поділяє сторону $AC$ на рівні частини ($\lambda = 1$), тому

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = 2; \quad y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = -2;$$

$$z_K = \frac{z_A + z_C}{2} = 4,$$

тобто маємо $K(2; -2; 4)$.

Тоді $\overline{BK} = (2; -1; 3)$ і $\left|\overline{BK}\right| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$.

**Приклад 2**.

При якому значенні $x$ вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ будуть ортогональні, якщо задані точки $A(2; 1; -3)$, $B(x; 3; -1)$, $C(1; -1; 6)$?

*Розв'язання*.

Записуємо вектори $\overline{AB}$ та $\overline{BC}$:

$$\overline{AB} = (x - 2; 2; 2);$$
$$\overline{BC} = (1 - x; -4; 7).$$

Вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ будуть ортогональні, якщо $\overline{AB}\cdot\overline{BC} = 0$, тобто

$$(x-2)\cdot(1-x) - 8 + 14 = 0.$$

Розв'язуємо це рівняння:

$$x - x^2 - 2 + 2x - 8 + 14 = 0,$$
$$-x^2 + 3x + 4 = 0,$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Отже:

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 4.$$

Таким чином, вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ будуть ортогональними у двох випадках: $x_1 = -1$, тобто $B_1(-1; 3; -1)$ і $x_2 = 4$, тобто $B_2(4; 3; -1)$.

# Глава 2. Вектори в $R_n$

## 2.1. Основні поняття та означення

**Вектором в $R_n$** називається впорядкований набір з $n$ дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, які називаються координатами вектора.

Записуємо це у вигляді $\bar{a} = (a_1, {}_2, \ldots, a_n)$.

Вектор, у якого всі координати дорівнюють нулю, називається **нульовим**. Вектор $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ дорівнює вектору $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, якщо $a_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$. ***Лінійні операції*** над векторами в $R_n$ виконуються так само, як і в $R_3$.

1. **Множення вектора на число**.

Добутком вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на число $k$ є вектор

$$k\bar{a} = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n).$$

2. **Додавання векторів**.

Сумою векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ є вектор

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

3 . **Різниця векторів**.

Різницею векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ є вектор

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n).$$

Вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ колінеарні, якщо $\bar{a} = k\bar{b}$. З цієї рівності отримуємо ***умову колінеарності*** двох векторів:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

***Скалярним добутком*** векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ називається число, що дорівнює сумі добутків однойменних координат:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Скалярний добуток векторів в $R_n$ має ті ж властивості, що і скалярний добуток векторів в $R_3$.

**Довжиною вектора** $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ називається число $|\bar{a}|$, що дорівнює

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}.$$

**Кутом** між ненульовими векторами $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ називають кут $\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi)$, косинус якого дорівнює

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}.$$

Вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називаються ***ортогональними*** , якщо

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = 0.$$

**Приклад**.

Дано вектори

$$\bar{a} = (2; -1; 3; 4),\ \bar{b} = (-1; -4; -2; 1), \bar{c} = (5; 1; -3; 3).$$

Потрібно:

1. Знайти вектор

$$\bar{d} = 2\bar{a} + \bar{b} - 3\bar{c};$$

2. Перевірити, чи є серед векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ортогональні.

*Розв'язання*.

1. $\bar{d} = 2\bar{a} + \bar{b} - 3\bar{c} = 2(2; -1; 3; 4) + (-1; -4; -2; 1) - 3(5; 1; -3; 3) =$
$= (4; -2; 6; 8) + (-1; -4; -2; 1) - (15; 3; -9; 9) = (-12; -9; 13; 0).$

2. Обчислюємо скалярні добутки векторів:

$(\bar{a}, \bar{b}) = -2 + 4 - 6 + 4 = 0 \Rightarrow$ вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ортогональні.

$(\bar{a}, \bar{c}) = 10 - 1 - 9 + 12 \neq 0 \Rightarrow$ вектори $\bar{a}$ і $\bar{c}$ не ортогональні.

$(\bar{b}, \bar{c}) = -5 - 4 + 6 + 3 = 0 \Rightarrow$ вектори $\bar{b}$ і $\bar{c}$ ортогональні.

## 2.2. Лінійна залежність та незалежність векторів

***Лінійною комбінацією*** векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ називається вираз виду

$$k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \ldots + k_m\bar{a}_m.$$

Розглянемо поняття лінійної залежності та незалежності векторів.

**Означення 1**.

Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ називаються ***лінійно незалежними*** , якщо рівність

$$k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \ldots + k_m\bar{a}_m = 0$$

виконується тільки за умови $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$. Якщо ця рівність виконується при коефіцієнтах $k_i$, серед яких є хоча б один відмінний від нуля, то вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ лінійно залежні.

**Означення 2**.

Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_m$ називаються ***лінійно залежними*** , якщо хоча б один з векторів є лінійною комбінацією інших. Якщо це неможливо, то вектори лінійно незалежні.

**Твердження.**

Означення 1 та Означення 2 еквівалентні.

*Доведення.*

1. Нехай вектори $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_m$ лінійно залежні у сенсі першого Означення 1, тобто рівність $k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + ... + k_m\overline{a}_m = 0$ виконується при коефіцієнтах $k_i$, серед яких є відмінні від нуля. Нехай, наприклад, $k_1 \neq 0$. Знаходимо вектор $\overline{a}_1$:

$$\overline{a}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\overline{a}_2 - \frac{k_3}{k_1}\overline{a}_3 - ... - \frac{k_m}{k_1}\overline{a}_m .$$

Таким чином, вектор $\overline{a}_1$ є лінійною комбінацією інших векторів; це означає, що вектори $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_m$ є лінійно залежними у сенсі Означення 2.

2. Нехай вектори $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_m$ лінійно залежні у сенсі Означення 2. Тоді хоча б один із векторів є лінійною комбінацією інших. Нехай, наприклад, $\overline{a}_1 = k_1\overline{a}_2 + k_2\overline{a}_3 + ... + k_{m-1}\overline{a}_m$. З цієї рівності отримуємо: $\overline{a}_1 - k_1\overline{a}_2 - ... - k_{m-1}\overline{a}_m = 0$. Це означає, що вектори $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_m$ лінійно залежні в сенсі Означення 1.

З означення лінійної залежності випливають такі твердження:

1) якщо вектори $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …,$\overline{a}_m$ лінійно незалежні, то й будь-яка їхня часткова сукупність лінійно незалежна;

2) якщо до лінійно залежних векторів $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …,$\overline{a}_m$ додати один або декілька векторів, то отримана сукупність векторів буде лінійно залежною.

Розглянемо **лінійну залежність векторів у просторах $\boldsymbol{R}_2$ та $\boldsymbol{R}_3$**:

1. *Два колінеарні вектори лінійно залежні; два неколінеарні вектори лінійно незалежні.*

Справді, якщо вектори $\overline{a}_1$ та $\overline{a}_2$ колінеарні, то $\overline{a}_2 = k\overline{a}_1$. Це означає, що вектори $\overline{a}_1$ і $\overline{a}_2$ лінійно залежні.

2. *Три будь-які вектори, що лежать в одній площині, завжди лінійно залежні.*

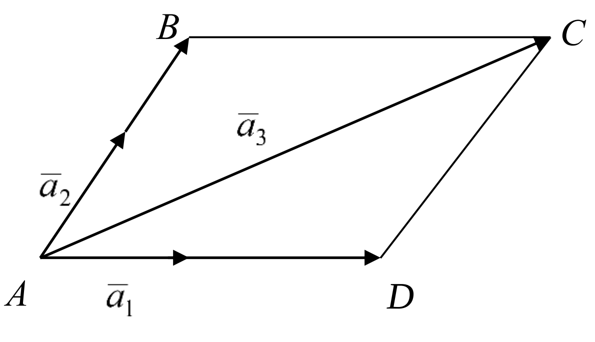



Рис. 9

Розглянемо довільні три вектори $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$. Якщо серед цих векторів є колінеарні, вектори лінійно залежні. Нехай серед цих векторів немає колінеарних. Перенесемо початок усіх векторів в одну точку та побудуємо паралелограм, діагоналлю якого є вектор $\overline{a}_3$ (рис. 9). З визначення суми двох векторів маємо: $\overline{a}_3 = \overline{AD} + \overline{AB}$ .

Вектор $\overline{AD}$ колінеарний вектору $\overline{a}_1$, тому $\overline{AD} = k_1\overline{a}_1$. Аналогічно $\overline{AB} = k_2\overline{a}_2$. Таким чином, $\overline{a}_3 = k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2$, що означає лінійну залежність векторів.

3. *Три вектори, які не лежать в одній площині, лінійно незалежні.*
4. *Чотири та більше векторів завжди лінійно залежні* .

Таким чином, ***максимальне число лінійно незалежних векторів в R₂ дорівнює двом, в R₃ дорівнює трьом***.

**Приклад** .
Дослідити на лінійну залежність вектори

$$\overline{a}_1 = (2;\ 2;\ 2),\ \overline{a}_2 = (2;\ 3;\ 4),\ \overline{a}_3 = (2;\ 5;\ 5).$$

*Розв'язання.*

Скористаємося Означенням 1 лінійної залежності векторів: якщо рівність $k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + k_3\overline{a}_3 = 0$ виконується лише за умови $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, то вектори лінійно незалежні, в іншому випадку (серед коефіцієнтів $k_i$ є відмінні від нуля) вектори лінійно залежні.

$$k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + k_3\overline{a}_3 = 0 \ \Rightarrow$$
$$k_1(2;\ 2;\ 2) + k_2(2;\ 3;\ 4) + k_3(2;\ 5;\ 5) = 0 \Rightarrow$$
$$(2к_1 + 2k_2 + 2k_3,\ 2k_1 + 3k_2 + 5k_3,\ 2k_1 + 4k_2 + 5k_3) = 0.$$

З рівності векторів отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 = 0, \\ 2k_1 + 3k_2 + 5k_3 = 0, \\ 2k_1 + 4k_2 + 5k_3 = 0. \end{cases}$$

Віднімаємо від третього рівняння друге, отримуємо $k_2 = 0$.

Підставляємо $k_2 = 0$ в перше та друге рівняння системи, отримуємо:

$$\begin{cases} 2k_1 + 2k_3 = 0, \\ 2k_1 + 5k_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є

$$k_1 = k_3 = 0.$$

Таким чином, рівність $k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + k_3\overline{a}_3 = 0$ виконується лише за умови $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Це означає, що вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ лінійно незалежні.

## Питання для самоконтролю

1. Як визначається сума (різниця) векторів?

2. Чи можна додати вектори $\bar{a}$ = (2; −1; 0) і $\bar{b}$ = (0; 3; 2; −4)?

3. Які вектори називають колінеарними? Сформулюйте умову колінеарності двох векторів.

4. Задані вектори $\bar{a}$ = (2; −1; 1), $\bar{b}$ = (4; $y$ ; −2), $\bar{c}$ = (8; 6; −4). Чи можна знайти $y$ так, щоб:

   1) вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ були колінеарними;

   2) вектори $\bar{b}$ та $\bar{c}$ були колінеарними?

5. У якому разі $\bar{a} = \bar{b}$?

6. Чи можна знайти таке значення $\alpha$, щоб виконувалася рівність $\bar{a} = \bar{b}$, якщо $\bar{a}$ = (2; –1; 3; 4), $\bar{b}$ = (2; $\alpha$; 3; 2 + $\alpha$)?

7. Чи може точка $C$(2; −1; 3) бути серединою відрізка $AB$ якщо відомі $A$(1; 2; −1) і $B$(3; −4; 3)?

8. $A$(2; 4; −1) і $C$(4; 0; 3) − протилежні вершини паралелограма. Які координати має точка перетину діагоналей цього паралелограма?

9. Дайте визначення скалярного добутку векторів. У якому разі скалярний добуток дорівнює нулю?

10. Чи можна обчислити скалярний добуток векторів $\bar{a}$ = (3; −1; 0; 4) і $\bar{b}$ = (2; 1; −1; 0; 5)?

11. Чи ортогональні вектори $\bar{a}$ = (2; –1; 3; 1) і $\bar{b}$ = (4; 5; –1; 0)?

12. Задані вектори $\bar{a}$ = (−2; 1; 2) і $\bar{b}$ = (0; −3; −4). Яке із співвідношень справедливе: $|\bar{a}| < |\bar{b}|$; $|\bar{a}| = |\bar{b}|$; $|\bar{a}| > |\bar{b}|$?

13. У якому разі вектори $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ і $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$ ортогональні?

14. Як записати умову лінійної залежності векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$?

15. Яку максимальну кількість лінійно незалежних векторів можна вказати у $R_3$?

16. Чи можна знайти такі значення змінних $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, при яких вектори $\bar{a}$ = ($\alpha$; 0; 0), $\bar{b}$ = (0; $\beta$; 0), $\bar{c}$ = (0; 0; $\gamma$) будуть лінійно залежні?

# Розділ 3. Аналітична геометрія на площині

## 3.1. Поняття рівняння лінії в $R_2$. Перетин ліній

Розглянемо прямокутну систему координат на площині. Кожній точці площини відповідає пара чисел, взятих у порядку – координати точки. І навпаки: кожній парі чисел відповідає єдина точка площини. Нехай на площині $Oxy$ дано деяку лінію $L$ . Розглянемо довільну точку $M$ цієї лінії. При переміщенні точки $M$ по даній лінії її координати будуть змінюватися, залишаючись, однак, пов'язаними деякою умовою, що характеризує точки цієї лінії.

Рівняння $F(x, y) = 0$ ( $y = f(x)$) називається **рівнянням лінії** $L$, якщо цьому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки лінії $L$ і не задовольняють координати будь-якої точки, що не лежить на цій лінії, тобто лінія $L$ – *це геометричне місце точок, що задовольняють рівнянню*

$$F(x, y) = 0 \ ( y = f(x)).$$

Рівняння $y = f(x)$ називається рівнянням лінії у **явній** формі, а рівняння $F(x, y) = 0$ називається рівнянням лінії у **неявній** формі. Координати $x$ і $y$ довільної точки $M$, що входять до рівняння, називаються **поточними** координатами точки.

Прикладом рівняння лінії, заданої у явному вигляді, є рівняння параболи $y = x^2$; прикладом рівняння лінії, заданої в неявному вигляді, є рівняння кола $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$. Безпосередньо з означення рівняння лінії отримуємо, що для того, щоб перевірити, чи лежить точка на заданій лінії $L$, необхідно підставити координати цієї точки в рівняння лінії. Якщо під час підставлення координат точки отримуємо тотожність, це означає, що точка лежить на лінії $L$. В іншому випадку точка лінії $L$ не належить.

**Приклад 1.**

Перевірити, чи належать точки $M_1(-2; -6)$ і $M_2(3; 1)$ колу $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

*Розв'язання*.

Підставляємо координати точки $M_1(-2; -6)$ в рівняння кола:

$$(-2 - 1)^2 + (-6 + 2)^2 = 25 \ \Rightarrow \ 9 + 16 = 25.$$

Звідси випливає, що точка $M_1$ лежить на колі.

Підставляємо координати точки $M_2(3; 1)$ в рівняння кола:

$$(3 - 1)^2 + (1 + 2)^2 = 25 \ \Rightarrow \ 4 + 9 = 25,$$

тобто точка $M_2$ колу не належить.

Іноді лінію на площині зручно задавати системою рівнянь, в якій кожна поточна координата є деякою функцією однієї змінної $t$, яка називається параметром (в механіці це час $t$ ). У цьому випадку рівняння лінії має вигляд:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

і називається рівнянням лінії у ***параметричній формі***. При фіксованому значенні $t = t_0$ отримуємо координати $x_0 = \varphi(t_0)$, $y = \psi(t_0)$ точки $M_0$ лінії.

Виключивши $t$ із рівнянь $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, отримаємо рівняння лінії у вигляді $F(x, y) = 0$ або $y = f(x)$.

**Приклад 2.** Задана лінія у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos t, \\ y = r \cdot \sin t. \end{cases}$$

Підносимо до квадрату кожну рівність і додаємо отримані рівності:

$$\begin{cases} x^2 = r^2 \cdot \cos^2 t, \\ y^2 = r^2 \cdot \sin^2 t, \end{cases} \Rightarrow \ x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2.$$

Таким чином, задана лінія – це коло з центром в початку координат.

Нехай задані дві лінії $F_1(x, y) = 0$ і $F_2(x, y) = 0$.

Потрібно знайти ***точки перетину*** цих ліній.

Якщо існує точка перетину цих ліній, то вона належить і першій, і другій лініям. Тому, щоб знайти точки перетину двох ліній, необхідно розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

**Приклад 3.**

Знайти точки перетину кола $x^2 + y^2 = 4$ та параболи $y = 2 - x^2$.

*Розв’язання*.

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 = 2 - y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - y + y^2 = 4, \\ x^2 = 2 - y, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 - y - 2 = 0, \\ x^2 = 2 - y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -1; \quad y_2 = 2, \\ x^2 = 2 - y. \end{cases}$$

Розглянемо $y_1 = -1$. Тоді $x^2 = 2 - y = 3 \ \Rightarrow \ x = \pm\sqrt{3}$. Отримуємо дві точки перетину: $M_1(-\sqrt{3}; -1)$ і $M_2(\sqrt{3}; -1)$.

Розглянемо $y_2 = 2$. Тоді $x^2 = 2 - y = 0 \Rightarrow \ x = 0$. Отримуємо третю точку перетину $M_3(0; 2)$.

Отже, маємо три точки перетину заданих ліній: $M_1(-\sqrt{3}; -1)$, $M_2(\sqrt{3}; -1)$ та $M_3(0; 2)$.

## 3.2. Пряма в $R_2$. Різні форми запису рівняння прямої

**1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.**

Нехай пряма перетинає вісь $0y$ в точці $A(0; b)$ і утворює кут $\varphi$ з додатним напрямом осі $0x$ , тобто кут $\varphi$ – це кут, на який необхідно повернути проти годинникової стрілки вісь $0x$ до збігу з цією прямою. Розглянемо довільну точку прямої $C(x, y)$ і трикутник $ACD$ (рис 10).

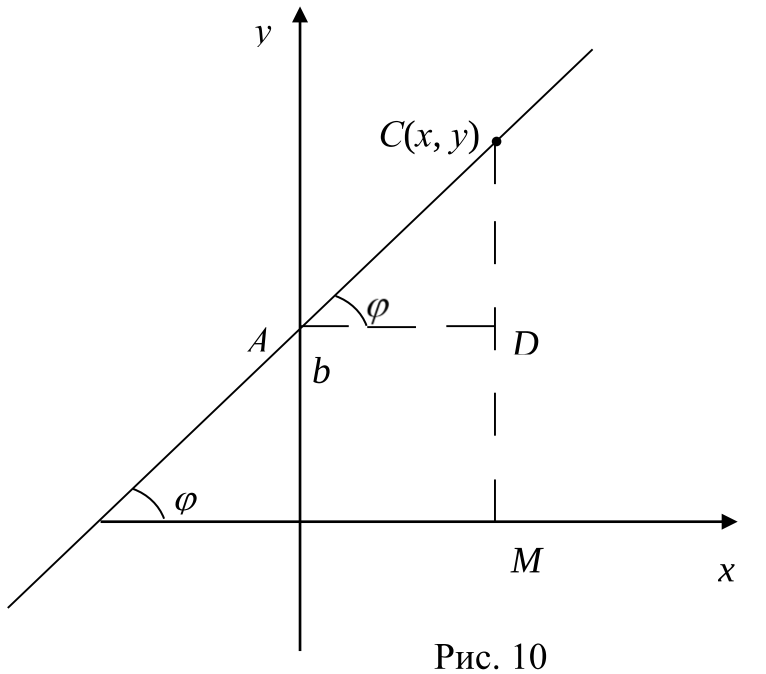



Рис. 10

$$CD = CM - DM = y - b\ ; \qquad AD = x\ ; \qquad \frac{CD}{AD} = \operatorname{tg}\varphi .$$

***Кутовим коефіцієнтом* k** прямої називається тангенс кута нахилу прямої до осі $0x$ , тобто $k = \operatorname{tg}\varphi$ ( $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$).

$$\frac{CD}{AD} = \operatorname{tg}\varphi \ \Rightarrow\ \frac{y-b}{x} = k \ \Rightarrow\ y = kx + b.$$

Таким чином, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд

$$y = kx + b.$$

Якщо пряма паралельна осі $0x$, то $k = \operatorname{tg}0 = 0$ і рівняння прямої матиме вигляд

$$y = b.$$

Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$ і рівняння матиме вигляд

$$y = kx.$$

**2. Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку.**

Розглянемо пряму, що проходить через точку $(x_0, y_0)$ і утворює з додатним напрямом осі $0x$ кут $\varphi$. Запишемо рівняння прямої у вигляді $y = kx + b$. Пряма проходить через точку $M(x_0, y_0)$, тому її координати задовольняють рівняння прямої: $y_0 = kx_0 + b$

Отримали:

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y_0 = kx_0 + b. \end{cases}$$

Віднімаємо від першого рівняння друге, отримуємо:

$$y - y_0 = k\,(x - x_0).$$

**Приклад.**

Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M\,(5; -1)$ і утворює з додатним напрямом осі $0x$ кут 45°.

*Розв'язання.*

Кутовий коефіцієнт прямої $k = \mathrm{tg}45° = 1$. Точка $M$ має координати $x_0 = 5$ та $y_0 = -1$. Підставляя значення $x_0$, $y_0$, $k$ *в* рівняння прямої $y - y_0 = k(x - x_0)$, отримуємо: $y + 1 = 1\cdot( x - 5) \;\Rightarrow\; y = x - 6$.

**3. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.**

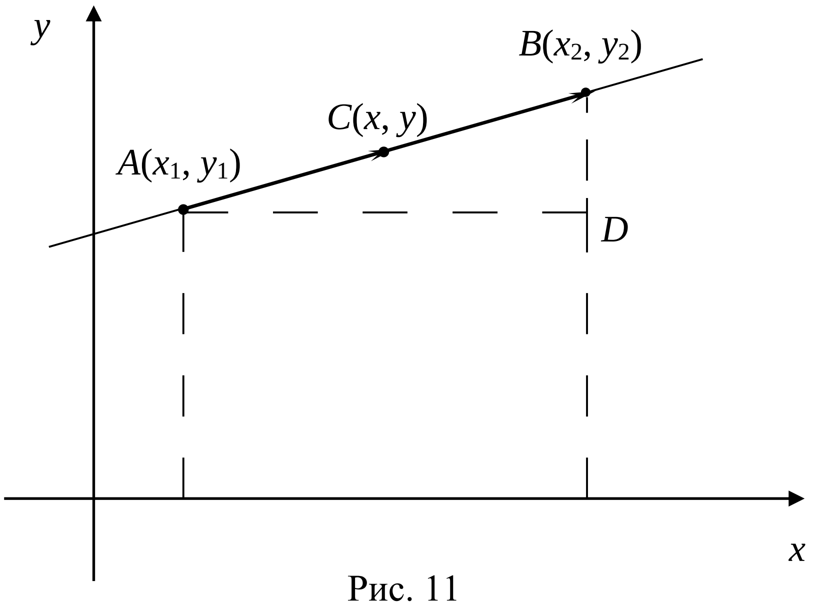



Рис. 11

Розглянемо на площині пряму, що проходить через дві задані точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ $(x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2)$ (рис. 11). Нехай $C(x, y)$ довільна точка цієї прямої. Вектори $\overline{AC}$ та $\overline{AB}$ колінеарні. Знаходимо координати цих векторів:

$$\overline{AC} = (x - x_1, y - y_1); \quad \overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Скористаємося умовою колінеарності двох векторів:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Цьому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки, що лежить на цій прямій. Отже, отримане рівняння є рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки.

Якщо $x_1 = x_2$, тобто задані дві точки прямої $A(x_1, y_1)$ і $B(x_1, y_2)$, то пряма паралельна осі *0y і* має рівняння $x = x_1$. Якщо $y_1 = y_2$ то пряма паралельна осі *0x* і має рівняння $y = y_1$.

Нехай задані дві точки прямої $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ і нас цікавить не рівняння прямої, лише її кутовий коефіцієнт $k$. З трикутника $ABD$ (рис. 11) знаходимо

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

**Приклад.**

Дано вершини трикутника $A(-1; 4)$, $B(3; -2)$, $C(5; 2)$. Скласти рівняння медіани $BM$.

*Розв'язання.*

Так як $BM$ медіана, то точка $M$ – середина сторони $AC$, тому

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2; \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4+2}{2} = 3, \text{ тобто } M(2; 3).$$

Медіана $BM$ проходить через точки $B$ та $M$ . Скориставшись рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки, отримуємо:

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y+2}{3+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{5}$$

$$5(x - 3) = -1\cdot(y + 2) \quad \Rightarrow \quad 5x + y - 13 = 0.$$

Таким чином, рівняння медіани $BM$ має вигляд

$$5x + y - 13 = 0.$$

**4. Загальне рівняння прямої.**

Нехай пряма задана координатами деякої точки $M(x_0, y_0)$ і координатами вектора нормалі $\overline{n} = (a, b)$, перпендикулярного до прямої (рис. 12). Розглянемо довільну точку прямої $N(x, y)$. Вектор $\overline{MN} = (x - x_0, y - y_0)$ перпендикулярний вектору $\overline{n} = (a, b)$. Скористаємося умовою ортогональності двох векторів:

$$(\overline{n}, \overline{MN}) = 0 \quad \Rightarrow \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0.$$

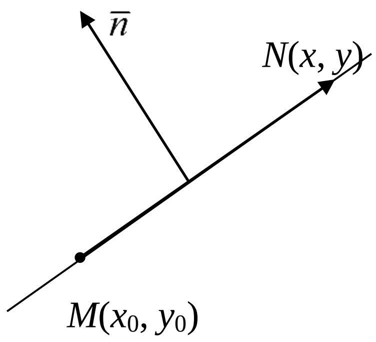



Рис. 12

Позначивши $c = -ax_0 - by_0$, отримуємо рівняння прямої

$$ax + by + c = 0.$$

Це і є загальне рівняння прямої.

**5. Рівняння прямої у відрізках.**

Нехай пряма задана довжинами $a$ та $b$ спрямованих відрізків, що відсікаються на осях координат. Цей спосіб завдання можливий лише у тому випадку, коли пряма не проходить через початок координат і не паралельна координатним осям. Рівняння прямої можна скласти, якщо відомі координати двох точок цієї прямої. В даному випадку відомі координати двох точок перетину з осями координат: $A(a;\ 0)$; $B(0;\ b)$. Скориставшись рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки, отримуємо:

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

**Приклад.**

Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;\ 2)$ і утворює з осями координат в першій чверті трикутник, площа якого дорівнює 4.

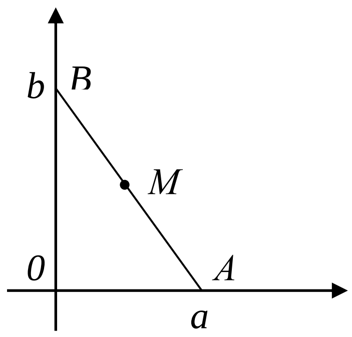



Рис. 13

*Розв'язання.*

Шукаємо рівняння прямої у вигляді $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, де $a = 0A$, $b = 0B$ (рис. 13). Точка $M$ (1; 2) лежить на цій прямій, отже, її координати задовольняють рівняння прямої: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$. Трикутник $A0B$ прямокутний. Його площу обчислюємо за формулою $S = \frac{ab}{2}$. За умовою площа трикутника дорівнює 4 . Отримуємо рівняння $\frac{ab}{2} = 4$. Розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1, \\ \frac{ab}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1, \\ b = \frac{8}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{a}{4} = 1, \\ b = \frac{8}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 4a + 4 = 0, \\ b = \frac{8}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = 4. \end{cases}$$

Підставляємо значення $a = 2$, $b = 4$ до рівняння прямої $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, отримуємо

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1.$$

## 3.3. Кут між двома прямими на площині. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай на площині задані дві прямі $y = k_1x + b_1$ (1)
та $y = k_2x + b_2$ (2).

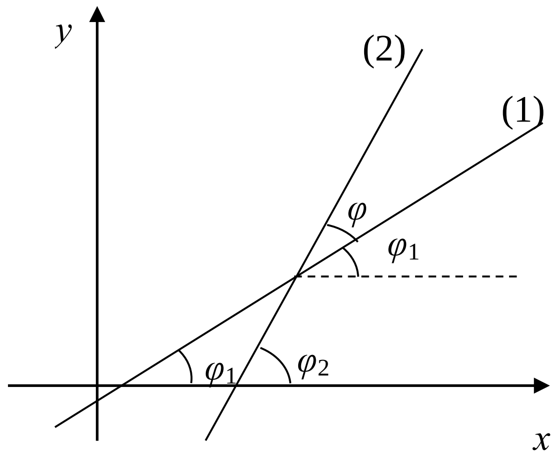



Рис. 14

Кутом $\varphi$ між прямими (1) і (2) називається кут, на який треба повернути першу пряму проти годинникової стрілки до збігу з другою прямою (рис. 14) .

Позначимо через $\varphi_1$ та $\varphi_2$ кути нахилу до осі $0x$ прямих (1) та (2). З малюнка видно, що $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Звідси $\quad \mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \dfrac{\mathrm{tg}\varphi_2 - \mathrm{tg}\varphi_1}{1 + \mathrm{tg}\varphi_1 \cdot \mathrm{tg}\varphi_2}$.

Оскільки _ $\mathrm{tg}\varphi_1 = k_1$, $\mathrm{tg}\varphi_2 = k_2$ отримуємо формулу

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

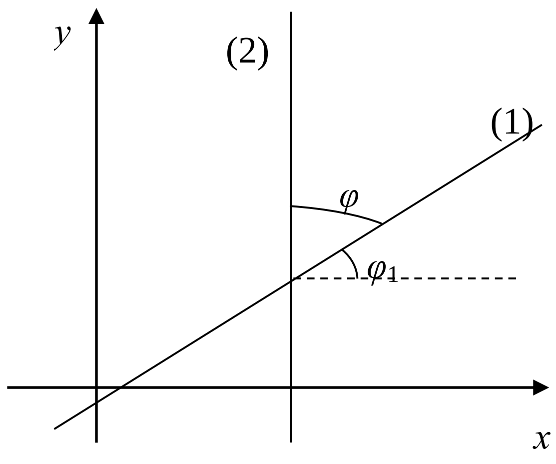



Рис. 15

Зауважимо, що якщо одна із заданих прямих паралельна осі $0y$, отримана формула не має сенсу. Нехай, наприклад, пряма (2) паралельна осі $0y$ (рис. 15). В цьому випадку

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi_1.$$

Нехай прямі (1) та (2) паралельні. Тоді вони утворюють з віссю $0x$ однакові кути, тобто

$$\varphi_2 = \varphi_1 \Rightarrow \mathrm{tg}\varphi_2 = \mathrm{tg}\varphi_1 \Rightarrow k_2 = k_1.$$

Таким чином, **умова паралельності** двох прямих має вигляд

$$k_2 = k_1.$$

Нехай прямі (1) та (2) перпендикулярні. Тоді $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$.

Тоді $\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \varphi_1) = -\operatorname{ctg}\varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}$. Враховуючи те, що $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$, $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$, отримуємо **умову перпендикулярності** двох прямих:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

**Приклад 1.**

У паралелограмі *ABCD* відомі рівняння двох сторін *AB*: $x + 2y - 4 = 0$, *AD*: $2x - 3y - 1 = 0$ та координати вершини $C(3; 2)$.Написати рівняння сторін *BC* і *CD*.

*Розв'язання*.

Відомо, що у паралелограмі протилежні сторони паралельні. Сторона *BC* паралельна стороні *AD*. За умовою рівняння сторони *AD* має вигляд: $2x - 3y - 1 = 0$. Звідси знаходимо $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Кутовий коефіцієнт $k_{AD} = \frac{2}{3}$.

З умови паралельності двох прямих отримуємо $k_{BC} = \frac{2}{3}$. Використовуючи рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку, записуємо рівняння сторони *BC*:

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - 3) \quad \Rightarrow \quad 2x - 3y = 0.$$

Аналогічно знаходимо рівняння сторони *CD*. За умовою рівняння сторони *AB* має вигляд: $x + 2y - 4 = 0$. Звідси $k_{AD} = -\frac{1}{2}$. Сторона *CD* паралельна *AB*, тому $k_{CD} = -\frac{1}{2}$. Записуємо рівняння сторони *CD*:

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3) \quad \Rightarrow \quad x + 2y - 7 = 0.$$

Таким чином, отримано рівняння сторін:

$$BC:\ 2x - 3y = 0,$$

$$CD:\ x + 2y - 7 = 0.$$

**Приклад 2**.

$A(1; 0)$, $B(3; 6)$, $C(5; 2)$ – вершини трикутника *ABC*. Написати рівняння висоти *AM*.

*Розв'язання.*

Висота *АМ* перпендикулярна стороні *СД*. Використовуючи формулу для знаходження кутового коефіцієнта $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, знаходимо кутовий коефіцієнт сторони *BC*: $k_{BC} = \frac{2-6}{5-3} = -2$. Тоді $k_{AM} = -\frac{1}{k_{BC}} = \frac{1}{2}$. Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямку, записуємо рівняння висоти *АМ*:

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x-1) \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

## 3.4. Відстань від точки до прямої.

Нехай задано пряму $ax + by + c = 0$ і точку $M(x_0, y_0)$, яка не належить цій прямій. Потрібно обчислити відстань від точки *M* до прямої. Позначимо цю відстань через $d(M)$. Як відомо, вектор $\overline{n} = (a, b)$ перпендикулярний до прямої $ax + by + c = 0$. Розглянемо довільну точку $L(x, y)$ на прямій (рис. 16). Тоді маємо: $\overline{n} = KN = (a, b)$; $\overline{LM} = (x_0 - x,\ y_0 - y)$; $d(M) = KM$.

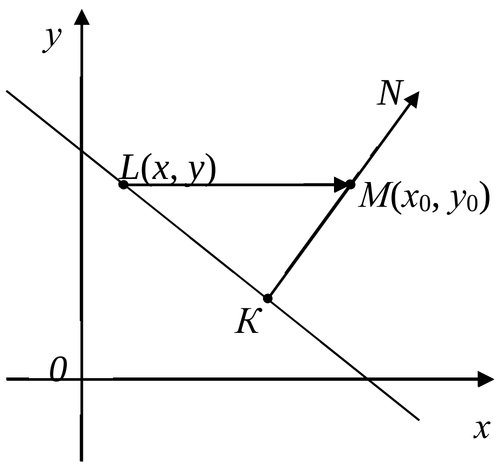



Рис. 16

Використовуючи формулу обчислення проекції вектора $np_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{(\overline{a},\ \overline{b})}{|\overline{b}|}$, отримуємо:

$$d(M) = \frac{|(\overline{LM},\ \overline{n})|}{|\overline{n}|} = \frac{|a(x_0 - x) + b(y_0 - y)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 - (ax + by)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Оскільки точка $L(x, y)$ лежить на прямій, її координати задовольняють рівняння цієї прямої. Тому $ax + by = -c$. З урахуванням цієї рівності отримуємо:

$$d(M) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Приклад 1.**

Знайти відстань від точки $M(-2; 3)$ до прямої $3x - 4y + 1 = 0$.

*Розв'язання.*

В даному випадку $x_0 = -2$; $y_0 = 3$. Отже:

$$d(M) = \frac{|3\cdot(-2) - 4\cdot 3 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-17|}{\sqrt{25}} = \frac{17}{5}.$$

**Приклад 2**.

Обчислити відстань між двома паралельними прямими $3x + 4y + 4 = 0$ (1) та $6x + 8y - 1 = 0$ (2).

*Розв'язання.*

Щоб знайти відстань між двома паралельними прямими, візьмемо на одній із прямих довільну точку та обчислимо відстань від цієї точки до другої прямої. Знаходимо точку, наприклад, на прямій (1). Точка має дві координати. Одній з координат даємо будь-яке значення.

Нехай, наприклад, $x = 0$. Тоді з рівняння (1) одержуємо $y = -1$. Таким чином, отримана точка $M(0; -1)$ на прямій (1) . Обчислюємо відстань від точки $M$ до прямої (2):

$$d(M) = \frac{|6\cdot 0 + 8\cdot(-1) - 1|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}.$$

Отже, відстань між двома заданими прямими дорівнює $\frac{9}{10}$.

## 3.5. Півплощина

Нехай на площині задана деяка пряма, що описується рівнянням $ax + by + c = 0$. Ця пряма ділить площину на дві частини, які називають півплощинами. Відомо, що координати будь-якої точки, що лежить на прямій, задовольняють рівняння прямої $ax + by + c = 0$, і координати будь-якої точки, що не лежить на цій прямій, цього рівняння не задовольняють. Отже, координати точок, що належать півплощині (включаючи пряму), задовольняють одну з нерівностей $ax + by + c \geq 0$ або $ax + by + c \leq 0$. Для того, щоб за заданою нерівністю знайти необхідну напівплощину, необхідно:

1) побудувати пряму $ax + by + c = 0$,

2) взяти довільну точку, що не лежить на заданій прямій, і підставити її координати в нерівність $ax + by + c \geq 0$ ($ax + by + c \leq 0$). Якщо при підстановці

координат точки виходить правильна нерівність, то точка належить необхідної півплощини, тобто необхідна півплощина – це півплощина, в якій лежить ця точка. Якщо ж при підстановці координат точки виходить неправильна нерівність, то точка не належить необхідної півплощини, тобто необхідна півплощина знаходиться з протилежного боку від прямої.

Якщо потрібно побудувати область, задану системою нерівностей, будуємо півплощини, що визначаються заданими нерівностями і знаходимо їх перетин, тобто множину точок, що задовольняють всі нерівності.

**Приклад 1**.

Побудувати півплощину $3x - 4y + 12 \geq 0$.

*Розв'язання.*

Будуємо пряму $3x - 4y + 12 = 0$. Для цього знаходимо дві точки прямої.

| $x$ | 0 | $-4$ |
|---|---|---|
| $y$ | 3 | 0 |

Таким чином, пряма перетинає осі координат у точках $A(0; 3)$ та $B(-4; 0)$ (рис. 17). Пряма розділила площину на дві півплощини. Беремо довільну точку, що не лежить на прямій. За таку точку зручно брати початок координат $(0; 0)$, якщо ця точка не лежить на прямій. Підставляємо координати точки $O(0; 0)$ у нерівність:

$$3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12 \geq 0, \quad \text{тобто} \quad 12 \geq 0.$$

Нерівність вірна. Отже, точка $O(0; 0)$ належить необхідної півплощини. Стрілками вказуємо цю півплощину і позначаємо її штрихуванням.

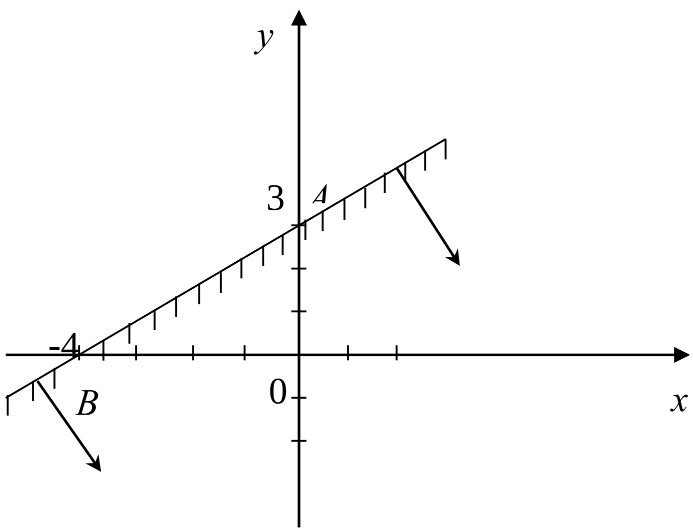



Рис. 17

**Приклад 2.**

Побудувати множину точок, координати яких задовольняють умови:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 2, \\ x - 3y + 6 \geq 0, \\ x - 4 \leq 0. \end{cases}$$

*Розв'язання.*

Будуємо прямі та стрілками вказуємо півплощини, що визначаються заданими нерівностями (рис. 18).

(1): $2x + y = 2$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 2 | 0 |

(2): $x - 3y + 6 = 0$

| $x$ | 0 | − 6 |
|---|---|---|
| $y$ | 2 | 0 |

(3): $x = 4$

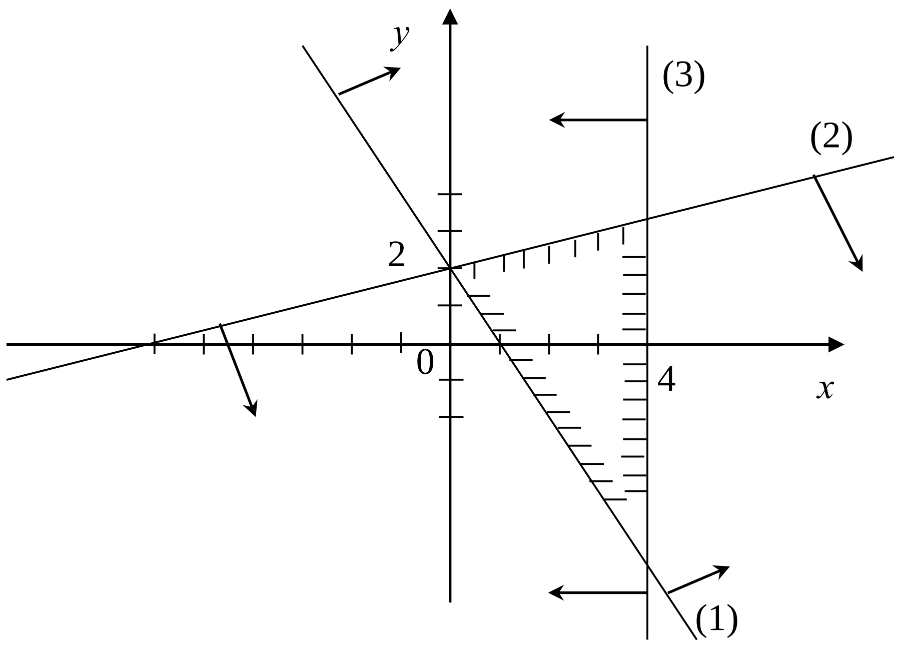



Рис. 18

Перетин півплощин і дає множину точок, координати яких задовольняють задані умови (область позначена штрихуванням).

# Глава 4. Аналітична геометрія у просторі

## 4.1. Поняття рівняння поверхні та лінії в $R_3$

Рівняння $F(x, y, z) = 0$ ( $z = f(x, y)$ ) називають ***рівнянням поверхні*** в просторі $R_3$, якщо йому задовольняють координати будь-якої точки поверхні і не задовольняють координати будь-якої точки, що не належить поверхні. Поверхню в просторі $R_3$ можна визначити також як геометричне місце точок, що задовольняють умову

$$F(x, y, z) = 0 \quad ( z = f(x, y) ).$$

Рівняння поверхні може бути задане у явному чи неявному вигляді: $z = f(x, y)$ – рівняння поверхні ***у явному вигляді*** (формі); $F(x, y, z) = 0$ – рівняння поверхні ***у неявному вигляді.***

В якості прикладу знайдемо рівняння сфери. Як відомо, сфера визначається як геометричне місце точок простору, рівновіддалених від заданої точки $M(a, b, c)$, яка називається центром сфери. Нехай $K(x, y, z)$ – довільна точка сфери. Позначимо відстань від неї до центру сфери через $r$ (радіус сфери). За визначенням сфери $|\overline{MK}| = r$. Вектор $\overline{MK} = (x - a,\ y - b,\ z - c)$. Тоді

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r .$$

Звідси отримуємо рівняння сфери:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 .$$

Зокрема, якщо центр сфери знаходиться у початку координат, рівняння сфери матиме вигляд

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

***Лінію*** у просторі можна розглядати як перетин двох поверхонь

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

тобто лінія є геометричне місце точок, координати яких задовольняють систему двох рівнянь із трьома невідомими. Лінія у просторі може бути задана також у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t), \\ y = \varphi_2(t), \\ z = \varphi_3(t). \end{cases}$$

($t$ – деякий параметр).

**Приклад.**

Знайти координати центру сфери та її радіус, якщо рівняння сфери задано у вигляді $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

*Розв'язання.*

Перетворимо рівняння сфери:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + z^2 - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 4.$$

З отриманого рівняння випливає, що центр сфери знаходиться у точці $M(1; -2; 0)$, а радіус сфери $r = 2$.

## 4.2. Площина в $R_3$. Кут між двома площинами

Нехай у просторі задана довільна площина і $M(x_0, y_0, z_0)$ – яка-небудь точка на ній. Позначимо через $\bar{n} = (a, b, c)$ ненульовий вектор, перпендикулярний до цієї площини (нормаль). Візьмемо на площині довільну точку $K(x, y, z)$. Оскільки вектор $\bar{n}$ перпендикулярний площині, то він перпендикулярний будь-якому вектору, що їй належить, тобто вектор $\bar{n}$ перпендикулярний вектору $\overline{MK} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$. Скористаємося умовою ортогональності двох векторів $(\bar{n},\ \overline{MK}) = 0$. Звідси отримуємо ***рівняння площини, яка проходить через задану точку*** $M(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (a, b, c)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Перетворимо отримане рівняння:

$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0.$$

Введемо позначення $(-ax_0 - by_0 - cz_0) = d$. Тоді рівняння площини запишеться у вигляді:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Отримане рівняння називається ***загальним рівнянням*** площини.

Нехай задано дві площини: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ (1) та $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ (2). Потрібно знайти кут $\varphi$ між цими площинами. Кут між двома площинами дорівнює куту між їхніми нормалями $\bar{n}_1 = (a_1,\ b_1,\ c_1)$ та $\bar{n}_2 = (a_2,\ b_2,\ c_2)$. Скориставшись формулою для знаходження кута між двома векторами, отримуємо:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Якщо дві площини паралельні, то вектори $\bar{n}_1$ та $\bar{n}_2$ колінеарні. Скориставшись умовою колінеарності двох векторів, отримуємо ***умову паралельності*** двох площин:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Якщо ж дві площини перпендикулярні, то вектори $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$ перпендикулярні, тому $(\bar{n}_1,\ \bar{n}_2) = 0$. Звідси отримуємо ***умову перпендикулярності*** двох площин:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$$

**Приклад.**

Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;\ –2;\ –1)$ паралельно площині $2x + 5y - z + 1 = 0$.

*Розв'язання.*

Оскільки шукана площина паралельна заданій площині, вектор нормалі заданої площини $\bar{n} = (2;\ 5;\ –1)$ буде також вектором нормалі шуканої площини. Скориставшись рівнянням площини, що проходить через задану точку $M(2;\ -2;\ –1)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (2;\ 5;\ -1)$, отримуємо:

$$2(x - 2) + 5(y + 2) - (z + 1) = 0$$

$$2x + 5y - z + 5 = 0.$$

## 4.3. Відстань від точки до площини

Нехай задана деяка площина $ax + by + cz + d = 0$ і точка $M(x_0, y_0, z_0)$, що не належить цій площині. Потрібно обчислити відстань від точки до площини. Розглянемо довільну точку площини $K(x, y, \text{z})$ (рис. 19).

Запишемо вектор, що з'єднує точки $K$ і $M$: $\overline{KM} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$. Вектор $\bar{n} = (a, b, c)$ перпендикулярний площині.

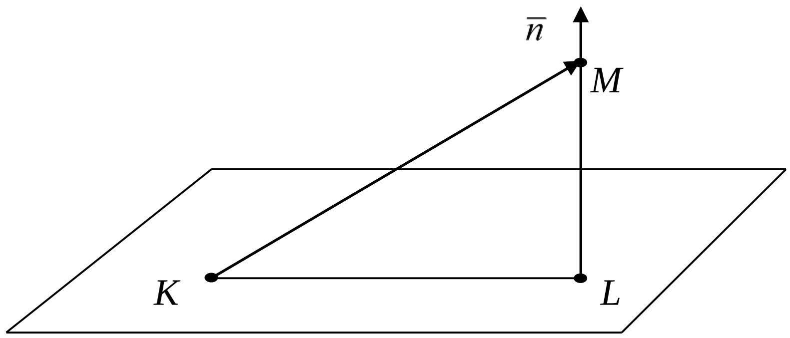



Рис.19

Тоді відстань від точки $M$ до площини:

$$d(M) = LM = \left|np_{\bar{n}}\,\overline{KM}\right| = \frac{\left|\left(\overline{KM},\ \bar{n}\right)\right|}{|\bar{n}|} = \frac{|a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax + by + cz)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Точка $K(x, y, z)$ лежить на площині, тому її координати задовольняють рівняння площини, звідки випливає, що $ax + by + cz = -d$. З урахуванням цієї рівності отримуємо формулу для обчислення відстані від точки до площини:

$$d(M) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Приклад.**

Обчислити відстань від точки $M(3; -2; 1)$ до площини $2x - y - 2z + 3 = 0$

*Розв'язання.*

Використовуючи формулу для обчислення відстані від точки до площини, отримуємо: $d(M) = \dfrac{|2\cdot 3 - (-2) - 2\cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = \dfrac{9}{3} = 3.$

## Питання для самоконтролю

1. Як перевірити, чи належить задана точка $M(x_0, y_0)$ лінії $L$ , що описується рівнянням $y = f(x)$?
2. Як знайти точки перетину двох заданих своїми рівняннями ліній?
3. Що таке кутовий коефіцієнт прямої?
4. Який вигляд має рівняння прямої:
    1) що проходить через початок координат;
    2) що паралельної осі О$x$;

3) що паралельної осі O$y$?

5. Як обчислити кутовий коефіцієнт прямої за відомими координатами двох точок прямої?

6. Який сенс мають коефіцієнти $a$, $b$ у загальному рівнянні прямої $ax + by + c = 0$?

7. Як запишеться:

1) умова паралельності двох прямих;

2) умова перпендикулярності двох прямих?

8. Як обчислити відстань від точки до прямої?

9. Як обчислити відстань між двома паралельними прямими?

10. Яку область на площині визначає нерівність $ax + by + c \geq 0$?

11. Який вигляд має рівняння поверхні в $R_3$?

12. Який сенс мають коефіцієнти $a$, $b$, $c$ у загальному рівнянні площини $ax + by + cz + d = 0$?

13. Як знайти кут між двома площинами?

14. Сформулюйте умову:

1) паралельності двох площин;

2) перпендикулярності двох площин.

15. Як обчислити відстань від точки до площини?

# РОЗДІЛ II . ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

## Глава 5. Матриці та визначники

### 5.1. Основні відомості про матриці

***Матрицею*** розмірності або розміру $m \times n$ називається сукупність $m \cdot n$ чисел, розташованих у вигляді прямокутної таблиці, що містить $m$ рядків та $n$ стовпців.

Кожну таку таблицю беруть у круглі дужки, квадратні дужки або подвійні вертикальні рисочки і позначають великою літерою латинського алфавіту. Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ – матриця розмірності 2 × 3,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$ – матриця розмірності 2 × 2,

$$C = \begin{Vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 6 & -3 \end{Vmatrix}$$ – матриця розмірності 4 × 2.

Числа, що складають матрицю, називаються ***елементами матриці***. Ми позначатимемо їх відповідними маленькими літерами латинського алфавіту з двома індексами. Перший індекс позначає номер рядка, в якому розташований цей елемент, а другий – номер стовпця (рядки нумеруються зверху донизу, а стовпці зліва направо). Так, наприклад, у розглянутих вище прикладах матриць:

$a_{13} = -1$, $a_{21} = 2$,
$b_{12} = -1$, $b_{22} = 7$,
$c_{32} = 1$, $c_{41} = 6$.

У загальному випадку матриця розмірності $m \times n$ записується у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

або, скорочено, $A = (a_{ij})$.

Якщо при цьому необхідно вказати розміри матриці, то пишуть:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \quad \text{або просто} \quad A_{m\times n}.$$

Наведені на початку параграфа матриці із зазначенням розмірності можуть бути записані наступним чином: $A_{2\times3}$, $B_{2\times2}$, $C_{4\times2}$.

Матриця, що складається з одного рядка, називається ***вектор-рядком***. Перший індекс у елементів вектор-рядка зазвичай опускається. Наприклад:

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ – вектор-рядок (матриця розмірності 1 × 4).

Матриця, що складається з одного стовпця, називається ***вектор-стовпцем***. У елементів вектор-стовпця опускається другий індекс. Наприклад:

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – вектор-стовпець (матриця розмірності 3 × 1).

Матрицю розмірності $m \times n$, у якої всі елементи дорівнюють нулю, називають ***нульовою*** матрицею і позначають *0*.

Якщо кількість рядків матриці не збігається з кількістю її стовпців (тобто $m \neq n$ ), то матриця називається ***прямокутною***. В іншому випадку ($m = n$) матриця називається ***квадратною***. Квадратну матрицю, що складається з $n$ рядків і $n$ стовпців, називають квадратною матрицею $n$-го порядку, а число $n$ – порядком цієї матриці. Така матриця має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Сукупність елементів квадратної матриці, розташованих на відрізку, що з'єднує лівий верхній кут з правим нижнім, тобто сукупність елементів $a_{11}$, $a_{22}$, …, $a_{nn}$, називається ***головною діагоналлю*** матриці або просто ***діагоналлю***.

Квадратні матриці, у яких всі елементи, розташовані поза головною діагоналі, дорівнюють нулю, називаються ***діагональними*** та записуються:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо у діагональної матриці всі елементи головної діагоналі рівні 1, то таку матрицю називають ***одиничною*** і позначають *E*:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Поряд з головною діагоналлю іноді розглядають ***побічну діагональ***, під якою розуміють сукупність елементів квадратної матриці, розташованих на відрізку, що з'єднує правий верхній кут з лівим нижнім.

Розглянемо матрицю $A$ довільної розмірності $m \times n$. ***Транспонуванням*** матриці $A$ називається заміна її рядків на стовпці із збереженням їх номерів, тобто першого рядка на перший стовпець, другого рядка на другий стовпець тощо. Отримана таким чином матриця розмірності $n \times m$ називається ***транспонованою*** по відношенню до матриці $A$ і позначається $A^T$. Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{тоді} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дві матриці однакової розмірності називаються ***рівними***, якщо рівні їх елементи, що стоять на однакових місцях, тобто

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \text{для усіх } i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{1,\ n}.$$

## 5.2. Дії над матрицями

До основних дій над матрицями відносяться додавання матриць, множення матриці на число і множення матриць.

***Сумою матриць*** $A$ і $B$ однакової розмірності називається матриця $C$ такої ж розмірності, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць $A$ і $B$. Таким чином,

$$C = A + B \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{для усіх } i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{1,\ n}.$$

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, то

$$A + B = \begin{pmatrix} -3+0 & 4+(-2) & 1+2 \\ 0+1 & 1+3 & 2+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

***Добутком матриці*** $A$ ***на число*** $\alpha$ називається матриця $C$, всі елементи якої рівні відповідним елементам матриці $A$, помноженим на число $\alpha$. Таким чином,

$$C = \alpha A \iff c_{ij} = \alpha a_{ij} \quad \text{для усіх } i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{1,\ n}.$$

Наприклад, якщо

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ то } \quad 2A=\begin{pmatrix} 2\cdot(-1) & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Додавання матриць і множення матриць на число називаються ***лінійними діями*** над матрицями. Із означень цих дій випливають такі очевидні властивості:

1) $A + B = B + A$;
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3) $A + 0 = A$;
4) $1\cdot A = A$;
5) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$;
6) $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta A$;
7) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$.

Тут $A, B, C$ – матриці, $\alpha, \beta$– числа, $0$ – нульова матриця.

За допомогою дій додавання матриць і множення на число визначається різниця матриць.

***Різницею матриць*** $A$ і $B$ однакової розмірності називається матриця $C = A + (-1)\cdot B$.

Таким чином, $C = A - B \iff C_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ для усіх $i=\overline{1,\ m}$, $j=\overline{1,\ n}$.

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, то

$$A-B=\begin{pmatrix} 2-(-1) & 3-1 \\ -1-0 & 0-2 \\ 2-1 & 1-(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

***Добутком матриць*** $A_{m\times n}$ і $B_{n\times p}$ називається матриця $C_{m\times p}$, кожен елемент $c_{ij}$ якої дорівнює сумі добутків елементів $i$-го рядка матриці $A$ на відповідні елементи $j$-го стовпця матриці $B$. Таким чином,

$$C_{m\times p} = A_{m\times n}\cdot B_{n\times p} \iff c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

для усіх $i=\overline{1,\ m}$, $j=\overline{1,\ n}$.

Множення матриць можна проілюструвати наступною схемою:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{nj} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, то

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-2)+(-1)\cdot 0 & 3\cdot 1+(-1)\cdot(-3) \\ 2\cdot(-2)+4\cdot 0 & 2\cdot 1+4\cdot(-3) \\ 5\cdot(-2)+1\cdot 0 & 5\cdot 1+1\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -4 & -10 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матриці можна множити лише тому випадку, якщо кількість елементів у рядку першої матриці дорівнює кількості елементів у стовпці другої, тобто число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої. З визначення добутку матриць видно, що якщо існує добуток матриць $A \cdot B$ , то звідси не випливає існування добутку матриць $B \cdot A$. Так, у наведеному вище прикладі добуток $B \cdot A$ не існує (не визначено).

Якщо $A$ і $B$ квадратні матриці одного порядку, то $A \cdot B$ і $B \cdot A$ мають сенс, але, взагалі кажучи, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Наприклад, якщо

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, то

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+2\cdot 1 & 1\cdot 2+2\cdot(-1) \\ -1\cdot 0+1\cdot 1 & -1\cdot 2+1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ а}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+2\cdot(-1) & 0\cdot 2+2\cdot 1 \\ 1\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot 2+(-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, добуток матриць не комутативний (не переставочний).

Якщо $A \cdot B = B \cdot A$, то матриці $A$ і $B$ називаються ***комутативними*** або переставочними. Кажуть також, що $A$ та $B$ ***комутують***.

Добуток матриць має такі властивості:

1) $EA = AE = A$, де $A$ – квадратна матриця порядку $n$, а $E$ – одинична матриця того ж порядку, тобто $E$ комутує з будь-якою квадратною матрицею того ж порядку. Отже, одинична матриця серед усіх квадратних матриць даного порядку грає в операції множення таку ж роль, як число 1 при множенні чисел.

2) $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A)\cdot B = A \cdot(\alpha B)$.

3) $C \cdot(A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

4) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

5) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

Тут $A$, $B$, $C$ – матриці, $\alpha$ – число.

З властивості 5 випливає, що добуток декількох матриць, записаних у певному порядку, від способу розміщення дужок не залежить. Наприклад, всі п'ять можливих способів обчислення добутку чотирьох матриць $((AB)C)D$, $(A(BC))D$, $A((BC)D)$, $A(B(CD))$, $(AB)(CD)$ дають один і той же результат.

Зазначимо також, що квадратні матриці можна підносити до степеня. За означенням: $A^0 = E$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, $\ldots$. Оскільки в добутках кількох матриць дужки можна розставляти довільно, то для будь-яких цілих невід'ємних $p$ і $q$ маємо $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$, $(A^p)^q = A^{pq}$.

Означення добутку матриць формулюється складніше і здається менш природним, ніж означення суми. Однак, якби хтось захотів визначити добуток матриць однакових розмірів, помножуючи відповідні елементи, то такий добуток не знайшов би істотних застосувань. Щодо введеного добутку матриць, воно, як незабаром буде показано, широко застосовується.

## 5.3. Визначники другого та третього порядку

Кожній квадратній матриці $A$ ставиться у відповідність за певним правилом деяке число, яке називається її ***визначником*** (***детермінантом***) і позначається $|A|$ або $\det A$. Якщо матриця задана як таблиця чисел, то визначник позначають, беручи цю таблицю в вертикальні рисочки. Елементи матриці $A$, її діагоналі, рядки та стовпці будемо називати відповідно елементами, діагоналями, рядками та стовпцями визначника $|A|$.

***Визначником першого порядку***, тобто визначником матриці, утвореної одним числом, називається саме це число.

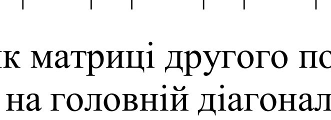
Нехай дана матриця другого порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

***Визначником другого порядку,*** тобто визначником цієї матриці, називається число $|A|$, що обчислюється за формулою

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ця формула ілюструється такою схемою:



Таким чином, визначник матриці другого порядку дорівнює добутку елементів матриці, що стоять на головній діагоналі, мінус добуток елементів, що стоять на побічній діагоналі. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - (-2)\cdot 4 = 15 + 8 = 23.$$

Варто зауважити, що кожен доданок формули (з точністю до знака) є добуток елементів визначника, взятих по одному з кожного стовпця і кожного рядка.

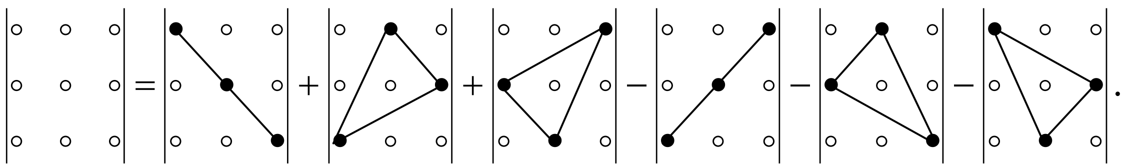
Нехай дана матриця третього порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

***Визначником третього порядку,*** тобто визначником цієї матриці, називається число $|A|$, що обчислюється за формулою:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для обчислення визначників третього порядку зручно користуватися правилом трикутників, що ілюструється схемою:

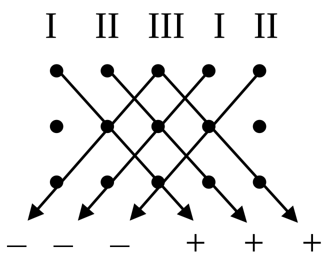


Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot(-3) + (-1)\cdot(-2)\cdot(-5) + 3\cdot 0\cdot 2 - 2\cdot 4\cdot(-5) - 3\cdot(-1)\cdot(-3) -$$

$$-0\cdot(-2)\cdot 1 = -12 - 10 + 40 - 9 = 9.$$

Можна навести інше просте правило обчислення визначників третього порядку. Для цього складемо таблицю (Саррюса), отриману з елементів визначника, якщо приписати до них праворуч ще раз перший та другий стовпці. Візьмемо зі знаком «+» добуток елементів, що стоять на головній діагоналі визначника, а також добутки елементів, що стоять на двох паралелях до неї, що містять по три елементи.



Добутеи елементів, що стоять на побічній діагоналі і на двох паралелях до неї, що містять по три елементи, візьмемо зі знаком «–». Сума цих шести добутків дає шуканий визначник. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ - \; - \; - & & + & + & + \end{array} =$$

$$3\cdot(-2)\cdot 0+2\cdot(-3)\cdot 5+(-1)\cdot 4\cdot 1-(-1)\cdot(-2)\cdot 5-3\cdot(-3)\cdot 1-2\cdot 4\cdot 0=-30-4-10+9=-35$$

Так само, як і в визначнику другого порядку, кожен доданок формули (з точністю до знака + або –) дорівнює добутку трьох елементів визначника, взятих по одному з кожного стовпця та кожного рядка.

Розглянемо ще один спосіб обчислення визначників другого та третього порядку. Для цього введемо поняття мінору та алгебраїчного доповнення елемента $a_{ij}$.

***Мінором*** $M_{ij}$ елемента $a_{ij}$ називається визначник тієї матриці, яку ми отримаємо з вихідної після викреслення $i$-го рядка і $j$-го стовпця, тобто того рядка і стовпця, які містять даний елемент.

Наприклад, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ то } M_{12}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1,\; M_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3.$$

Якщо $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, то $M_{21}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}=18-24=-6$,

$$M_{32}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=0-12=-12,\; M_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=32-35=-3.$$

***Алгебраїчним доповненням*** $A_{ij}$ елемента $a_{ij}$ називається мінор цього елемента, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij},$$

тобто алгебраїчне доповнення збігається з мінором, коли сума номерів рядка і стовпця $(i+j)$ – парне число, і відрізняється від мінору знаком, коли $(i+j)$ – непарне число.

Наприклад, для елементів щойно розглянутої матриці $A$ третього порядку маємо:

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=-M_{21}=6,$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=-M_{32}=12,$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = M_{13} = -3.$

Повернемося до визначників другого порядку. Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}:$$

$A_{11} = (-1)^{1+1}a_{22} = a_{22}$, $\quad A_{12} = (-1)^{1+2}a_{21} = -a_{21}$,
$A_{21} = (-1)^{2+1}a_{12} = -a_{12}$, $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}a_{11} = a_{11}$.

Тому визначник другого порядку може бути записаний так:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} + a_{12}(-a_{21}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12},$$

тобто він дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення. Отримана формула називається розкладанням визначника за елементами першого рядка.

Очевидно, що також справедливі наступні три формули:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} + (-a_{12})a_{21} = A_{22}a_{22} + A_{21}a_{21} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} -$$

розкладання визначника за елементами другого рядка;

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} + (-a_{12})a_{21} = a_{11}A_{11} + A_{21}a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} -$$

розкладання визначника за елементами першого стовпця;

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} + a_{12}(-a_{21}) = A_{22}a_{22} + a_{12}A_{12} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} -$$

розкладання визначника за елементами другого стовпця.

*Таким чином, визначник другого порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.*

Таку саму властивість має і визначник третього порядку. Перевіримо це для елементів, наприклад, другого рядка. Для цього знайдемо необхідні алгебраїчні доповнення елементів матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}:$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}.$$

Розглянемо формулу

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

У правій частині винесемо за дужки числа, що є елементами другого рядка:

$$|A| = a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}).$$

Вирази, що стоять у дужках при елементах $a_{ij}$, дорівнюють обчисленим вище алгебраїчним доповненням цих елементів. Отже, отримуємо розкладання визначника за елементами другого рядка:

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

Аналогічно можна отримати розкладання визначника за елементами будь-якого іншого рядка або стовпця.

*Таким чином, визначник третього порядку (як і визначник другого порядку) дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або будь-якого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.*

**Приклад .**

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання.*

Розкладемо визначник за елементами першого рядка. Отримуємо:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2-5) + 1\cdot(-4+5) - 2\cdot(4+2) = -21 + 1 - 12 = -32.$$

## 5.4. Визначники $n$-го порядку

У попередньому параграфі було показано, що визначники другого та третього порядків мають однакову властивість – вони дорівнюють сумі добутків елементів будь-якого рядка чи стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення. Тим самим обчислення визначників другого порядку зводиться до обчислення визначників першого порядку, а визначників третього порядку – до обчислення визначників другого порядку.

Можна показати (так само, як це було зроблено вище для визначників другого та третього порядків), що у довільної матриці четвертого порядку сума добуткыв елементів $a_{ij}$ будь-якого рядка або будь-якого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення $A_{ij}$, які є визначниками третього порядку, є величина стала. Вона називається визначником четвертого порядку. Тепер можна аналогічним чином ввести поняття визначника п'ятого порядку, виразивши його через алгебраїчні доповнення елементів будь-якого рядка або стовпця, тобто визначники четвертого порядку, які вже визначені. І так далі. Таким чином, приходимо до наступного означення.

***Визначником n-го порядку*** називається число $|A|$, що обчислюється за однією з формул:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \ ,$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \ .$$

Перша формула називається **розкладанням визначника за елементами *i*-го рядка**, друга – **розкладанням визначника за елементами *j*-го стовпця**.

Відповідно до означення обчислення визначників $n$-го порядку зводиться до обчислення більш простих визначників ($n$ - 1)-го порядку.

**Приклад.**

Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання.*

У принципі, розкласти визначник можна за елементами будь-якого рядка (стовпця). Однак обсяг обчислень можна істотно зменшити, якщо вибрати такий рядок (стовпець), в якому є елементи, що дорівнюють нулю. При цьому чим більше нулів, то краще. Найбільш зручним в нашому випадку є третій рядок або четвертий стовпець, які містять по два нулі. Розкладемо визначник за елементами третього рядка, а визначники третього порядку, що вийшли в результаті, – за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 2 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2&0\\-1&1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=1\cdot\left(2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\0&-1\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}\right)+$$

$$+2\cdot\left(1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\1&-1\end{vmatrix}\right)=1\cdot(2\cdot(-2)+1\cdot(-1-2))+$$

$$+2\cdot(1\cdot(-1-2)-2\cdot(1-1))=1\cdot(-7)+2\cdot(-3)=-13.$$

## 5.5. Основні властивості визначників

***1. Визначник не змінюється при транспонуванні матриці.***

*Доведення.* Доведемо цю властивість для визначників третього порядку. За правилом трикутників маємо:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11},$$

$$\left|A^T\right|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}$$

Очевидно, що

$$|A|=|A^T|$$

Ця властивість свідчить про рівноправність рядків та стовпців визначника. Інакше кажучи, будь-яке твердження, доведене для рядків визначника, буде справедливим і для його стовпців, і навпаки. Тому всі властивості визначників, що розглядаються далі, будемо доводити тільки для його рядків.

***2. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник також дорівнює нулю.***

*Доведення.* Дійсно, якщо всі елементи $i$ -го рядка визначника дорівнюють нулю, то, розклавши визначник по елементах цього рядка, отримаємо:

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=0\cdot A_{i1}+0\cdot A_{i2}+\ldots+0\cdot A_{in}=0.$$

***3. При перестановці місцями двох рядків (стовпців) визначник змінює знак.***

*Доведення.* Доведемо цю властивість для визначників третього порядку. За правилом трикутників отримуємо:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Переставимо місцями, для визначеності, перший і другий рядки, а потім обчислимо отриманий визначник $|A'|$:

$$|A'|=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{12}a_{33}+a_{22}a_{13}a_{31}+a_{11}a_{32}a_{23}-a_{23}a_{12}a_{31}-a_{22}a_{11}a_{33}-a_{13}a_{32}a_{21}.$$

Отриманий вираз $|A'|$ складається з тих самих шести доданків, як і вираз для $|A|$, але взятих з протилежним знаком. Отже, $|A'|=-|A|$.

***4. Визначник, що має два однакові рядки (стовпці), дорівнює нулю.***

*Доведення.* Поміняємо місцями у визначнику $|A|$ однакові рядки (стовпці). Отриманий визначник $|A'|$, очевидно, нічим не відрізняється від вихідного, тому $|A'|=|A|$. З іншого боку, за властивістю 3 маємо $|A'|=-|A|$. Отже, $|A|=-|A|$, звідки $2|A|=0$, отже $|A|=0$.

***5. Загальний множник елементів будь-якого рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника.***

*Доведення.* Нехай, для визначеності, всі елементи першого рядка мають загальний множник $k$ тобто мають вигляд $ka_{1j}$. Обчислимо визначник, розклавши його за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=ka_{11}A_{11}+ka_{12}A_{12}+...+ka_{1n}A_{1n}=$$

$$=k(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+...+a_{1n}A_{1n})=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, на відміну від матриці, за знак якої можна виносити загальний множник лише всіх елементів, за знак визначника виноситься загальний множник елементів одного рядка чи стовпця. Наприклад:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{але} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Цю властивість можна сформулювати також так: якщо всі елементи якогось рядка або стовпця визначника помножити на число $k$, то визначник також помножиться на це число $k$.

***6. Визначник, що містить два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює нулю.***

*Доведення.* Нехай $i$-ий і $j$-ий рядки визначника пропорційні, тобто

$$a_{j1} = ka_{i1}, \quad a_{j2} = ka_{i2}, \quad \ldots, \quad a_{jn} = ka_{in}.$$

Тоді, застосовувавши властивість 5 про винесення загального множника елементів рядка за знак визначника та властивість 4 про рівність нулю визначника з однаковими рядками, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

***7. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) цього визначника дорівнює нулю***, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{pk} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq p,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kp} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq p.$$

*Доведення.* Розглянемо визначник $|A'|$, отриманий із вихідного визначника $|A|$ заміною $p$-го рядка на $i$-й:

$$|A'|=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -i\text{-й рядок} \\ \\ -p\text{-й рядок.} \\ \\ \end{matrix}$$

Визначник $|A'|$ має два однакові рядки, тому відповідно до властивості 4, $|A'|=0$. З іншого боку, розкладавши його за елементами $p$-го рядка, отримуємо:

$$|A'|=a_{i1}A_{p1}+a_{i2}A_{p2}+...+a_{in}A_{pn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{pk}.$$

Отже, $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{pk}=0 \quad (i\neq p)$.

***8. Якщо всі елементи і-го рядка представлені у вигляді суми двох доданків:***

$$a_{ik}=a'_{ik}+a''_{ik},$$

***то і весь визначник можна подати у вигляді суми двох визначників,*** у яких елементами $i$-го рядка є відповідно перші та другі доданки, а всі інші рядки такі ж, як у вихідного визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \cdots & a'_{in}+a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Аналогічне твердження має місце й для стовпців.

*Доведення*. Позначимо визначники, які стоять у правій частині рівності, $|A'|$ і $|A''|$ відповідно. Розкладемо вихідний визначник $|A|$ за елементами $i$-го рядка і скористаємося тим, що алгебраїчні доповнення елементів $i$-го рядка для усіх трьох визначників однакові. Отримуємо:

$$|A|=(a'_{i1}+a''_{i1})A_{i1}+(a'_{i2}+a''_{i2})A_{i2}+...+(a'_{in}+a''_{in})A_{in}=(a'_{i1}A_{i1}+a'_{i2}A_{i2}+...+a'_{in}A_{in})+$$

$$+(a''_{i1}A_{i1}+a''_{i2}A_{i2}+...+a''_{in}A_{in})=|A'|+|A''|.$$

Зрозуміло, що якщо всі елементи якогось рядка представлені у вигляді суми $k$ доданків, то визначник також можна подати як суму $k$ визначників.

**Приклад.**

Знайти значення визначника

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання.*

Елементи першого стовпця є сумою двох доданків, тому відповідно до властивості 8 маємо:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & x \\ 1 & 2 & b & x \\ 1 & 3 & c & x \\ 1 & 4 & d & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 1 & a & x \\ 2b & 2 & b & x \\ 2c & 3 & c & x \\ 2d & 4 & d & x \end{vmatrix}.$$

У першому визначнику перший стовпець пропорційний останньому, у другому перший стовпець пропорційний третьому. Отже, за властивістю 6 обидва вони дорівнюють нулю, отже, $|A| = 0$.

***9. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів якогось рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на число k.***

*Доведення.* Нехай, для визначеності, до елементів першого рядка додані елементи другого рядка, помножені на $k$. Обчислимо отриманий визначник $|A'|$, використовуючи властивості 8 та 6:

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & .... & a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & ... & ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + 0 = |A|.$$

***10. Визначник добутку двох квадратних матриць порядку n дорівнює добутку їх визначників:*** $|AB| = |A| \cdot |B|$.

*Доведення.* Доведемо для матриць другого порядку. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \text{ тоді}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

За властивістю 8 маємо:

$$|AB| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

Перший і останній визначники дорівнюють нулю за властивістю 6, тому що їх рядки пропорційні. Для обчислення другого та третього визначників скористаємося властивостями 5 та 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}|B|,$$

$$\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} = -a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = -a_{12}a_{21}|B|.$$

Таким чином,

$$|AB| = a_{11}a_{22}|B| - a_{12}a_{21}|B| = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})|B| = |A|\cdot|B|.$$

З цієї властивості випливає, що навіть якщо $AB \neq BA$, то все одно $|AB| = |BA|$.

Перелічені властивості визначників дозволяють суттєво спростити їх обчислення, особливо визначників високих порядків.

## 5.6. Обчислення визначників методом зниження порядку

Згідно з означенням, визначник четвертого порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення, які є визначниками третього порядку. Тому обчислення визначника четвертого порядку зводиться до обчислення чотирьох визначників третього порядку.

Обчислення визначника п'ятого порядку зводиться до обчислення п'яти визначників четвертого порядку, а отже, $5 \cdot 4 = 20$ визначників третього порядку.

Обчислення визначника шостого порядку – шести визначників п'ятого порядку, 6 · 20 = 120 визначників третього порядку, тощо.

Такий спосіб обчислення дуже трудомісткий і на практиці, зазвичай, не використовується. У той самий час для визначників деякого спеціального виду такі обчислення не становлять жодної складності. Розглянемо наступний приклад.

**Приклад**.

Обчислити визначник п’ятого порядку

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

*Розв’язання*.

В даному випадку для розкладання доцільно вибрати другий рядок, оскільки наявність у ньому чотирьох нульових елементів дає можливість не обчислювати відповідні алгебраїчні доповнення. В результаті одержуємо не 5, а всього 1 визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Тепер для розкладання виберемо з тієї ж причини третій рядок, в результаті отримуємо не 4 визначники третього порядку, а лише один:

$$= -2 \cdot 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Отриманий визначник можна обчислити будь-яким способом, розглянутим вище. Але найшвидше отримаємо результат, розклавши визначник по елементах другого рядка:

$$= -6 \cdot (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = 6.$$

Розглянутий приклад демонструє, що якщо у визначника $n$-го порядку є рядок (або стовпець), всі елементи якого, за винятком одного, дорівнюють нулю, то розклавши визначник за елементами цього рядка (цього стовпця), замість $n$

визначників ($n$-1)-го порядку отримуємо всього один визначник ($n$-1)-го порядку. Звісно, на практиці визначники такого виду зустрічаються рідко. Тож обчислення визначників високих порядків рекомендується застосовувати **метод зниження порядку**, який полягає у наступному. Використовуючи властивості визначників (в основному властивість 9), вихідний визначник перетворюється так, щоб у певному рядку або стовпчику залишився один відмінний від нуля елемент. Після цього визначник розкладається за елементами цього рядка (чи стовпця), у результаті порядок визначника знижується на одиницю. Ця процедура повторюється доти, доки не буде отримано визначник другого чи третього порядку, який обчислюється безпосередньо.

**Приклад.**

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

*Розв'язання.*

Перетворимо визначник так, щоб у другому рядку всі елементи, крім одиниці, що стоїть у третьому стовпці, обернулися на 0. Для цього помножимо елементи третього стовпця на (–2) і додамо до відповідних елементів першого стовпця. Потім елементи того самого третього стовпця помножимо на (–1) і додамо до елементів другого стовпця. Третій стовпець перепишемо без зміни. Без зміни також перепишемо четвертий стовпець, тому що його елемент, що стоїть у другому рядку, вже дорівнює нулю. Отримуємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

Розкладаємо отриманий визначник за елементами другого рядка:

$$= 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

Отриманий визначник третього порядку можна обчислити за правилом трикутників або за допомогою таблиці Саррюса, проте можна продовжити спрощення визначника. «Обнулим» усі елементи третього стовпця, за винятком одиниці, що стоїть у першому рядку. Для цього елементи першого рядка визначника, попередньо помноживши на (–2), додамо до елементів другого рядка. Потім елементи того ж першого рядка, помноживши на 3, додамо до елементів третього рядка. Перший рядок перепишемо без змін:

$$=-1\cdot\begin{vmatrix}-5 & -1 & 1\\ 13 & 5 & 0\\ -16 & -5 & 0\end{vmatrix}=$$

Розкладавши за елементами третього стовпця, отримуємо:

$$=-1\cdot 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}13 & 5\\ -16 & -5\end{vmatrix}=-1\cdot\left(-65+80\right)=-15.$$

## 5.7. Обернена матриця

Як відомо, для кожного числа $a \neq 0$ існує таке число $a^{-1}$, що

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Число $a^{-1}$ називається оберненим до $a$. Якщо розглядати квадратні матриці $n$-го порядку, то в цій множині матриць одинична матриця $E$ грає роль одиниці. Природно порушити питання існування оберненої матриці $A^{-1}$, тобто такої матриці, що у добутку з вихідною матрицею $A$ дає одиничну матрицю $E$. Це питання і розглядається в даному параграфі.

Квадратна матриця $A^{-1}$ називається ***оберненою*** для квадратної матриці того ж порядку, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Однак, не кожна квадратна матриця має обернену. Аналогічно тому, як число $a = 0$ не має оберненого, так і ті квадратні матриці, визначник яких дорівнює нулю, також не мають обернених. Справді, з рівності $A \cdot A^{-1} = E$, користуючись тим, що $|E| = 1$, отримуємо:

$$|A \cdot A^{-1}| = |E| = 1.$$

З іншого боку, згідно з властивістю 10 визначників маємо:

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|.$$

Отже, $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$, звідки витікає $|A| \neq 0$ у разі існування для матриці оберненої. Отже, якщо $|A| = 0$, то $A$ оберненої матриці не має.

Квадратна матриця $A$ називається ***невиродженою чи неособливою***, якщо $|A| \neq 0$ і ***виродженою або особливою*** , якщо $|A| = 0$.

Вироджені матриці, як було показано, обернених не мають. Займемося вивченням невироджених матриць. Справедлива наступна теорема.

**Теорема**. Будь-яка невироджена матриця $A$ має єдину обернену матрицю $A^{-1}$.

*Доведення*. **1**. Доведемо існування оберненої матриці. Для цього розглянемо наступну квадратну матрицю $A^*$, яка називається ***приєднаною*** до $A$:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

У рядках матриці $A^*$ розташовані алгебраїчні доповнення $A_{ij}$ елементів відповідних стовпців матриці $A$. Таким чином, для побудови приєднаної матриці $A^*$ необхідно спочатку замінити елементи $a_{ij}$ на їх алгебраїчні доповнення $A_{ij}$, а потім отриману матрицю транспонувати. Зрозуміло, що поняття приєднаної матриці має сенс для будь-якої квадратної матриці (як виродженої, так і невиродженої). Обчислимо добуток $A \cdot A^*$:

$$B = A \cdot A^* = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & A_{j1} & \dots \\ \dots & A_{j2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & A_{jn} & \dots \end{pmatrix}.$$

(Нагадаємо, що в $j$-му стовпці матриці $A^*$ стоять алгебраїчні доповнення елементів $j$-го рядка матриці $A$ ). За правилом множення матриць для елементів $b_{ij}$ матриці $B$ маємо:

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}\,.$$

Але згідно з властивістю 7 визначників права частина отриманої рівності дорівнює нулю при $i \neq j$. У разі ж $i = j$, згідно з означенням, ми отримуємо $|A|$. (Розкладання визначника по елементах $i$-го рядка).

Отже,

$$b_{ij} = \begin{cases} |A| & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Тому матриця $B$ є діагональною, причому елементи її головної діагоналі дорівнюють визначнику вихідної матриці:

$$B = A \cdot A^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot E.$$

Аналогічно перевіряється рівність $A^* \cdot A = |A| \cdot E$. Таким чином, встановлено основну властивість приєднаної матриці $A^*$:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = |A| \cdot E.$$

Оскільки за умовою теореми $A$ – невироджена матриця ($|A| \neq 0$), то, поділивши цю рівність на $|A|$, отримаємо:

$$A \cdot \left( \frac{1}{|A|} \cdot A^* \right) = \left( \frac{1}{|A|} \cdot A^* \right) \cdot A = E .$$

Отже, згідно з означенням оберненої матриці,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*.$$

Цим ми встановили, що будь-яка невироджена матриця $A$ має обернену.

**2**. Доведемо єдиність оберненої матриці. Припустимо, що у матриці $A$ існує ще одна обернена матриця $B$:

$$A \cdot B = B \cdot A = E.$$

Розглянемо рівність $A \cdot B = E$ і помножимо її зліва на $A^{-1}$:

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot E.$$

Оскільки $A^{-1} \cdot A \cdot B = E \cdot B = B$ та $A^{-1} \cdot E = A^{-1}$, то отримуємо $B = A^{-1}$, тобто, якщо обернена матриця існує, то вона єдина.

У процесі доведення теореми було вказано можливий ***алгоритм обчислення оберненої матриці***:

**1**. Знаходимо визначник вихідної матриці. Якщо $|A| = 0$, то матриця $A$ вироджена і оберненої матриці $A^{-1}$ не існує. Якщо $|A| \neq 0$, то матриця $A$ має єдину обернену матрицю $A^{-1}$.

**2**. Знаходимо алгебраїчні доповнення $A_{ij}$ всіх елементів матриці $A$.

**3**. Складаємо приєднану матрицю $A^*$, розташовуючи алгебраїчні доповнення елементів $i$-го рядка матриці $A$ в $i$-му стовпці матриці $A^*$.

**4**. Обчислюємо обернену матрицю за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*.$$

**5**. Перевіряємо правильність обчислення оберненої матриці, виходячи із її означення.

**Приклад**. Знайти матрицю, обернену до даної:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язок*.

1. Знаходимо $|A|$, розкладаючи визначник за елементами першого стовпця:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) - 3\cdot(-4) = 10 \neq 0$$

тобто матриця $A$ невироджена і обернена матриця $A^{-1}$ існує.

2. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці $A$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

3. Складаємо приєднану матрицю:

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислюємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & -0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & -0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

5. Робимо перевірку:

$$A\cdot A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot A\cdot A^* = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2+18-6 & -2-12+14 & -8+12-4 \\ 0+6-6 & 0-4+14 & 0+4-4 \\ 3-6+3 & 3+4-7 & 12-4+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = E.$$

Таким чином, обернену матрицю знайдено вірно.

Для невироджених матриць виконуються такі властивості:

1. $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$, 3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$,

2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$, 4. $\left(A^{m}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{m}$.

Ці властивості легко перевірити, використовуючи означення оберненої матриці та властивість 10 визначників. Зазначимо, що властивість 3 справедлива і у разі довільного числа множників. Наприклад, якщо $A$, $B$ і $C$ – три невироджені матриці $n$-го порядку, то $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$.

## Питання для самоконтролю

1. Що називається матрицею?
2. Що розуміється під операцією транспонування матриці? Чи існує транспонована матриця для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$?
3. За яким правилом додаються матриці? Чи можна додати дві матриці з розмірностями $2 \times 3$ і $3 \times 1$?
4. Чи можна від однієї матриці відняти іншу? Як це зробити? Які умови мають задовольняти ці матриці? Яку розмірність має матриця, яка є результатом цієї операції?
5. Як множаться матриці? Чи можна помножити матрицю розмірності $2 \times 3$ на матрицю такої ж розмірності?
6. Яка розмірність матриці $A$ якщо відомо, що $(1 \;\; 3 \;\; 5) \cdot A = (-1 \;\; 2)$?
7. Які властивості має операція множення матриць?
8. Яка матриця виконує роль одиниці в операції множення матриць $n$-го порядку?
9. Чи існує визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$?
10. Що таке правило трикутників? Як обчислити визначник третього порядку, використовуючи таблицю Саррюса?
11. Що таке мінор та алгебраїчне доповнення елемента $a_{ij}$?
12. Як вводиться поняття визначника $n$-го порядку?
13. У чому суть метода зниження порядку, який застосовується при обчисленні визначників?
14. Яка матриця називається оберненою для даної матриці $A$?
15. Для яких матриць існує обернена матриця $A^{-1}$?
16. Який алгоритм знаходження оберненої матриці?

# Глава 6. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

## 6.1. Основні поняття та форми запису

Розглянемо систему $m$ лінійних рівнянь із $n$ невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Загалом таку систему можна записати в наступному вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Така форма запису називається ***розгорнутою.***

Іноді буває зручно використовувати інші, більш компакті форми запису. Наприклад, за допомогою знаку суми систему рівнянь можна записати так:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,\ m}.$$

Поряд із цим використовується ***матрична форма*** запису системи рівнянь. Позначимо через $A$ матрицю, складену з коефіцієнтів при невідомих, через $X$ – вектор-стовпець невідомих, через $B$ – вектор-стовпець правих частин системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тоді систему лінійних рівнянь можна записати у вигляді:

$$AX = B.$$

Система лінійних рівнянь називається ***однорідною*** , якщо $b_i = 0,\ i = \overline{1,\ m}$. У матричній формі однорідна система записується у вигляді:

$$AX = 0.$$

***Розв'язком*** системи лінійних рівнянь називається сукупність значень невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, яка після підстановки її в рівняння цієї системи, обертає їх у тотожність.. Система лінійних рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок. В іншому випадку система називається ***несумісною***.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок. Якщо система рівнянь має більше одного розв'язку, то вона називається ***невизначеною***. Однорідна система рівнянь завжди визначена, тому що вектор $X = 0$ є її розв'язком за будь-яких коефіцієнтів при невідомих у лівій частині рівнянь.

Розглянемо найпростіші приклади.

Система рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

є сумісною, причому визначеною, тому що має єдиний розв'язок $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Система рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

має безліч розв'язків. Дійсно, друге рівняння цієї системи виходить із першого рівняння множенням обох його частин на число 2. Тому система складається фактично з одного рівняння $2x_1 + x_2 = 4$ з двома невідомими. Запишемо це рівняння у вигляді $x_2 = 4 - 2x_1$. Надаючи $x_1$ довільне значення $x_1 = c$, отримуємо $x_2 = 4 - 2c$. Таким чином, при будь-якому значенні $c$ $x_1 = c$, $x_2 = 4 - 2c$ є розв'язком системи.

Система рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

є несумісною, тому що ліві частини рівнянь однакові, а праві частини відрізняються. Отже, ніякі значення $x_1$ і $x_2$ не можуть одночасно задовольняти обидва рівняння.

## 6.2. Формули Крамера

Розглянемо систему $n$ лінійних рівнянь із $n$ невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{6.1}$$

Матриця $A$ системи рівнянь має $n$ рядків та $n$ стовпців, тобто є квадратною матрицею $n$-го порядку. Позначимо через $|A|$ визначник матриці $A$, через $B$ – вектор-стовпець правих частин системи:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Помножимо ліву та праву частину кожного з рівнянь системи (6.1) послідовно на алгебраїчні доповнення $A_{11}$, $A_{21}$, …, $A_{n1}$ елементів першого стовпця визначника $|A|$ і додамо всі отримані ліві та праві частини. У результаті отримаємо:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1})\cdot x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1})\cdot x_2 + \ldots +$$

$$+ (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \ldots + a_{nn}A_{n1})\cdot x_n = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} \qquad (6.2)$$

Коефіцієнт, що стоїть при $x_1$, дорівнює $|A|$ як сума добутків елементів першого стовпця визначника $|A|$ на їх алгебраїчні доповнення. Коефіцієнти при $x_2$, $x_3$, …, $x_n$ усі дорівнюють нулю як суми добутків елементів другого, третього, …, $n$-го стовпців визначника $|A|$ на алгебраїчні доповнення елементів першого стовпця (властивість 7 визначника).

Розглянемо вираз $(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1})$, який стоїть у правій частині рівності (6.2) і порівняємо його з коефіцієнтом при $x_1$.

Очевидно, що права частина відрізняється від коефіцієнта при $x_1$ тільки тим, що замість $a_{11}$ $a_{21}$, …, $a_{n1}$ поставлені $b_1$, $b_2$, …, $b_n$. Тому можна сказати, що права частина рівності (6.2) є визначником, який виходить із визначника системи $|A|$ заміною першого стовпця на стовпець $B$ правих частин системи рівнянь (6.1). Позначимо цей визначник через $\Delta_1$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тоді рівність (6.2) запишеться у вигляді:

$$|A| \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = \Delta_1, \quad \text{тобто}$$
$$|A| \cdot x_1 = \Delta_1.$$

Аналогічним чином множимо тепер ліву і праву частину кожного з рівнянь системи (6.1) послідовно на алгебраїчні доповнення $A_{12}$, $A_{22}$, …, $A_{n2}$ елементів другого стовпця визначника $|A|$ і додаємо всі отримані ліві та праві частини. В результаті отримуємо:

$$0 \cdot x_1 + |A| \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2}, \text{ тобто.}$$

$$|A| \cdot x_2 = \Delta_2,$$

де $\Delta_2$ – визначник, який отримується із визначника системи $|A|$ шляхом заміни його другого стовпця на стовпець $B$ правих частин системи рівнянь:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продовжуємо цей процес, помножуючи послідовно на алгебраїчні доданки елементів 3-го, 4-го, … $n$-го стовпців визначника $|A|$. В результаті отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} |A| \cdot x_1 = \Delta_1, \\ |A| \cdot x_2 = \Delta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ |A| \cdot x_n = \Delta_n. \end{cases} \tag{6.3}$$

Якщо $|A| \neq 0$, то із системи (6.3) отримуємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|},\ \dots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{|A|}. \tag{6.4}$$

Формули (6.4) називають ***формулами Крамера.*** Отриманий результат можна сформулювати як теорему.

***Теорема Крамера***

Якщо визначник $|A|$ системи $n$ лінійних рівнянь із $n$ невідомими відмінний від нуля, то ця система має єдиний розв’язок. Цей розв’язок може бути знайдено за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|},\ \dots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{|A|},$$

де $\Delta_k$ – визначник, що виходить із визначника $|A|$ заміною його $k$-го стовпця на стовпець правих частин системи.

**Приклад.**

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

*Розв’язання.*

Обчислюємо визначник системи $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 4 - 2 - 4 - 1 + 12 = -5.$$

Визначник $|A| \neq 0$, тому система рівнянь має єдиний розв'язок. Знаходимо його за формулами Крамера. Для цього обчислюємо $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 15.$$

Отже:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{5}{-5} = -1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{-10}{-5} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{15}{-5} = -3.$$

Таким чином, отримано розв'язок системи рівнянь

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -3.$$

## 6.3. Розв'язання систем рівнянь за допомогою оберненої матриці

Розглянемо систему $n$ лінійних рівнянь із $n$ невідомими

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = \overline{1,\, n}.$$

Запишемо цю систему у матричній формі:

$$AX = B,$$

де $A$ – матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих, $X$ – вектор-стовпець невідомих, $B$ – вектор-стовпець правих частин системи рывнянь.

Припустимо, що визначник $|A| \neq 0$, тобто матриця системи $A$ є невиродженою. Тоді для матриці $A$ існує обернена матриця $A^{-1}$. Помножимо обидві частини рівності $AX = B$ зліва на $A^{-1}$ :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

За означенням оберненої матриці $A^{-1}A = E$, де $E$ – одинична матриця порядку $n$. Тому

$$EX = A^{-1}B$$

Остаточно отримуємо:

$$X = A^{-1}B.$$

Таким чином, щоб розв'язати систему рівнянь за допомогою оберненої матриці, необхідно знайти обернену матрицю $A^{-1}$ і помножити її на стовпець $B$ правих частин системи.

**Приклад**.

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$$

*Розв'язання*.

Для даної системи рівнянь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -16.$$

Оскільки визначник $|A| \neq 0$, існує обернена матриця $A^{-1}$. Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів матриці $A$:

$$A_{11} = -17, \qquad A_{21} = 7, \qquad A_{31} = -13,$$

$$A_{12} = 8, \qquad A_{22} = -8, \qquad A_{32} = 8,$$

$$A_{13} = -5, \qquad A_{23} = 3, \qquad A_{33} = -1.$$

Тоді $A^{-1} = -\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} -17 & 7 & -13 \\ 8 & -8 & 8 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

Знаходимо розв'язок системи:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -17 & 7 & -13 \\ 8 & -8 & 8 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 64 \\ -32 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

### Питання для самоконтролю

1. Які форми запису лінійних систем рівнянь Вам відомі?
2. Що називається розв'язком системи рівнянь?

3. Які системи рівнянь називаються сумісними, несумісними? Наведіть приклади.

4. У якому разі сумісну систему рівнянь називають визначеною, невизначеною? Наведіть приклади.

5. Які системи рівнянь називаються однорідними? Чи може бути однорідна система несумісною і чому?

6. Які системи рівнянь можна розв'язати за формулами Крамера?

7. Сформулюйте теорему Крамера.

8. Що можна сказати про систему рівнянь, якщо визначник системи дорівнює нулю?

9. Які системи рівнянь можна розв'язати за допомогою оберненої матриці? За якою формулою у цьому випадку шукається розв’язок?

# Глава 7. Метод повного виключення та його застосування

## 7.1. Ідея методу повного виключення

Розглянемо довільні системи $m$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими. Одними з найпоширеніших методів розв'язання таких систем є методи виключення (методи Гаусса). Усі вони засновані на можливості збереження деякої невідомої в одному з рівнянь та виключення її з інших рівнянь за допомогою елементарних (еквівалентних) перетворень системи рівнянь.

***Елементарними перетвореннями*** системи називаються такі перетворення:

1) множення (ділення) обох частин одного з рівнянь на будь-яке, відмінне від нуля, число;

2) додавання до одного рівняння системи іншого рівняння, помноженого на будь-яке число.

Елементарні перетворення переводять систему рівнянь в еквівалентну (рівносильну) їй.

Дві системи називаються ***еквівалентними*** , якщо вони мають одну й ту саму множину розв'язків. Усі несумісні системи вважаються еквівалентними.

Зауважимо також, що якщо в системі рівнянь є хоча б одне рівняння виду

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = a \qquad (a \neq 0), \tag{7.1}$$

то така система несумісна.

Якщо ж у системі рівнянь є рівняння виду

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = 0, \tag{7.2}$$

то всі такі рівняння можна відкинути. Отримана після цього система (що містить менше рівнянь) буде еквівалентна вихідної.

Перейдемо до опису ***метода повного виключення*** (метод Жордана-Гаусса). Метод складається із скінченої кількості однотипних кроків, кожен з яких полягає в наступному:

**1**. Вибирається деяке рівняння, яке називається ***провідним рівнянням***, і деяка невідома, яка називається ***провідною невідомою***. Провідним рівнянням може бути будь-яке рівняння системи, яке не було провідним на попередніх кроках. Провідною невідомою може бути будь-яка невідома, яка входить до провідного рівняння з коефіцієнтом, відмінним від нуля. Коефіцієнт при провідній невідомій називається ***провідним коефіцієнтом***.

**2**. Провідне рівняння ділиться на провідний коефіцієнт.

**3**. З решти рівнянь системи за допомогою елементарних перетворень виключається провідна невідома. Для цього до кожного рівняння системи додається провідне рівняння, помножене на відповідним чином підібране число.

Якщо при цьому деяке рівняння системи перетворюється на рівняння виду (7.2), то воно відкидається (наявність рівнянь виду (7.2) свідчить про те, що відповідні рівняння вихідної системи є лінійними комбінаціями тих рівнянь системи, які вже були провідними). Якщо ж деяке рівняння системи перетворюється на рівняння виду (7.1), то система несумісна і обчислення на цьому припиняються.

У разі коли рівняння виду (7.1) не з'явилися, переходять до наступного кроку, тобто знову обирають провідне рівняння, провідну невідому тощо. У разі сумісної системи перетворення продовжують доти, доки не отримають систему, в якій всі рівняння вже були провідними. По цій останній системі записують розв’язок вихідної системи рівнянь.

**Приклад**.

Розв’язати методом повного виключення систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ \quad 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = -1, \\ \quad - x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = -4. \end{cases}$$

*Розв’язання*. **Крок 1.** На першому кроці візьмемо перше рівняння та змінну $x_1$ як провідні. Такий вибір пов'язані з тим, що у цьому випадку провідним коефіцієнтом буде одиниця і, отже, ділити провідне рівняння на провідний коефіцієнт немає необхідності. Крім того, в другому і четвертому рівняннях невідомої $x_1$ немає і, отже, ці рівняння перетворення не потребують. Таким чином, перше, друге та четверте рівняння просто переписуємо. З третього рівняння виключаємо невідому $x_1$. Для цього множимо провідне (перше) рівняння на (–2) і додаємо до третього рівняння. Отримуємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ \quad 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ \quad -3x_2 + 5x_3 + x_4 = -5, \\ \quad - x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = -4. \end{cases}$$

**Крок 2.** На другому кроці виберемо як провідні четверте рівняння і невідому $x_5$. Для виключення провідної невідомої з першого рівняння додаємо до нього провідне рівняння. Потім, помноживши провідне рівняння на (–1) і додавши його до другого рівняння, виключаємо невідому $x_5$ з другого рівняння. Перетворювати третє рівняння немає необхідності, оскільки воно не містить провідну невідому. І, нарешті, провідне (четверте) рівняння ділимо на провідний елемент, тобто на (–1). Отримуємо:

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_3 + \ \ x_4 \qquad = -2, \\ \quad 3x_2 - 5x_3 - \ \ x_4 \qquad = \ \ 5, \\ -3x_2 + 5x_3 + \ \ x_4 \qquad = -5, \\ \quad x_2 - 4x_3 - 2x_4 + x_5 = \ \ 4. \end{cases}$$

**Крок 3.** На третьому кроці виберемо третє рівняння і невідому $x_4$ як провідні. Помножимо третє рівняння на $(-1)$ і додамо до першого, потім третє рівняння додамо до другого. Провідне (третє) рівняння перепишемо без змін, тому що провідний коефіцієнт дорівнює одиниці. І, нарешті, помноживши провідне рівняння на 2, додамо його до четвертого рівняння. Отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 \qquad\qquad = \ \ 3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 = \ \ 0, \\ -3x_2 + 5x_3 + x_4 \qquad = -5, \\ -5x_2 + 6x_3 \qquad + x_5 = -6. \end{cases}$$

З цієї системи видно, що друге рівняння є лінійною комбінацією інших і тому може бути відкинуто. Перетворення системи завершено, тому що кожне з трьох рівнянь, що залишилися, вже було провідним. В отриманій системі рівнянь менше ніж невідомих. Як буде показано нижче, такі системи мають безліч розв’язків, тобто є невизначеними. Введемо ряд означень, що використовуються під час розв’язання систем рівнянь такого виду.

Невідомі, які обиралися провідними, називаються ***базисними невідомими***, інші – ***вільними***.

У нашому прикладі базисними є невідомі $x_1$, $x_4$ та $x_5$, а вільними – $x_2$ та $x_3$.

***Загальним розв’язком*** системи рівнянь називається розв’язок, у якому базисні невідомі виражені через вільні.

З останньої системи виражаємо базисні невідомі через вільні:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 3x_2 + 3x_3, \\ x_4 = -5 + 3x_2 - 5x_3, \\ x_5 = -6 + 5x_2 - 6x_3 \end{cases}$$

і запишемо загальний розв’язок системи рівнянь:

$$X_{заг} = \begin{pmatrix} 3 - 3x_2 + 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -5 + 3x_2 - 5x_3 \\ -6 + 5x_2 - 6x_3 \end{pmatrix}.$$

Якщо у загальному розв’язку надати вільним невідомим будь-які значення, то отриманий розв’язок називається ***частинним розв’язком***.

Нехай, наприклад, $x_2 = x_3 = 1$. Тоді частинним р системиозв’язком буде

$$X_{част} = (3, 1, 1, -7, -7).$$

Очевидно, що значення для вільних невідомих можна вибрати нескінченним числом способів, тому отримана система рівнянь (а отже, і еквівалентна їй вихідна система рівнянь) має безліч розв’язків.

Якщо всі вільні невідомі дорівнюють нулю, то такий частинний розв’язок називається ***базисним розв’язком***.

У цьому прикладі

$$X_{баз} = (3, 0, 0, -5, -6).$$

Зробимо перевірку правильності знайденого розв’язку системи рівнянь. У разі невизначеної системи така перевірка робиться спрощено. З цією метою береться якийсь частинний розв’язок і підставляється в усі рівняння вихідної системи. Базисний розв’язок для перевірки не використовується, оскільки він містить нулі та, у зв'язку з цим, достовірність такої перевірки суттєво зменшується.

Зробимо перевірку у нашому прикладі за допомогою знайденого вище $X_{част} = (3, 1, 1, -7, -7)$. Підставляя цей розв’язок у рівняння вихідної системи, переконуємося, що всі вони обертаються до тотожності:

$$\begin{cases} 3+1-2\cdot 1-(-7)+(-7)=2, \\ 2\cdot 1-1+(-7)-(-7)=1, \\ 2\cdot 3-1+1-(-7)+2\cdot(-7)=-1, \\ -1+4\cdot 1+2\cdot(-7)-(-7)=-4. \end{cases}$$

## 7.2. Табличний варіант методу повного виключення

Звернімо увагу на той факт, що всі перетворення, яким зазнавало будь-яке рівняння системи при вирішенні її методом повного виключення, проводяться лише над коефіцієнтами цього рівняння та його правою частиною, а невідомі лише приписуються. Це дозволяє замість системи рівнянь використовувати матрицю системи $A$ і стовпець правих частин $B$ і проводити всі необхідні перетворення не з рівняннями системи, а з рядками цих матриць. Усі обчислення зручно оформляти як таблиці. Розглянемо, як це відбувається, на прикладі, вирішеному у попередньому параграфі.

**Приклад 1**.

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = -1, \\ - x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = -4. \end{cases}$$

*Розв'язання.*

Складемо початкову таблицю, записавши коефіцієнти за невідомих до вертикальної риски, а після неї – праві частини рівнянь системи. Для контролю обчислень додамо ще один стовпець $\sum$, елементами якого є суми елементів відповідного рядка, включаючи відповідний елемент стовпця $B$. Таким чином, вихідна таблиця має вигляд:

| | | A | | | B | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | –2 | –1 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 2 | –1 | 1 | –1 | 1 | 2 |
| 2 | –1 | 1 | –1 | 2 | –1 | 2 |
| 0 | –1 | 4 | 2 | –1 | -4 | 0 |

Звернемо увагу, що якщо будь-який рядок вихідної таблиці (включаючи відповідні елементи стовпців $B$ і $\sum$) розділити або помножити на деяке число, то у перетвореного рядка сума елементів (включаючи відповідний елемент стовпця $B$) буде дорівнювати відповідному перетвореному елементу стовпця $\sum$. Аналогічна ситуація виникає і в тому випадку, якщо до будь-якого рядка таблиці додати інший рядок, помножений на довільне число, тобто і в цьому випадку сума елементів перетвореного рядка (включаючи елемент стовпця $B$ ) буде дорівнювати відповідному перетвореному елементу стовпця $\sum$. Це дозволить надалі використовувати контрольний стовпець $\sum$ як ефективний засіб поточного контролю правильності обчислень.

Опишемо докладно кожен крок методу повного виключення. Замість слів «провідне рівняння» будемо використовувати слова «провідний рядок», замість слів «провідна невідома» та «провідний коефіцієнт» – «провідний стовпець» та «провідний елемент» відповідно.

**Крок** 1. На першому кроці провідними вибрано: перший рядок, перший стовпець і елемент 1, що стоїть на їхньому перетині. Для наочності провідний елемент таблиці обведений кружком. Оскільки провідний елемент дорівнює одиниці, то ділити провідний рядок на провідний елемент не потрібно; переписуємо цей рядок у нову таблицю. Другий і четвертий рядки також переписуємо без змін, тому що вони вже містять нулі у провідному стовпці. Перетворення потребує лише третій рядок, що містить 2 у провідному стовпці.

Для «занулення» цієї двійки провідний (перший) рядок множимо на (–2) і додаємо до третього рядка; отриманий рядок записуємо в таблицю. У результаті отримуємо наступну таблицю :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | –2 | –1 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 2 | –1 | 1 | –1 | 1 | 2 |
| 0 | –3 | 5 | 1 | 0 | –5 | –2 |
| 0 | –1 | 4 | 2 | –1 | –4 | 0 |

Задачу першого кроку – «занулення» провідного (першого) стовпця – виконано. Перевіряємо правильність обчислень за допомогою контрольного стовпця. Для цього знаходимо суми елементів кожного рядка, розташованих до подвійної риски:

$$1 + 1 - 2 - 1 + 1 + 2 = 2,$$
$$0 + 2 - 1 + 1 - 1 + 1 = 2,$$
$$0 - 3 + 5 + 1 + 0 - 5 = - 2,$$
$$0 - 1 + 4 + 2 - 1 - 4 = 0.$$

Так як всі суми збігаються з відповідними елементами контрольного стовпця (елементами, що стоять після подвійної риски), можна переходити до другого кроку. Якби в деякому рядку обчислена сума не збіглася б з елементами контрольного стовпця, це означало б, що при обчисленні елементів цього рядка була допущена помилка, яку необхідно знайти і виправити, перш ніж переходити до наступного кроку.

**Крок 2**. На другому кроці в якості провідних обрано четвертий рядок, п'ятий стовпець і елемент (–1), обведений кружком. "Занулюємо" елементи провідного стовпця. Для цього до першого рядка додаємо провідний рядок, а потім до другого рядка додаємо провідний рядок, помножений на (−1). Третій рядок, що містить нуль у провідному стовпці, просто переписуємо. Провідний рядок ділимо на провідний елемент, тобто на (−1). Отримуємо таку таблицю:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | -2 | 2 |
| 0 | 3 | -5 | -1 | 0 | 5 | 2 |
| 0 | -3 | 5 | 1 | 0 | -5 | -2 |
| 0 | 1 | -4 | -2 | 1 | 4 | 0 |

Перевіряємо правильність обчислень:

$$1 + 0 + 2 + 1 + 0 - 2 = 2\,,$$
$$0 + 3 - 5 - 1 + 0 + 5 = 2\,,$$
$$0 - 3 + 5 + 1 + 0 - 5 = -2\,,$$
$$0 + 1 - 4 - 2 + 1 + 4 = 0.$$

Усі суми збігаються з елементами контрольного шпальти, тому можна переходити до третього кроку.

**Крок 3.** На третьому кроці як провідні обрані третій рядок, четвертий стовпець, елемент 1. «Занулюємо» елементи провідного стовпця. Для цього провідний рядок множимо на (–1) і додаємо до першого рядка, потім провідний рядок додаємо до другого рядка і, нарешті, помноживши провідний рядок на 2, додаємо його до четвертого рядка. Провідний третій рядок переписуємо без змін (оскільки провідний елемент дорівнює 1). Отримуємо таблицю:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | –3 | 0 | 0 | 3 | 4 |
| ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ |
| 0 | –3 | 5 | 1 | 0 | –5 | –2 |
| 0 | –5 | 6 | 0 | 1 | –6 | –4 |

Другий рядок, що складається з одних нулів, викреслюємо, тому що він відповідає рівнянню (7.2). Зазначимо, що викреслити другий рядок можна було ще в попередній таблиці, тому що він був пропорційний третьому рядку, що означає еквівалентність відповідних рівнянь.

Перевіряємо:

$$1 + 3 - 3 + 0 + 0 + 3 = 4,$$
$$0 - 3 + 5 + 1 + 0 - 5 = -\,2,$$
$$0 - 5 + 6 + 0 + 1 - 6 = -\,4.$$

Усі суми збігаються з елементами контрольного стовпця. Оскільки всі рядки вже були провідними, то перетворення таблиці на цьому закінчуються. В останній таблиці обводимо кружками всі ті одиниці, які відповідають провідним елементам всіх кроків:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | –3 | 0 | 0 | 3 | 4 |
| 0 | –3 | 5 | 1 | 0 | –5 | –2 |
| 0 | –5 | 6 | 0 | 1 | –6 | –4 |

Базисні невідомі – $x_1$, $x_4$, $x_5$ – відповідають стовпцям, які вибиралися як провідні, тобто стовпці з обведеними одиницями. За останньою таблицею виписується спочатку відповідна їй система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ \quad - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = -5, \\ \quad - 5x_2 + 6x_3 + x_5 = -6, \end{cases}$$

а потім так, як це було зроблено у попередньому параграфі, загальний розв'язок системи.

Зазначимо, що при розв'язанні систем табличним варіантом методу повного виключення таблиці зручно записувати послідовно одну під одною.

Підіб'ємо підсумок викладеному вище.

**Для розв'язання системи лінійних рівнянь табличним варіантом методу повного виключення необхідно**:

**1**. Заповнити вихідну таблицю, записавши до неї коефіцієнти при невідомих і праві частини рівнянь системи. Підрахувати стовпець контрольних сум.

**2**. Виконати серію однотипних кроків, на кожному з яких:

а) вибирається деякий відмінний від нуля елемент таблиці, який називається ***провідним елементом***. Рядок і стовпець, на перетині яких розташований провідний елемент, називається ***провідним рядком*** і ***провідним стовпцем***. Провідним елементом може бути будь-який ненульовий елемент (який стоїть до першої риски) будь-якого рядка, який ще не був провідним;

б) провідний рядок ділиться на провідний елемент, у результаті на місці провідного елемента з'являється одиниця;

в) решта елементів провідного стовпця перетворюються на нуль. Для цього до кожного рядка таблиці додається провідний рядок, помножений на відповідним чином підібране число. При цьому після кожного знов обчисленого рядка здійснюється контроль правильності обчислень за допомогою контрольного стовпця;

г) якщо в процесі обчислення виникають рядки виду

$0\ 0\ 0 \ldots 0 \mid 0 \parallel 0$ ,

то вони викреслюються;

д) якщо в процесі обчислення виникають рядки виду

$0\ 0\ 0 \ldots 0 \mid a \parallel\ a$ , (де $a \neq 0$),

то система рівнянь несумісна і обчислення на цьому припиняються.

**3**. Закінчити процес заповнення таблиці, якщо немає таких рядків, які б не були раніше провідними. За результатами останньої таблиці записати розв'язок системи.

Розглянемо ще кілька прикладів розв’язання систем табличним варіантом методу повного виключення. Пояснення будуть менш докладними порівняно з попередніми.

**Приклад 2**.

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7, \\ x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 = 0, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 3. \end{cases}$$

*Розв’язання*.

Випишемо вихідну таблицю. Інші таблиці будемо записувати послідовно одну під однією. Провідні елементи кожного кроку обведені кружечком. В останній таблиці кружками обведені всі одиниці, що відповідають провідним елементам всіх кроків.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | –2 | 7 | 8 |
| 1 | –1 | –1 | 0 | –1 |
| 2 | 1 | 1 | 3 | 7 |
| 1 | 2 | –2 | 7 | 8 |
| 0 | –3 | 1 | –7 | –9 |
| 0 | –3 | 5 | –11 | –9 |
| 1 | –4 | 0 | –7 | –10 |
| 0 | –3 | 1 | –7 | –9 |
| 0 | 12 | 0 | 24 | 36 |
| 1 | –4 | 0 | –7 | –10 |
| 0 | –3 | 1 | –7 | –9 |
| 0 | 1 | 0 | 2 | 3 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | –1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 2 | 3 |

На першому кроці провідним елементом вибрано 1, що стоїть у першому рядку та першому стовпці. Після цього провідний (перший) рядок переписали, і потім, помноживши послідовно на (−1) і (−2), додали відповідно до другого і третього рядків.

На другому кроці провідною обрана одиниця, що стоїть у другому рядку та третьому стовпці. Провідний (другий) рядок множився послідовно на 2 та (–5) і додавався відповідно до першого та третього рядків. Другий рядок було переписано без змін.

Перш ніж робити третій крок, всі елементи третього рядка розділили на 12. Як було зазначено в попередньому параграфі, поділ будь-якого рівняння (а отже, будь-якого рядка таблиці) на відмінне від нуля число переводить систему рівнянь в еквівалентну їй систему. Тому на будь-якому кроці доцільно робити такі перетворення з тими рядками, всі елементи яких кратні деяким числам.

На третьому кроці провідний елемент – одиниця, що стоїть у третьому рядку та другому стовпці. Провідний (третій) рядок помножили послідовно на 4 та 3, і додали до першого і другого рядків відповідно. Третій рядок переписали.

З останньої таблиці знаходимо:

$$x_1 = 1, \quad x_3 = -1, \quad x_2 = 2.$$

Таким чином, дана система рівнянь визначена та її розв’язок має вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Робимо перевірку:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 7, \\ 1 - 2 - (-1) = 0, \\ 2 \cdot 1 + 2 + (-1) = 3. \end{cases}$$

Усі рівняння обернулися до тотожності. Отже, система розв’язана вірно.

**Приклад 3**.

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ -3x_1 - 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

*Розв'язання.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | –2 | 1 | –1 | –1 | –2 |
| 2 | 1 | 1 | –3 | 1 | 2 |
| –3 | –4 | –1 | 5 | 3 | 0 |
| 1 | –2 | 1 | –1 | –1 | –2 |
| 1 | 3 | 0 | –2 | 2 | 4 |
| –2 | –6 | 0 | 4 | 2 | –2 |
| 0 | –5 | 1 | 1 | –3 | –6 |
| 1 | 3 | 0 | –2 | 2 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 |

Система несумісна, оскільки у третьому рядку останньої таблиці всі елементи до риски дорівнюють нулю, а після неї стоїть 6, тобто третій рядок еквівалентний рівнянню (7.1).

## 7.3. Формули повного виключення

Табличний варіант методу повного виключення дозволяє значною мірою формалізувати і цим спростити знаходження розв'язку системи лінійних рівнянь. Процес обчислень можна формалізувати ще більшою мірою, виписавши формули, якими перетворюються елементи таблиці в результаті одного кроку методу повного виключення.

Розглянемо таблиці двох послідовних кроків. Позначимо $a_{ij}$, $b_i$ – елементи вихідної таблиці, а $a'_{ij}$, $b'_i$ – елементи таблиці наступного кроку. Нехай $a_{pk}$ – провідний елемент вихідної таблиці. Тоді таблиці цих кроків матимуть такий вигляд:

| | | |
|---|---|---|
| . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | … | … |
| . . . . . $a_{pk}$ . . . . . . $a_{pj}$ . . . | $b_p$ | $\sum_p$ |
| . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | … | … |
| . . . . . $a_{ik}$ . . . . . . $a_{ij}$ . . . | $b_i$ | $\sum_i$ |
| . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | … | … |
| . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | … | … |
| . . . . . 1 . . . . . . . $a'_{pj}$ . . . | $b'_p$ | $\sum'_p$ |
| . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | … | … |
| . . . . . 0 . . . . . . . $a'_{ij}$ . . . | $b'_i$ | $\sum'_i$ |
| . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | … | … |

Наше завдання: написати формули, які дозволять по елементам вихідної таблиці, зная провідний елемент, виписати елементи таблиці наступного кроку.

Провідний рядок, як відомо, перетворюється шляхом ділення на провідний елемент. Отже, для перетворених елементів $p$-ого (провідного) рядка отримуємо:

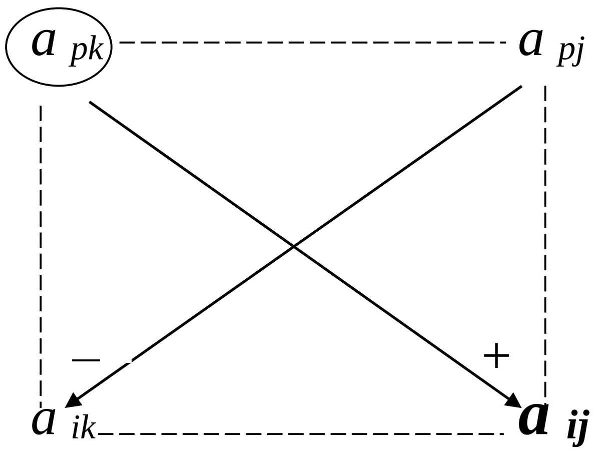
$$a'_{pj} = \frac{a_{pj}}{a_{pk}}, \quad b'_p = \frac{b_p}{a_{pk}}. \tag{7.3}$$

Для того, щоб занулити елемент $a_{ik}$ провідного стовпця, до елементів $i$-го рядка додаємо відповідні елементи $p$-го рядка, помножені на $\left(-\frac{a_{ik}}{a_{pk}}\right)$. Отже, для перетворених елементів $i$-го (не провідного) рядка отримуємо:

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} + a_{pj} \cdot \left(-\frac{a_{ik}}{a_{pk}}\right) = \frac{a_{pk}a_{ij} - a_{pj}a_{ik}}{a_{pk}}, \\ b'_i &= b_i + b_p \cdot \left(-\frac{a_{ik}}{a_{pk}}\right) = \frac{a_{pk}b_i - b_p a_{ik}}{a_{pk}}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Отримані формули (7.3) та (7.4) називаються ***формулами повного виключення***. Послідовне застосування цих формул дає можливість розв’язувати методом повного виключення будь-які системи лінійних рівнянь.

Для запам'ятовування формул (7.4) рекомендується використовувати наступну схему, що ілюструє перетворення елемента $a_{ij}$ вихідної таблиці:




Оскільки всі елементи схеми утворюють прямокутник, правило перерахунку елементів таблиці одержало назву правила прямокутника.

***Правило прямокутника*** .

Для того, щоб перерахувати за формулами повного виключення довільний елемент таблиці, що не стоїть у провідному рядку та провідному стовпці, необхідно:

1) помножити його на провідний елемент;
2) від отриманого добутку відняти добуток двох інших елементів таблиці, що доповнюють вихідний та провідний елементи до прямокутника;
3) поділити результат на провідний елемент.

Використовуючи формули повного виключення при побудові нової таблиці, обчислення можна вести не тільки по рядках (як це робилося раніше), а й по стовпцях, і, взагалі, в будь-якому зручному (з яких-небудь міркувань) порядку.

Як вже неодноразово зазначалося, якщо у провідному стовпці є нульові елементи, то відповідні рядки в наступну таблицю переносяться без змін. Це формально випливає з формул повного виключення (7.4):

$$\text{якщо } a_{ik} = 0, \text{ то } a'_{ij} = \frac{a_{pk}a_{ij}}{a_{pk}} = a_{ij}.$$

Звернемо увагу, що аналогічна ситуація виникає і в тому випадку, коли провідний рядок містить нулі:

$$\text{якщо } a_{pj} = 0, \text{ то } a'_{ij} = a_{ij},$$

тобто якщо у провідному рядку є нулі, то відповідні їм стовпці переносяться до наступної таблиці без змін. Тому, приступаючи до перетворення таблиці, доцільно спочатку перенести в наступну таблицю ті рядки і стовпці, елементи яких не потребують перетворення, і тільки після цього приступити до заповнення порожніх місць, що залишилися, тобто обчислити ті елементи, місця яких в новій таблиці ще не зайняті. Такий порядок обчислень виявляється дуже зручним, особливо в тому випадку, коли в таблиці багато нулів, наприклад (як буде показано нижче) при знаходженні оберненої матриці.

Відзначимо також, що при перетворенні таблиці за формулами повного виключення елементи контрольного стовпця $\sum_i'$ і $\sum_p'$ перераховуються за тими самими формулами.

Підіб'ємо підсумок викладеному вище.

**Для перетворення таблиці за формулами повного виключення необхідно**:

**1.** Розділити провідний рядок на провідний елемент.

**2.** Заповнити нулями провідний стовпець.

**3.** Якщо вихідний провідний стовпець містить нулі, то відповідні рядки перенести в наступну таблицю без змін.

**4.** Якщо провідний рядок містить нулі, то відповідні стовпці перенести без змін.

**5.** За правилом прямокутника заповнити всі місця таблиці, що залишилися порожніми.

**Приклад**.

Розв’язати методом повного виключення систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\quad - \ x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - \ x_2 + \ x_3 - 2x_4 - \ x_5 = -1, \\ \qquad\quad x_2 - 2x_3 + 2x_4 + \ x_5 = 4. \end{cases}$$

*Розв’язання*.

Складемо вихідну таблицю:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | –1 | 2 | 0 | 4 |
| 2 | –1 | 1 | –2 | –1 | –1 | –2 |
| 0 | 1 | –2 | 2 | 1 | 4 | 6 |

**Крок 1**. Виберемо провідним елементом одиницю, що стоїть у першому рядку та першому стовпці. Перепишемо перший рядок без зміни та заповнимо провідний (перший) стовпець нулями:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | –1 | 2 | 0 | 4 |
| 0 | | | | | | |
| 0 | | | | | | |

Так як вихідний провідний стовпець містить нуль, то відповідний йому третій рядок перепишемо без змін. Так як провідний рядок містить два нулі, то відповідні ним стовпці також перепишемо без змін:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | –1 | 2 | 0 | 4 |
| 0 | | 1 | | | –1 | |
| 0 | 1 | –2 | 2 | 1 | 4 | 6 |

Чотири місця у таблиці залишилися порожніми. Для їх заповнення складемо у вихідній таблиці чотири прямокутники і зробимо розрахунки за правилом прямокутника:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | –1 | 2 | 0 | 4 |
| 2 | –1 | 1 | –2 | –1 | –1 | –2 |
| 0 | 1 | –2 | 2 | 1 | 4 | 6 |

$$a'_{22} = \frac{1\cdot(-1) - 2\cdot 2}{1} = -5.$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | –1 | 2 | 0 | 4 |
| 2 | –1 | 1 | –2 | –1 | –1 | –2 |
| 0 | 1 | –2 | 2 | 1 | 4 | 6 |

$$a'_{24} = \frac{1\cdot(-2) - (-1)\cdot 2}{1} = 0.$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | –1 | 2 | 0 | 4 |
| 2 | –1 | 1 | –2 | –1 | –1 | –2 |
| 0 | 1 | –2 | 2 | 1 | 4 | 6 |

$$a'_{25} = \frac{1\cdot(-1) - 2\cdot 2}{1} = -5.$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | –1 | 2 | 0 | 4 |
| 2 | –1 | 1 | –2 | –1 | –1 | –2 |
| 0 | 1 | –2 | 2 | 1 | 4 | 6 |

$$\sum\nolimits'_2 = \frac{1\cdot(-2) - 4\cdot 2}{1} = -10.$$

Таким чином, таблиця повністю заповнена і має вигляд:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | –1 | 2 | 0 | 4 |
| 0 | –5 | 1 | 0 | –5 | –1 | –10 |
| 0 | 1 | –2 | 2 | 1 | 4 | 6 |

**Крок 2**. Провідний елемент – одиниця, що стоїть у другому рядку та третьому стовпці. Перепишемо другий рядок, третій стовпець заповнимо нулями:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | | | | |
| 0 | –5 | 1 | 0 | –5 | –1 | –10 |
| | | 0 | | | | |

Так як вихідний провідний стовпець містить нуль, то відповідний йому перший рядок перепишемо без змін. Так як провідний рядок містить два нулі, то відповідний їм перший і четвертий стовпець також перепишемо без змін:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | –1 | 2 | 0 | 4 |
| 0 | –5 | 1 | 0 | –5 | –1 | –10 |
| 0 | | | 2 | | | |

Заповнимо за правилом прямокутника порожні місця таблиці:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | –1 | 2 | 0 | 4 |
| 0 | –5 | 1 | 0 | –5 | –1 | –10 |
| 0 | –9 | 0 | 2 | –9 | 2 | –14 |

**Крок 3**. Провідний елемент – елемент 2 у третьому рядку та четвертому стовпці. Провідний третій рядок розділимо на 2, четвертий стовпець заповнимо нулями:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 0 | | | |
| | | | 0 | | | |
| 0 | $-\frac{9}{2}$ | 0 | 1 | $-\frac{9}{2}$ | 1 | –7 |

Без змін переписуємо другий рядок, а також перший і третій стовпці:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 0 | 0 | | | |
| 0 | –5 | 1 | 0 | –5 | –1 | –10 |
| 0 | $-\frac{9}{2}$ | 0 | 1 | $-\frac{9}{2}$ | 1 | –7 |

Заповнюємо порожні місця, що залишилися, за правилом прямокутника.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-\frac{5}{2}$ | 0 | 0 | $-\frac{5}{2}$ | 1 | –3 |
| 0 | –5 | 1 | 0 | –5 | –1 | –10 |
| 0 | $-\frac{9}{2}$ | 0 | 1 | $-\frac{9}{2}$ | 1 | –7 |

За останньою таблицею виписуємо відповідь:

$$X_{заг} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_5 \\ x_2 \\ -1 + 5x_2 + 5x_5 \\ 1 + \frac{9}{2}x_2 + \frac{9}{2}x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

## 7.4. Розв'язання систем рівнянь, що відрізняються правими частинами

Нехай необхідно розв'язати кілька систем рівнянь з однією і тією ж матрицею системи та різними правими частинами:

$$AX = B_1, \qquad AX = B_2, \qquad ..., \qquad AX = B_k.$$

Так як провідними елементами в методі повного виключення можуть бути тільки елементи матриці $A$ і, отже, всі перетворення таблиці визначаються її елементами і не залежать від правих частин, то ці системи можна розв'язувати одночасно. Вихідна таблиця матиме вигляд:

$$A \mid B_1 \mid B_2 \mid \dots \mid B_k \parallel \Sigma,$$

тобто до риски стоїть загальна для всіх систем рівнянь матриця системи, за нею послідовно виписані стовпці правих частин всіх систем, а за подвійною рискою – контрольний стовпець. Виконавши необхідну кількість кроків, отримаємо таблицю, з якої за звичайним правилом виписується розв'язок кожної системи (у разі її сумісності), для чого використовується відповідний їй стовпець правих частин.

**Приклад**.

Розв'язати системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

*Розв'язання.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | -1 | 2 | -2 | 1 | 3 |
| 1 | -1 | 2 | 2 | 0 | -1 | 3 |
| 2 | 1 | -1 | 2 | -2 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 1 | 4 | -2 | 0 | 6 |
| 5 | 1 | 0 | 6 | -4 | 1 | 9 |
| 3 | 0 | 1 | 4 | -2 | 0 | 6 |

Використовуючи стовпець правих частин, що стоїть за першою рискою, напишемо розв'язок першої системи рівнянь:

$$X_{заг}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 6-5x_1 \\ 4-3x_1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, використовуючи стовпці, що стоять після другої та третьої риски, напишемо розв'язки другої та третьої систем відповідно:

$$X_{заг}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4-5x_1 \\ -2-3x_1 \end{pmatrix}, \qquad X_{заг}^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1-5x_1 \\ -3x_1 \end{pmatrix}.$$

## 7.5. Знаходження оберненої матриці

Розглянемо довільну матрицю $A$ $n$-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Потрібно знайти обернену матрицю $A^{-1}$. Позначимо невідомі елементи оберненої матриці через $x_{ij}$ і шукатимемо її у вигляді

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

За означенням оберненої матриці $A \cdot A^{-1} = E$ , тобто.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо цю рівність у розгорнутому вигляді. Для цього спочатку всі рядки матриці $A$ помножимо по черзі на перший стовпець матриці $A^{-1}$. В результаті отримаємо перший стовпець добутку $A \cdot A^{-1}$, який дорівнює першому стовпцю матриці $E$ . Отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \ldots + a_{1n}x_{n1} = 1, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + \ldots + a_{2n}x_{n1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + \ldots + a_{nn}x_{n1} = 0. \end{cases}$$

Це система $n$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими, причому матрицею системи є матриця $A$, а невідомими – елементи першого стовпця матриці $A^{-1}$ .

Потім помножимо всі рядки матриці на другий стовпець матриці $A^{-1}$ *і* прирівняємо отримані результати відповідним елементам другого стовпця матриці $E$. Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \ldots + a_{1n}x_{n2} = 0, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{2n}x_{n2} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{12} + a_{n2}x_{22} + \ldots + a_{nn}x_{nn} = 0. \end{cases}$$

Матрицею цієї системи рівнянь також є матриця $A$. Розв'язавши отриману систему, ми знайдемо елементи другого стовпця матриці $A^{-1}$. Виконавши аналогічну процедуру з третім, четвертим, …, $n$-м стовпцями матриці $A^{-1}$ , отримаємо ще $n$–2 системи рівнянь з тією ж матрицею системи $A$ і правими частинами, що є третім, четвертим …, $n$-м стовпцями матриці $E$. Невідомими в отриманих системах рівнянь будуть елементи третього, четвертого, $n$-го стовпців шуканої матриці $A^{-1}$.

Таким чином, знаходження оберненої матриці $A^{-1}$ звелося до розв'язаня $n$ систем лінійних рівнянь з однією і тією ж матрицею системи $A$ і з різними правими частинами, що є стовпцями одиничної матриці $n$-го порядку. Як було показано у попередньому параграфі, такі системи рівнянь можна розв'язувати одночасно.

Вихідна таблиця буде мати такий вигляд (вертикальні рисочки між стовпцями правих частин ставити для наочності не будемо):

| $A$ | | | | $E$ | | | | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | 1 | 0 | … | 0 | $\Sigma_1$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | 0 | 1 | … | 0 | $\Sigma_2$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $a_{n1}$ | $a_{n2}$ | … | $a_{nn}$ | 0 | 0 | … | 1 | $\Sigma_n$ |

Подальші перетворення проводимо за формулами повного виключення. Якщо на деякому кроці з'являється рядок, всі елементи якого, що стоять до риски, дорівнюють нулю, це означає, що вихідна матриця $A$ вироджена і, отже, у неї немає оберненої. Обчислення на цьому припиняються. Якщо такого рядка не виникає, то процедура повного виключення буде складатися з $n$ кроків. Зробивши ці кроки, переставимо рядки останньої таблиці так, щоб таблиця набула наступного вигляду:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | … | 0 | $b_{11}$ | $b_{12}$ | … | $b_{1n}$ | $\Sigma'_1$ |
| 0 | 1 | … | 0 | $b_{21}$ | $b_{22}$ | … | $b_{2n}$ | $\Sigma'_2$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| 0 | 0 | … | 1 | $b_{n1}$ | $b_{n2}$ | … | $b_{nn}$ | $\Sigma'_n$ |

З цієї таблиці отримуємо розв'язки всіх $n$ систем рівнянь.

Розв’язок першої системи: $x_{11} = b_{11}$ , $x_{21} = b_{21}$ …, $x_{n1} = b_{n1}$,
тоюто перший стовпець матриці $A^{-1}$ збігся з першим стовпцем таблиці, що стоїть після риски.

Розв'язок другої системи рівнянь: $x_{12} = b_{12}$, $x_{22} = b_{22}$ …, $x_{n\,2} = b_{n\,2}$,
тобто другий стовпець $A^{-1}$ збігся з другим стовпцем після риски, тощо.

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, якщо рядки останньої таблиці впорядкувати так, що на місці матриці $A$ (тобто ліворуч від риси) стоятиме одинична матриця, то на місці одиничної матриці (тобто праворуч від риски) стоятиме обернена матриця $A^{-1}$ .

Схематично процес знаходження оберненої матриці методом повного виключення можна зобразити так:

| $A$ | $E$ |
|---|---|
| … | … |
| … | … |
| … | … |
| $E$ | $A^{-1}$ |

**Приклад**.

Знайти матрицю, обернену матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Розвёязання.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 0 | –1 | 1 | –1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| –1 | 0 | –1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| –1 | 0 | –1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 1 | 0 | 0 | 2 | –1 | –1 | 1 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | −1 | 0 | −1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 | 1 | −2 | −6 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | −1 | 1 | 6 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 4 | −1 | 2 | 10 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 | 1 | −2 | −6 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 | 1 | −2 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | −1 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 4 | −1 | 2 | |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | |

Із останньої (упорядкованої) таблиці виписуємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку, для чого обчислимо $A \cdot A^{-1}$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, обернену матрицю $A^{-1}$ знайдено правильно.

Підіб'ємо підсумок викладеному вище.

**Для того, щоб знайти обернену матрицю методом повного виключення, необхідно:**

**1**. Заповнити вихідну таблицю, записавши ліворуч від риски вихідну матрицю *A*, а праворуч від риски – одиничну матрицю *E* такого ж порядку. Підрахувати контрольний стовпець.

**2**. Перетворити таблицю за формулами повного виключення. Якщо при цьому з'являються рядки, всі елементи яких до риски дорівнюють нулю, то вихідна матриця вироджена і у неї не існує оберненої.

**3**. Упорядкувати рядки останньої таблиці так, щоб на місці матриці *A*, тобто ліворуч від риски, стояла одинична матриця Е. Тоді на місці одиничної матриці, тобто праворуч від риски, стоятиме обернена матриця $A^{-1}$.

## 7.6. Перевірка лінійної залежності множини векторів

Розглянемо $m$ $n$-мірних векторів:

$$\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1}),$$
$$\bar{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, ..., a_{n2}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\bar{a}_m = (a_{1m}, a_{2m}, ..., a_{nm}).$$

Як відомо, умова лінійної залежності цих векторів означає, що існують деякі числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$, серед яких хоча б одне не дорівнює нулю, такі, що виконується умова

$$k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + ... + k_m\bar{a}_m = 0.$$

Перепишемо цю рівність у координатній формі, записав для зручності вектори у вигляді вектор-стовпців:

$$k_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + ... + k_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки випливає, що

$$\begin{cases} k_1a_{11} + k_2a_{12} + ... + k_ma_{1m} = 0, \\ k_1a_{21} + k_2a_{22} + ... + k_ma_{2m} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_1a_{n1} + k_2a_{n2} + ... + k_ma_{nm} = 0. \end{cases} \tag{7. 5}$$

Таким чином, питання про лінійну залежність звелося до питання: чи існує ненульовий розв'язок отриманої системи рівнянь, чи ні. Якщо у системи (7.5) існує ненульовий розв'язок, то вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ лінійно залежні, якщо існує тільки нульовий розв'язок $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$, то вектори лінійно незалежні.

Систему рівнянь (7.5) розв'язуємо табличним варіантом методу повного виключення. Зазначимо, що перший стовпець вихідної таблиці є вектором $\bar{a}_1$, другий – вектором $\bar{a}_2$ тощо, а стовпець правих частин кожного кроку є нульовим стовпцем, тому його можна опустити. Таким чином, вихідна таблиця матиме вигляд:

| $\bar{a}_1$ | $\bar{a}_2$ | … | $\bar{a}_m$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1m}$ | $\Sigma_1$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2m}$ | $\Sigma_2$ |
| … | … | … | … | … |
| $a_{n1}$ | $a_{n2}$ | … | $a_{nm}$ | $\Sigma_n$ |

Якщо таблиця останнього кроку буде містити $m$ рядків (стільки ж, скільки і стовпців), то система (7.5) визначена, отже, має лише нульовий розв'язок. В цьому випадку вектори лінійно незалежні. Якщо ж остання таблиця містить рядків менше, ніж стовпців (тобто менше $m$ ), то система невизначена, отже, має ненульовий розв'язок. В цьому випадку вектори лінійно залежні.

**Приклад 1**.

Дослідити на лінійну залежність вектори

$$\bar{a}_1 = (1,\ -1,\ 0,\ 1),\ \bar{a}_2 = (2,\ 1,\ 1,\ -1),\ \bar{a}_3 = (1,\ 0,\ 1,\ 0),\ \bar{a}_4 = (-1,\ 1,\ 0,\ 2).$$

*Розв'язок*.

Складемо вихідну таблицю, розташувавши вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ і $\bar{a}_4$ по стовпчиками, і підрахуємо контрольний стовпець. Зробимо необхідну кількість кроків методу повного виключення:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | –1 | 3 |
| –1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | –1 | 0 | 2 | 2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | –1 | 3 |
| –1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| –1 | –1 | 0 | 1 | –1 |
| 1 | –1 | 0 | 2 | 2 |
| 0 | 3 | 1 | 0 | 4 |
| –1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | –2 | 0 | 0 | –2 |
| 3 | –3 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 3 | 1 | 0 | 4 |
| –1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | –1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| –1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

З останньої таблиці робимо висновок, що система рівнянь має лише нульовий розв’язок, отже вектори лінійно незалежні.

**Приклад 2**.
Дослідити на лінійну залежність вектори

$\bar{a}_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $\bar{a}_2 = (0,\ -1,\ 1,\ 1)$, $\bar{a}_3 = (1,\ 0,\ -1,\ 2)$, $\bar{a}_4 = (1,\ 1,\ 2,\ 2)$.

*Розв'язання*.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | –1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 6 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | –1 | 3 | 5 |
| 1 | 1 | –1 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 0 | 0 | –4 | 0 | –4 |
| 0 | 1 | –2 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

З останньої таблиці робимо висновок, що система рівнянь невизначена, тобто містить ненульові розв'язки, отже вектори лінійно залежні.

Підіб'ємо підсумок викладеному вище.

**Для того, щоб дослідити на лінійну залежність множину векторів, необхідно**:

**1**. Скласти вихідну таблицю, розташувавши вектори по стовпцям і підрахувавши контрольний стовпець.

**2**. Перетворити таблицю методом повного виключення.

**3**. Якщо остання таблиця містить рядків стільки ж, скільки стовпців (за винятком контрольного стовпця), то відповідна система рівнянь (7.5) визначена, отже має лише нульовий розв'язок. Значить, вектори лінійно незалежні. Якщо остання таблиця містить рядків менше, ніж стовпців, система (7.5) невизначена, отже, має ненульові розв'язки. Таким чином, вектори лінійно залежні.

**Наслідок**. У $R_n$ будь-який набір із більш ніж $n$ векторів завжди лінійно залежний.

## 7.7. Ранг і базис множини векторів. Розкладання векторів за базисом

Розглянемо $m$ $n$-вимірних векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$.

***Рангом*** множини векторів називається максимальне число $\boldsymbol{r}$ лінійно незалежних векторів цієї множини.

***Базисом*** множини векторів називається будь-яка впорядкована сукупність $r$ лінійно незалежних векторів множини.

З цих означень випливає, що базис знаходиться неоднозначно, тому що можна, взагалі кажучи, по-різному з множини векторів вибирати сукупності $r$ лінійно незалежних векторів. Крім того, можна по-різному впорядкувати обрану сукупність векторів.

Не обмежуючи спільності вважатимемо, що з даних $m$ векторів лінійно незалежними є перші $r$ векторів, які упорядковані за зростанням номерів, тобто базис має такий вид: $\{\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \ldots,\ \overline{a}_r\}$.

**Теорема**. Будь-який вектор $\overline{a}_i$ з даної множини векторів може бути представлений у вигляді лінійної комбінації базисних векторів і це представлення єдине.

*Доведення.*

**1.** Доведемо, що вектор $\overline{a}_i$ можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів базису, тобто справедлива рівність

$$\overline{a}_i = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_r\overline{a}_r. \qquad (7.6)$$

Для цього розглянемо наступну сукупність векторів:

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_r, \overline{a}_i.$$

Оскільки у цьому наборі $r + 1$ вектор, всі вони лінійно залежні (відповідно до означення рангу множини векторів). Отже, у рівності

$$k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + \ldots + k_r\overline{a}_r + k_{r+1}\overline{a}_i = 0 \qquad (7.7)$$

хоча б один з коефіцієнтів відмінний від нуля (відповідно до визначення лінійної залежності векторів).

Припустимо, що $k_{r+1} = 0$. Тоді рівність (7.7) набуває вигляду

$$k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + ... + k_r\bar{a}_r = 0,$$

причому хоча б один із коефіцієнтів $k_j$ відмінний від нуля, що суперечить лінійній незалежності векторів базису. Таким чином, $k_{r+1} \neq 0$. Отже, з рівності (7.7) можна виразити вектор $\bar{a}_i$ через базисні вектори таким чином:

$$\bar{a}_i = -\frac{k_1}{k_{r+1}}\bar{a}_1 - \frac{k_2}{k_{r+1}}\bar{a}_2 - ... - \frac{k_r}{k_{r+1}}\bar{a}_r.$$

Вводячи позначення $\lambda_1 = -\frac{k_1}{k_{r+1}}$, $\lambda_2 = -\frac{k_2}{k_{r+1}}$, …, $\lambda_r = -\frac{k_r}{k_{r+1}}$, отримуємо подання (7.6) вектора $\bar{a}_i$ у вигляді лінійної комбінації базисних векторів, що і треба було довести.

**2.** Доведемо, що представлення (7.6) єдине. Припустимо, є ще одне представлення вектора $\bar{a}_i$ у вигляді лінійної комбінації векторів базису:

$$\bar{a}_i = \lambda_1'\bar{a}_1 + \lambda_2'\bar{a}_2 + ... + \lambda_r'\bar{a}_r. \tag{7.8}$$

Віднімая від (7.6) цю рівність, отримаємо:

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_1')\bar{a}_1 + (\lambda_2 - \lambda_2')\bar{a}_2 + ... + (\lambda_r - \lambda_r')\bar{a}_r.$$

Оскільки базисні вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_r$ лінійно незалежні, то в отриманій рівності всі коефіцієнти дорівнюють нулю:

$$\lambda_1 - \lambda_1' = 0, \qquad \lambda_2 - \lambda_2' = 0, \ldots, \lambda_r - \lambda_r' = 0,$$

тобто

$$\lambda_1 = \lambda_1',\ \lambda_2 = \lambda_2', \ldots, \quad \lambda_r = \lambda_r'.$$

Отже, уявлення (7.8) збігається з (7.6). Таким чином, подання (7.6) вектора $\bar{a}_i$ у вигляді лінійної комбінації базисних векторів єдине, що і потрібно було довести.

Подання вектор $\bar{a}_i$ у вигляді

$$\bar{a}_i = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + ... + \lambda_r\bar{a}_r$$

називається ***розкладанням вектора*** $\bar{a}_i$ множини ***за базисом*** $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_r\}$, а числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_r$ – ***координатами вектора*** $\bar{a}_i$ у цьому базисі. ***У координатній формі*** таке ***розкладання*** за базисом можна записати так:

$$\bar{a}_i = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r).$$

**Приклад 1.**

Дано вектори $\bar{a}_1 = (1, 2, 0)$, $\bar{a}_2 = (0, 0, 2)$, $\bar{a}_3 = (1, 2, 4)$.

Потрібно:

1) знайти ранг і якийсь базис множини векторів;
2) розкласти всі вектори множини за вибраним базисом.

*Розв'язання.*

**1**. Легко перевірити, що справедлива рівність $\bar{a}_3 = \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2$. Отже, вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ лінійно залежні. У той самий час вектори $\bar{a}_1$ і $\bar{a}_2$ лінійно незалежні, тому що рівність $\bar{a}_1 = k\bar{a}_2$ не виконується за жодного *k*. Таким чином, $r = 2$ $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ – базис.

Зазначимо, що лінійно незалежними є будь-які два вектори з даних в умові трьох векторів. Тому за базис можна вибрати будь-яку з 6 упорядкованих сукупностей: $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$, $\{\bar{a}_2, \bar{a}_1\}$, $\{\bar{a}_1, \bar{a}_3\}$, $\{\bar{a}_3, \bar{a}_1\}$, $\{\bar{a}_2, \bar{a}_3\}$, $\{\bar{a}_3, \bar{a}_2\}$.

**2.** Розкладання векторів множини по базису $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ матиме вигляд:

$$\bar{a}_1 = 1\cdot\bar{a}_1 + 0\cdot\bar{a}_2 = (1, 0),$$
$$\bar{a}_2 = 0\cdot\bar{a}_1 + 1\cdot\bar{a}_2 = (0, 1),$$
$$\bar{a}_3 = 1\cdot\bar{a}_1 + 2\cdot\bar{a}_2 = (1, 2).$$

У загальному випадку досить складно визначити ранг і базис, безпосередньо користуючись означенням, як це було зроблено у розглянутому прикладі. Це пояснюється тим, що при поверхневому розгляді множини векторів складно помітити у ньому якісь лінійні залежності. Проте таку задачу можна розв'язати навіть у тому випадку, коли множина складається з великої кількості векторів простору великої розмірності. Для зручності викладу розглянемо розв'язання задачі на конкретному прикладі.

**Приклад 2.**

Знайти ранг і якийсь базис множини векторів

$$\bar{a}_1 = (1, 0, -1, 1),\ \bar{a}_2 = (0, 1, 1, -1),\ \bar{a}_3 = (-1, 1, 0, 1),$$
$$\bar{a}_4 = (1, -1, 0, 0),\ \bar{a}_5 = (0, 0, 1, -1).$$

*Розв'язання.*

Складемо вихідну таблицю так, як ми це робили у разі дослідження множини векторів на лінійну залежність у попередньому параграфі, тобто розташуємо вектори по стовпцях і підрахуємо контрольний стовпець. Після цього перетворимо таблицю методом повного виключення.

| $\overline{a}_1$ | $\overline{a}_2$ | $\overline{a}_3$ | $\overline{a}_4$ | $\overline{a}_5$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | –1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | –1 | 0 | 1 |
| –1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | –1 | 1 | 0 | –1 | 0 |
| 1 | 0 | –1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | –1 | 0 | 1 |
| –1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 0 | 1 | 0 | –1 | 0 | 0 |
| –1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 0 | 1 | 0 | –1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 0 | 1 | 0 | –1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 3 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

З останньої таблиці видно, що лінійно незалежними є такі 4 вектори: $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ і $\bar{a}_5$. Отже, $r$ = 4. Що стосується базису, то перераховані вище вектори утворюють його у будь-якому порядку. Наприклад: $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_5\}$ або $\{\bar{a}_2, \bar{a}_5, \bar{a}_1, \bar{a}_3\}$, або $\{\bar{a}_5, \bar{a}_1, \bar{a}_3, \bar{a}_2\}$ тощо.

Як розкласти вектори множини по базису? Розглянемо розв'язання цієї задачі для векторів із попереднього прикладу. Як буде показано нижче, шукане розкладання векторів вже міститься в останній таблиці прикладу 2, при цьому базисні вектори зручніше брати в певному порядку.

Першим базовим вектором вибирається той вектор, у якого в останній таблиці одиниця стоїть на першому місці, тобто в першому рядку (у попередньому прикладі це вектор $\bar{a}_1$); другим – той вектор, у якого одиниця стоїть на другому місці, тобто у другому рядку (в даному випадку це вектор $\bar{a}_2$), третім – вектор з одиницею на третьому місці (вектор $\bar{a}_5$) і т. д. Таким чином, базис доцільно вибрати в такий спосіб: $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_5, \bar{a}_3\}$.

**Приклад 3.**

Розкласти вектори з прикладу 2 за базисом $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_5, \bar{a}_3\}$.

*Розв'язання.*

Розкладання базисних векторів очевидно:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_1 &= 1\cdot\bar{a}_1 + 0\cdot\bar{a}_2 + 0\cdot\bar{a}_5 + 0\cdot\bar{a}_3 = (1, 0, 0, 0),\\
\bar{a}_2 &= 0\cdot\bar{a}_1 + 1\cdot\bar{a}_2 + 0\cdot\bar{a}_5 + 0\cdot\bar{a}_3 = (0, 1, 0, 0),\\
\bar{a}_5 &= 0\cdot\bar{a}_1 + 0\cdot\bar{a}_2 + 1\cdot\bar{a}_5 + 0\cdot\bar{a}_3 = (0, 0, 1, 0),\\
\bar{a}_3 &= 0\cdot\bar{a}_1 + 0\cdot\bar{a}_2 + 0\cdot\bar{a}_5 + 1\cdot\bar{a}_3 = (0, 0, 0, 1).
\end{aligned}$$

Звернемо увагу на те, що саме такий вигляд мають перший, другий, п'ятий та третій стовпці останньої таблиці прикладу 2. Таким чином, розкладання базисних векторів у координатній формі міститься у відповідних стовпцях вищезгаданої таблиці.

Задача фактично звелася до розкладання небазисного вектора $\bar{a}_4$ за вибраним базисом, тобто до пошуку таких $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, що виконується рівність

$$\bar{a}_4 = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_3\bar{a}_5 + \lambda_4\bar{a}_3 .$$

Перепишемо цю рівність у координатній формі, записуючи для зручності вектори у вигляді вектор-стовпців:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix},$$

звідки випливає, що

$$\begin{cases}1\cdot\lambda_1+0\cdot\lambda_2+0\cdot\lambda_3-1\cdot\lambda_4=1,\\0\cdot\lambda_1+1\cdot\lambda_2+0\cdot\lambda_3+1\cdot\lambda_4=-1,\\-1\cdot\lambda_1+1\cdot\lambda_2+1\cdot\lambda_3+0\cdot\lambda_4=0,\\1\cdot\lambda_1-1\cdot\lambda_2-1\cdot\lambda_3+1\cdot\lambda_4=0.\end{cases}$$

Для розв'язання цієї системи рівнянь складемо таблицю

| $\bar{a}_1$ | $\bar{a}_2$ | $\bar{a}_5$ | $\bar{a}_3$ | $\bar{a}_4$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | –1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | –1 | 1 |
| –1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | –1 | –1 | 1 | 0 | 0 |

Очевидно, що ця таблиця має такий самий вигляд, як і вихідна таблиця в прикладі 2, тільки її стовпці переупорядковані. Перетворивши отриману таблицю за методом повного виключення (причому вибираючи провідні елементи так само, як це відбувалося в попередньому прикладі), отримаємо остаточно:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | –1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

З цієї таблиці знаходимо $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 0$.

Отже, розкладання вектора $\bar{a}_4$ за базисом $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_5, \bar{a}_3\}$ має вигляд:

$$\bar{a}_4 = 1\cdot\bar{a}_1 - 1\cdot\bar{a}_2 + 2\cdot\bar{a}_5 + 0\cdot\bar{a}_3 = (1, -1, 2, 0).$$

Звернемо увагу, що в останній таблиці прикладу 2 четвертий стовпець має такий же вигляд, тобто розкладання небазисного вектора $\bar{a}_4$ в координатній формі (так само, як і базисних векторів) також міститься у відповідному стовпці останньої таблиці вищезгаданого прикладу.

Отже, дві задачі: знаходження базису та розкладання векторів множини за базисом можна розв’язувати одночасно.

Підіб'ємо підсумок викладеному вище.

**Для того, щоб знайти якийсь базис множини векторів і розкласти вектори множини за вибраним базисом, необхідно**:

**1.** Скласти таблицю, записавши вектори по стовпцям, і підрахувати контрольний стовпець.

**2.** Перетворити отриману таблицю методом повного виключення.

**3.** Як базис вибрати вектори, що відповідають базисним стовпцям, причому першим – той вектор, який відповідає базисному стовпцю з одиницею в першому рядку, другим – з одиницею в другому рядку і т.д.

**4.** Остання таблиця міститиме розкладання всіх векторів множини за вибраним базисом у координатній формі: перший стовпець – розкладання першого вектора, другий – другого тощо.

**Приклад 4**.

Знайти якийсь базис множини векторів:

$$\bar{a}_1 = (1, -1, 2, 1),\ \ \bar{a}_2 = (0, 1, -1, 0),\ \ \bar{a}_3 = (1, 0, 1, 1),$$

$$\bar{a}_4 = (2, -1, 3, 2),\ \ \bar{a}_5 = (1, -2, 3, 1)$$

і розкласти вектори множини за вибраним базисом.

*Розв’язання*.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 5 |
| –1 | 1 | 0 | –1 | –2 | –3 |
| 2 | –1 | 1 | 3 | 3 | 8 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 5 |
| –1 | 1 | 0 | –1 | –2 | –3 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 5 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 5 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 5 |
| –1 | 1 | 0 | –1 | –2 | –3 |
| ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ |
| ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 5 |
| –1 | 1 | 0 | –1 | –2 | –3 |

З останньої таблиці випливає:

1) $\{\overline{a}_3,\ \overline{a}_2\}$ – базис даної множини векторів;

2) розкладання небазових векторів множини по базису $\{\overline{a}_3,\ \overline{a}_2\}$ має вигляд:

$$\overline{a}_1 = (1, -1) = 1 \cdot \overline{a}_3 + (-1) \cdot \overline{a}_2 = \overline{a}_3 - \overline{a}_2,$$
$$\overline{a}_4 = (2, -1) = 2 \cdot \overline{a}_3 + (-1) \cdot \overline{a}_2 = 2\overline{a}_3 - \overline{a}_2,$$
$$\overline{a}_5 = (1, -2) = 1 \cdot \overline{a}_3 + (-2) \cdot \overline{a}_2 = \overline{a}_3 - 2\overline{a}_2.$$

Зробимо перевірку, скориставшись поданням векторів у вихідному базисі:

$$\overline{a}_3 - \overline{a}_2 = (1,\ 0,\ 1,\ 1) - (0,\ 1,\ -1,\ 0) = (1,\ -1,\ 2,\ 1) = \overline{a}_1,$$
$$2\overline{a}_3 - \overline{a}_2 = 2(1,\ 0,\ 1,\ 1) - (0,\ 1,\ -1,\ 0) = (2,\ 0,\ 2,\ 2) - (0,\ 1,\ -1,\ 0) = (2,\ -1,\ 3,\ 2) = \overline{a}_4,$$
$$\overline{a}_3 - 2\overline{a}_2 = (1,\ 0,\ 1,\ 1) - 2(0,\ 1,\ -1,\ 0) = (1,\ 0,\ 1,\ 1) - (0,\ 2,\ -2,\ 0) = (1,\ -2,\ 3,\ 1) = \overline{a}_5.$$

Всі рівність вірні, отже розкладання векторів за базисом знайдено правильно.

**Питання для самоконтролю**

1. Які перетворення системи рівнянь називають елементарними?
2. Які системи рівнянь називаються еквівалентними?
3. Опишіть один крок методу повного виключення.
4. Які невідомі називаються базисними, вільними?

5. Що таке загальний розв'язок системи лінійних рівнянь?

6. Який розв'язок системи рівнянь називається частинним? Скільки частинних розв’язків має невизначена система рівнянь?

7. Який розв’язок називається базисним?

8. Опишіть розв'язок системи рівнянь табличним варіантом методу повного виключення.

9. Сформулюйте правило прямокутника.

10. Як перетворюється таблиця за формулами повного виключення?

11. Який вигляд має вихідна таблиця під час розв’язання систем рівнянь з однаковою матрицею системи?

12. Опишіть алгоритм знаходження оберненої матриці методом повного виключення.

13. У якому разі можна дійти висновку, що вихідна матриця вироджена?

14. Сформулюйте умову лінійної залежності множини векторів.

15. Опишіть алгоритм дослідження на лінійну залежність множини векторів.

16. Що можна сказати про лінійну залежність п'яти векторів у просторі $R_4$? Відповідь обґрунтуйте.

17. Що називається рангом та базисом множини векторів?

18. Дайте означення розкладання вектора множини за базисом. Що таке координати вектора у цьому базисі?

19. Опишіть алгоритм пошуку базису множини векторів та розкладання векторів множини за вибраним базисом.

# СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Михайленко, В. Г., Свищева Е. В. и Петрова, А. Ю. *Линейная алгебра. Практикум*. (2019). 3-е изд., испр. Харьков: Изд-во НУА, 80 с
2. Валєєв, К. Г.,Джалладова, І. А. та Дегтяр, С. В. (2015). *Вища математика для економістів*. Київ: Знання, 287 с.
3. Васильченко, І. П. *Вища математика для економістів*. (2014). Київ: Знання, 341 с.
4. Дубовик В. П., Юрик І. І. (2018). *Вища математика. Навч. посібник.* Київ: Ігнатекс-Україна, 648 с.
5. Макаренко, В. О. (2018). *Вища математика для економістів*. Київ: Знання, 517 с.
6. Фортуна, В. В., Бескровний, О. І. (2016). *Вища та прикладна математика*. Львів: Магнолія-2006, 647 с.

# ЗМІСТ

*Навчальне видання*

**Серія «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ ТА СОЦІОЛОГІВ»**

МИХАЙЛЕНКО Світлана Василівна
СВІЩОВА Євгенія Віталіївна

# ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

В авторській редакції
Компьютерний набір і верстка *Є. В. Свіщова*

Підписано до друку ____Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Гарнітура «Таймс».
Умов. друк. арк. 6,04. Обл.-вид. арк. 3,03.
Тираж 50 пр. Зам №

*План 2022/23 навч. р., поз. № 2 в переліку робіт кафедри.*

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво № 1153 від 16.12.2002.

Надруковано у видавництві Народної української академії
Україна, 61000, Харків, МСП, вул. Лермонтовська, 27.